

MATHHX B

Benjamin Teglbjærg

31. maj 2025

Indhold

1	Grundlæggende matematik	5
1.1	Hovedregning	5
1.2	Bogstavregning	16
1.3	Mængder	24
1.4	Ligninger	30
1.5	Uligheder	37
1.6	Kvadratsætninger	41
1.7	Potensregneregler	43
1.8	GeoGebra	44
1.9	Andre værktøjer	51
2	Funktioner	55
2.1	Introduktion til funktioner	55
2.2	Grafer	59
2.3	Definitions- og værdimængde	67
2.4	Nulpunkter og fortegn	71
2.5	Ekstrema og monotoniforhold	77
2.6	Grafer i GeoGebra	83
3	Lineære funktioner	92
3.1	Introduktion til lineære funktioner	92
3.2	Grafer for lineære funktioner	93
3.3	Anvendelser af lineære funktioner	100
3.4	Stykkevis lineære funktioner	102
3.5	Lineær regression i WordMat	109
3.6	Lineær regression i Excel og GeoGebra	120
3.7	Beviser til lineære funktioner	134
3.8	Ekstra til lineære funktioner	138
4	Polynomier	140

4.1	Introduktion til polynomier	140
4.2	Parabler	146
4.3	Toppunkt og nulpunkter for andengradspolynomier	153
4.4	Andengradsligninger	161
4.5	Nulreglen	164
4.6	Fortegn for polynomier	167
4.7	Skæring mellem polynomier	170
4.8	Beviser til polynomier	172
5	Procentregning og indekstal	177
5.1	Procentregning	177
5.2	Indekstal	181
6	Eksponentielle funktioner	184
6.1	Introduktion til eksponentielle funktioner	184
6.2	Eksponentiel vækst	192
6.3	Eksponentiel regression i WordMat	194
6.4	Eksponentiel regression	199
6.5	Fordobling og halveringskonstant	204
6.6	Beviser til eksponentielle funktioner	207
7	Omvendte funktioner og logaritmer	211
7.1	Omvendte funktioner	211
7.2	Omvendte funktioner til lineære funktioner	220
7.3	Logaritmefunktioner	223
7.4	Eksponentielle ligninger	229
7.5	Beviser til logaritmer	233
8	Finansiell regning	239
8.1	Kapitalfremskrivning	239
8.2	Annuitetsopsparing	242
8.3	Annuitetslån	245
8.4	Amortisationstabeller og restgæld	247
8.5	Finansiell regning i Excel	252
8.6	Nominel, effektiv og gennemsnitlig rente	255
8.7	Teori for finansiell regning	258
8.8	Beviser til finansiell regning	264
9	Lineær programmering	271
9.1	Lineær programmering med hjørneinspektion	271
9.2	Lineær programmering med niveaulinjer	278

9.3	Teori for lineær programmering	286
9.4	Lineær programmering uden computer	292
9.5	Følsomhedsanalyse (A)	297
9.6	Beviser til lineær programmering	301
10	Differentialregning	303
10.1	Grafisk bestemmelse af differentialkvotienter	303
10.2	Differentialkvotienter ved tabelopslag	313
10.3	Tangentens ligning	321
10.4	Differentialregning med GeoGebra	325
10.5	Definition af differentialkvotienten	329
10.6	Differentialkvotienter ved beregning	339
10.7	Kontinuitet (A)	346
10.8	Beviser - differentialregning	356
11	Funktionsundersøgelse	367
11.1	Funktionsundersøgelse fra første år	367
11.2	Monotoniforhold med differentialregning	369
11.3	Ekstrema med differentialregning	373
11.4	Værdimængde og differentialregning	379
11.5	Krumningsforhold (A)	381
11.6	Funktionsundersøgelse i GeoGebra	388
11.7	Beviser til funktionsundersøgelse	397
12	Beskrivende statistik	401
12.1	Ugrupperede observationer	402
12.2	Deskriptorer for ugrupperede observationer	406
12.3	Grupperede observationer	413
12.4	Deskriptorer for grupperede observationer	419
12.5	WordMat statistik	421
12.6	Beviser til statistik	427
12.7	Ekstra statistik	428
13	Grundlæggende sandsynlighedsregning	435
13.1	Kombinatorik	435
13.2	Endelige sandsynlighedsfelter	438
13.3	Hændelser	441
13.4	Stokastiske variable	449
14	Binomialfordelinger	456
14.1	Introduktion til binomialfordelinger	456

14.2	Binomialfordelinger i GeoGebra	462
14.3	Beviser til binomialfordeling	468
15	Normalfordelinger (A)	470
15.1	Kontinuerte fordelinger	470
15.2	Introduktion til normalfordeling	476
15.3	Normalfordelinger i GeoGebra	484
15.4	Normalfordelte observationssæt	486
15.5	Fordelingsfunktioner	490
16	Konfidensintervaller	497
16.1	Konfidensintervaller – binomialfordeling	497
16.2	Konfidensintervaller – normalfordeling (A)	505
16.3	Beviser til konfidensintervaller (A)	514
17	Chi i anden-test	519
17.1	Introduktion til chi i anden-test	519
17.2	Forklaringer og detaljer for chi i anden-test	527
17.3	Chi i anden-test med Excel og GeoGebra	537
	Løsninger til opgaver	542
	Indeks	652

Kapitel 1

Grundlæggende matematik

I dette kapitel skal vi se på grundlæggende matematik, som er en forudsætning for de egentlige emner. Meget af det burde være kendt fra folkeskolen.

1.1 Hovedregning

Større regnestykker vil vi altid regne på computer eller lommeregner. Men det er nødvendigt, at kunne lidt hovedregning også, da dele af undervisningen foregår uden hjælpemidler. Desuden er hovedregning en forudsætning for bogstavregning, som fylder meget på HHX.

Plus, minus, gange og dividere

Man skal gange og dividere inden man lægger til og trækker fra. På HHX skriver vi altid division med en brøkstreg. Så vil vi skrive 20 divideret med 5, skriver vi $\frac{20}{5}$.

Eksempel 1.1.1

$$2 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13$$

Øvelse 1.1.1

Regn uden brug af lommeregner/computer:

a) $4 + 5 \cdot 2$

b) $7 - 2 + 3 \cdot 2 - 5$

c) $4 - \frac{6}{3} + 2$

I udtryk med brøker regnes først tæller og nævner, så divideres, og så regnes resten.

Eksempel 1.1.2

$$\frac{10-2}{4-2} \cdot 2 = \frac{8}{2} \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$$

Øvelse 1.1.2

Regn uden brug af computer/lommeregner:

a) $3 \cdot \frac{10-2}{6-4} + 2$

b) $\frac{8}{8-4} + 7$

c) $2 + \frac{3 \cdot 5 + 5}{4} - 2 \cdot 3$

Jeg har erfaring med at visse simple divisionsstykker kan være udfordrerne for eleverne.

Eksempel 1.1.3

$$\frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{1}{0,5} = 2 \text{ (hvis du er forvirret, så tænk over hvor mange gange 0,5 går op i 1)}$$

$$\frac{0}{5} = 0$$

$$\frac{5}{0} \text{ kan ikke regnes. Man kan ikke dele med 0.}$$

Læg mærke til at man godt kan *dividere nul med noget*, men man kan ikke *dividere noget med nul*.

Øvelse 1.1.3

Beregn uden brug af lommeregner/computer:

a) $\frac{7}{7}$

b) $\frac{6}{0}$

c) $\frac{27}{9}$

d) $\frac{0}{89}$

e) $\frac{3}{0,25}$

Fortegn (plus og minus)

Ganger eller dividerer man to ens fortegn får man plus. To forskellige giver minus.

Eksempel 1.1.4

$$2 \cdot 6 = 12$$

$$-2 \cdot 6 = -12$$

$$2 \cdot (-6) = -12$$

$$-2 \cdot (-6) = 12$$

Læg mærke til at -6 står i parentes i de to nederste regnestykker. Det er fordi, det er forbudt at skrive " $\cdot -$ ", altså det er forbudt at skrive et gangetegn og et minustegn lige efter hinanden.

Hvad så med $-4 - 3$? Giver det mon så også plus? Der er jo to minustegn?... svaret er NEEEEEEEEEEEEEEEEJJJJ. Vi regner $-4 - 3 = -7$. Så det er kun ved gange eller division at to ens giver plus.

Øvelse 1.1.4

Beregn uden brug af computer/lommeregner:

a) $-3 \cdot 2$

b) $7 \cdot (-2)$

c) $-3 \cdot (-5)$

d) $\frac{6}{-3}$

e) $-4 \cdot 2 \cdot (-2)$

f) $\frac{-4}{-2}$

g) $\frac{-4}{2} - 3$

h) $-2 \cdot \frac{-4}{-1}$

i) $\frac{-1 \cdot (-6)}{3} \cdot (-2)$

j) $\frac{-5}{0}$

Potenser

Vi får brug for at regne med potenser. En potens er tal som f.eks. 3^2 (3 i anden) eller 5^3 (5 i tredje) og vi husker, at 3^2 regnes ved at sige $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ og $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Man regner potenser før man ganger, dividerer, lægger sammen og trækker fra.

Eksempel 1.1.5

$$2^4 + 6^1 = 16 + 6 = 22$$

Øvelse 1.1.5

Beregn uden brug af lommeregner/computer:

a) 4^2

b) 2^3

c) 3^1

d) $2 \cdot 5^2 + 5$

Rødder

Rødder er ”det omvendte af potenser”. I kender sikkert kvadratroden fra folkeskolen. Man bruger kvadratroden, hvis man har et tal, der er sat i anden, og gerne vil finde det oprindelige tal. F.eks. er $\sqrt{16} = 4$ fordi $4^2 = 16$. Godt nok er $(-4)^2$ også 16, men kvadratroden er altid det positive tal.

Man kan ikke tage kvadratroden af et negativt tal, da noget i anden altid giver et positivt tal. Hvis du ikke forstår den forklaring så spørg.

Øvelse 1.1.6

Regn uden at bruge lommeregner:

- a) $\sqrt{9}$
- b) $\sqrt{4}$
- c) $\sqrt{1}$
- d) $\sqrt{-4}$
- e) $\sqrt{0}$

Der findes andre rødder end kvadratrødder. Har man et tal der er sat i tredje, og vil man gerne finde det oprindelige tal, kan man tage den tredje rod. F.eks. får vi den tredje rod af 8 til at være 2, fordi $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, og vi skriver $\sqrt[3]{8} = 2$. Da kvadratroden er ”den anden rod”, kan vi skrive f.eks. $\sqrt{9}$ som $\sqrt[2]{9}$.

Øvelse 1.1.7

Bestem følgende rødder:

- a) $\sqrt[2]{25}$
- b) $\sqrt[3]{0}$
- c) $\sqrt[3]{27}$
- d) $\sqrt[4]{16}$
- e) $\sqrt[100]{1}$

Det er generelt svært at regne rødder i hovedet. Det er f.eks. svært at regne $\sqrt{5}$ uden en lommeregner.

Øvelse 1.1.8

a) Hvordan siger man $\sqrt[5]{7}$?

Regningsarternes hierarki

Vi har allerede set, at man skal gange og dividere, før man lægger til og trækker fra. Men hvad med potenser og rødder? Man skal udføre de forskellige operationer i følgende rækkefølge:

1. Parenteser samt tæller og nævner i brøker.
2. Potenser og rødder.
3. Gange og dividere.
4. Plus og minus.

Eksempel 1.1.6

$$2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2 = 2 \cdot 9 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8$$

Øvelse 1.1.9

Regn uden brug af lommeregner:

- a) 3^2
- b) -3^2
- c) $(-3)^2$
- d) $2 \cdot (5 - 3)^3 - \sqrt{4}$
- e) $\frac{(4-5)^2}{2} - 1$

Måske regnede du -3^2 forkert? Det er måske den mest almindelige fejl på hhx. Der står **IKKE** tallet -3 sat i anden. Der står 3^2 med et minus foran. Vil man skrive tallet -3 i anden skriver man $(-3)^2$. Vi tager en til øvelse med det:

Øvelse 1.1.10

Regn

- a) -2^2
- b) $(-2)^2$

Næste underafsnit er markeret med et (A). Det betyder at man skal regne det, hvis man overvejer at tage A-niveau matematik.

Numerisk værdi (A)

At tage den numeriske værdi betyder, at "fjerne minuset hvis der er et". Man skriver den numeriske værdi med to lodrette streger " $|$ ".

Eksempel 1.1.7

Vi vil tage den numeriske værdi af 5. Der er ikke noget minus, så den numeriske værdi af 5 er 5. Vi skriver

$$|5| = 5$$

Vi prøver nu at tage den numeriske værdi af -5 . Der er et minus, så det fjerner vi og får dermed 5. Altså:

$$|-5| = 5$$

Øvelse 1.1.11

Regn

a) $|-3|$

b) $|2|$

c) $|7(2-3)|$

Man kan tænke på den numeriske værdi af et tal, som afstanden fra tallet til nul. Den numeriske værdi af -5 er 5 fordi at -5 har en afstand på 5 indtil nul, hvis man tegnede -5 og 0 på en tallinje.

Vi slutter af med et ekstraafsnit om brøker. Hvis matematik ikke er ens yndlingsfag, kan man godt overleve Mat-B uden at være supergod til brøkgregning, men vil man have en solid forståelse (eller vil man have Mat-A), så anbefaler jeg, at man regner afsnittet samt det tilsvarende ekstraafsnit under bogstavregning.

Ekstraafsnit om brøker

I dette afsnit skal vi se på almindelig brøkgregning, som burde være kendt fra folkeskolen. Her er et eksempel på en brøk.

$$\frac{3}{4}$$

Det øverste tal kaldes tælleren og det nederste kaldes nævneren. Mange glemmer, hvad der er hvad, så her er en huskeregel:

$$\frac{\text{Top}}{\text{Nederst}} = \frac{\text{Tæller}}{\text{Nævner}}$$

Forlænge og forkorte brøker

Man forlænger en brøk ved at gange med det samme tal i både tæller og nævner:

Eksempel 1.1.8

Vi vil forlænge brøken $\frac{3}{4}$ med 5.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

Man forkorter en brøk ved at dividere med det samme tal i tæller og nævner.

Eksempel 1.1.9

Vi vil forkorte brøken $\frac{2}{10}$. Vi ser at 2 går op i både tæller og nævner, så vi kan forkorte med 2. Først omskriver vi brøken, så fremgår klart, hvad vi kan forkorte med.

$$\frac{2}{10} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{5 \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{5}$$

Øvelse 1.1.12

Nu er det din tur.

a) Forlæng $\frac{2}{7}$ med 3

b) Forkort $\frac{8}{24}$, så den ikke kan forkortes mere.

Plus og minus

Skal man lægge to brøker sammen kræver det, at de har samme nævner.

Eksempel 1.1.10

Vi vil regne $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$. Vi ser, at hvis vi forlænger den sidste brøk med 2, får vi

fællesnævneren 6:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} + \frac{2}{3} &= \frac{1}{6} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \\ &= \frac{1+4}{6} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Kan man ikke lige se en fællesnævner, kan man forlænge den første brøk med nævneren fra den anden og forlænge den anden brøk med nævneren fra den første. Det kan dog give en unødvendig høj fællesnævner.

Man kan lægge et tal til en brøk ved at lave tallet om til en brøk:

Eksempel 1.1.11

Vi vil regne $\frac{4}{7} + 2$. Da $1 = \frac{7}{7}$, må $2 = \frac{14}{7}$, så

$$\frac{4}{7} + 2 = \frac{4}{7} + \frac{14}{7} = \frac{18}{7}$$

Vi har kun set eksempler med plus, men man gør det på samme måde når det er minus.

Øvelse 1.1.13

Regn

- a) $\frac{1}{7} + \frac{4}{7}$
- b) $\frac{3}{40} + \frac{2}{4}$
- c) $\frac{5}{4} - \frac{3}{5}$

Gange og dividere

Man ganger to brøker ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner.

Eksempel 1.1.12

Vi vil regne $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3}$.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 3} = \frac{5}{12}$$

Man ganger et tal på en brøk ved at gange tallet op i tælleren.

Eksempel 1.1.13

Vi vil regne $5 \cdot \frac{3}{10}$.

$$5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

Læg mærke til, at vi har forkortet brøken i sidste skridt. Man bør altid aflevere facit som en uforkortelig brøk.

Er man god til matematik, vil man regne stykket lidt smartere. Fordi 5 går op i nævneren vil 5-tallet gå ud når vi forkorter, og derfor kan man ligeså godt ”forkorte det ud” med det samme:

$$5 \cdot \frac{3}{10} = 5 \cdot \frac{3}{5 \cdot 2} = \cancel{5} \cdot \frac{3}{\cancel{5} \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

Man dividerer to brøker ved at ”gange med den omvendte”.

Eksempel 1.1.14

Vi vil regne:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{6}}$$

Vi bruger reglen med at ”gange med den omvendte”. Dvs. at vi bytter rundt på tæller og nævner i den nederste brøk, hvorefter vi ganger de to brøker.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{6}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{7} \\ &= \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 7} \\ &= \frac{18}{14} \\ &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

Reglen med at gange med den omvendte gælder også, når vi dividere et tal med en brøk

Eksempel 1.1.15

Vi vil regne

$$\frac{2}{\frac{4}{3}}$$

Vi gør det ved at gange med den omvendte:

$$\frac{2}{\frac{4}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Ligesom i 1.1.13 kan vi gøre det smartere:

$$\frac{2}{\frac{4}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{3}{2 \cdot 2} = \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2} \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

Det ser måske ikke smartere ud, når det står på den måde, men der skal regnes mindre.

Man dividerer en brøk med et tal ved at gange tallet ind i nævneren.

Eksempel 1.1.16

Vi vil regne:

$$\frac{\frac{8}{5}}{2}$$

Her skal vi altså bare gange nævneren i den øvre brøk med 2.

$$\frac{\frac{8}{5}}{2} = \frac{8}{5 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4 \cdot \cancel{2}}{5 \cdot \cancel{2}} = \frac{4}{5}$$

Øvelse 1.1.14

Regn

a) $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5}$

b) $\frac{6}{5} \cdot 2$

c) $\frac{\frac{3}{5}}{3}$

d) $\frac{5}{\frac{3}{2}} \cdot 4$

e) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}}$

I stedet for at gå og huske alle brøkgregnerreglerne, kan man prøve at forstå dem, så man næste gang kan tænke sig frem til dem.

Eksempel 1.1.17

Hvis man ganger et tal med en brøk skal man gange ind i tælleren. Det kan man godt forklare. Lad os sige, at vi har en pizza som er delt i 8 stykker. Lad os sige, at du spiser 2 stykker. Så har du spist $\frac{2}{8}$ af pizzaen. Hvis din ven spiser det dobbelte af dig, så spiser hun 4 stykker. Dvs. $\frac{4}{8}$ af pizzaen. Så

$$2 \cdot \frac{2}{8} = \frac{2 \cdot 2}{8} = \frac{4}{8}$$

Den næste øvelse er markeret som ”Svær”. Det er tilladt at springe svære øvelser over.

Øvelse 1.1.15 (Svær)

I denne øvelse skal du overveje resten af brøkretnereglerne.

- a) Læs ovenstående eksempel og se om du kan argumentere tilsvarende for de andre regneregler. Du behøver ikke at skrive dine argumenter ned. Det er fint, hvis du bare har det i hovedet.

1.2 Bogstavregning

Gymnasiematematik er mere abstrakt end folkeskolematematik. Her regner vi ofte med bogstaver, så det er vigtigt at få en god forståelse for bogstavregning fra starten af.

Reduktion

At reducere et matematisk udtryk betyder at skrive det på en mere simpel form.

Eksempel 1.2.1

Vi vil reducere udtrykket $a + b + 2a - a$.

Vi kan se, at a går ud med $-a$ så:

$$a + b + 2a - a = 2a + b$$

Øvelse 1.2.1

Reducer

a) $b + c - 2a + a - c$

b) $a + a + a$

c) $b + x - x - b$

Vi husker at ab betyder $a \cdot b$, og det kan ikke regnes sammen med a eller b .

Eksempel 1.2.2

Vi reducerer:

$$a + ab + ba - b = a + 2ab - b \quad (\text{fordi } ab = ba)$$

Øvelse 1.2.2

Reducer

a) $ab - a + a - 2b + b$

b) $bc + cb$

c) $ab + ab + ba$

Parenteser

En parentes betyder, at man skal regne det, som står i parentesen først. Står der et tal foran (eller bagved) en parentes, betyder det "gange". Har vi f.eks. $2(5 + 3)$, betyder det altså $2 \cdot (5 + 3)$.

Eksempel 1.2.3

$$2(3 + 2) = 2 \cdot (3 + 2) = 2 \cdot 5 = 10$$

Øvelse 1.2.3

Regn

a) $2(3 - 1)$

b) $(5 + 2)3$

Når der optræder bogstaver i regnestykket, kan man ikke altid regne parentesene først. Så kan man i stedet benytte følgende regler:

- Man ganger ind i parenteser ved at gange i hvert led. Hvis du er i tvivl om hvad det betyder, så tjek eksemplet nedenunder.
- Plusparenteser kan bare ophæves.
- Minusparenteser klares ved at skifte fortegn. Altså man skifter plus til minus og minus til plus.

Eksempel 1.2.4

Vi reducerer

a) $2(a + b) = 2a + 2b$

b) $a(b - c) = ab - ac$

c) $5 + (a - 2) = 5 + a - 2 = a + 3$

d) $-(x + y) = -x - y$

e) $-(2 - a) = -2 + a = a - 2$

Øvelse 1.2.4

Reducer

a) $3(x + y)$

b) $(a - b)^2$

c) $2 + (x + y) - 3$

d) $-(v + w)$

e) $a(2b + b) - ba - (2a - 2)$

Faktorisering

Dette afsnit kan springes over, indtil du får brug for det.

At faktorisere betyder at skrive noget som et gangestykke. I praksis svarer det til det modsatte af at gange en parentes ud. Dvs. i stedet for at ophæve en parentes trykker man en parentes frem.

Eksempel 1.2.5

Vi vil faktorisere udtrykket $2x + 6$. Da 2 går igen i begge led, kan vi sætte det ud foran en parentes:

$$2x + 6 = 2(x + 3)$$

Vi tjekker, at det passer ved at gange parentesen ud:

$$2(x + 3) = 2x + 6$$

Det passede. Udtrykket $2x + 6$ kan altså faktorerises til $2(x + 3)$.

Øvelse 1.2.5

Faktorisér

a) $4x + 4$

b) $3x - 15$

Man kan også faktorisere med bogstaver.

Eksempel 1.2.6

Vi vil faktorisere udtrykket $3a + 7ab$. Vi ser at a går op i begge led, så vi kan faktorisere med a

$$3a + 7ab = a(3 + 7b)$$

Tjek selv, at det passer, når man ganger parentesen ud.

Nogle gange er der flere måder, man kan faktorisere et udtryk.

Eksempel 1.2.7

Vi vil faktorisere udtrykket $x^3 - x^2$. Vi ser, at x går op i begge led, så vi kan faktorisere med x

$$x^3 - x^2 = x(x^2 - x)$$

...men hmm i stedet for at faktorisere med x , kunne vi have været mere aggressive (go big or go home) og faktoreret med x^2 ,

$$x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$$

Typisk vil man gerne have mest muligt ud foran parentesen.

Øvelse 1.2.6

Faktoriser følgende udtryk mest muligt.

a) $ab + 2b$

b) $x^2 - 2x$

c) $3x^4 - 2x^3 + x^2$

d) $abc + bcd + bcx$

Det følgende ekstraafsnit forudsætter, at du har regnet afsnit 1.1. Det er et vigtigt afsnit, hvis du gerne vil have en solid forståelse.

Ekstra: Korrekt sprogbrug

Vi starter af med at indføre nogle begreber.

Sum, differens og led

En *sum* er et udtryk på formen

$$a + b + c + \dots$$

Her kaldes $a, b, c, \dots$ for *led*. En sum består altså af to eller flere led adskilt af et plustegn. En *differens* er et udtryk på formen

$$a - b$$

Her kaldes a og b også for led.

Produkt, faktorer

Et *produkt* er et udtryk på formen

$$a \cdot b \cdot c \dots$$

Her kaldes $a, b, c, \dots$ for *faktorer*. Et produkt består altså af to eller flere faktorer adskilt af gangetegn. Vi skriver ofte produkter uden gangetegn. Skriver vi ab betyder det altså $a \cdot b$.

Potens, grundtal og eksponent

En *potens* er et udtryk på formen

$$a^p$$

Her kaldes a for *grundtallet* og p for *eksponenten*.

Eksempel 1.2.8

Betragt udtrykket:

$$a(b + c)$$

Dette betyder $a \cdot (b + c)$ og derfor er det et produkt bestående af faktorerne a og $(b + c)$. Den anden faktor, altså $(b + c)$, er en sum bestående af de to led b og c .

Øvelse 1.2.7

Forklar hvordan udtrykket er opbygget.

- a) $2ab$
- b) $a - ab$
- c) q^p

Ekstra: brøker med bogstaver

Når vi fremover støder på brøker, så vil de ofte være med bogstaver i stedet for tal. Det er dog præcis de samme regler, der gælder.

Forlænge og forkorte

Eksempel 1.2.9

Vi vil forlænge brøken $\frac{a+b}{c}$ med 5.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{5(a+b)}{5c} = \frac{5a+5b}{5c}$$

Læg mærke til parentesens efter første lighedstegn. Det er en almindelig fejl, at man glemmer den. Glemmer man den, får man ikke ganget hele tælleren med 5, men kun første del.

Eksempel 1.2.10

Vi vil forkorte brøken $\frac{2a}{4ab}$.

$$\frac{2a}{4ab} = \frac{2a \cdot 1}{2a \cdot 2b} = \frac{\cancel{2a} \cdot 1}{\cancel{2a} \cdot 2b} = \frac{1}{2b}$$

Hvis der optræder flere led (vi husker at led er adskilt af plus og minus) i tæller eller nævner, skal man forkorte i hvert led.

Eksempel 1.2.11

Vi vil forkorte brøken $\frac{2a+7a^2}{ab}$.

$$\frac{2a + 7a^2}{ab} = \frac{2a + 7aa}{ab} = \frac{2\cancel{a} + 7a\cancel{a}}{\cancel{a}b} = \frac{2 + 7a}{b}$$

Øvelse 1.2.8

Regn

- a) Forlæng brøken $\frac{a+1}{b}$ med c .
- b) Forkort brøken $\frac{ab}{bc}$.
- c) Forkort brøken $\frac{ab}{b}$
- d) Forkort brøken $\frac{ab+ac-a^3}{2a^2+a}$

Plus og minus

Eksempel 1.2.12

Vi vil regne $\frac{2a+b}{a} + \frac{4}{b}$. Vi forlænger første brøk med b og anden brøk med a :

$$\begin{aligned}\frac{2a+b}{a} + \frac{4}{b} &= \frac{(2a+b)b}{ab} + \frac{4a}{ab} \\ &= \frac{(2a+b)b + 4a}{ab} \\ &= \frac{2ab + b^2 + 4a}{ab}\end{aligned}$$

Eksempel 1.2.13

Vi vil regne $\frac{a}{b} + c$

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + c &= \frac{a}{b} + \frac{c}{1} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{c \cdot b}{1 \cdot b} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{bc}{b} \\ &= \frac{a + bc}{b}\end{aligned}$$

Øvelse 1.2.9

Regn

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$

b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

c) $\frac{a}{b} - 2$

d) $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

Gange og dividere

Når man ganger eller dividerer brøker med flere led i tæller/nævner, skal man huske at sætte parenteser.

Eksempel 1.2.14

Vi vil regne $a \cdot \frac{b+c}{b}$:

$$a \cdot \frac{b+c}{b} = \frac{a(b+c)}{b} = \frac{ab+ac}{b}$$

Øvelse 1.2.10

Regn:

a) $\frac{a+b}{c} \cdot \frac{a}{b}$

b) $\frac{a+2}{b} \cdot a$

c) $\frac{\frac{2}{a}}{b}$

d) $\frac{a}{\frac{2}{a}}$

e) $\frac{\frac{3+a}{b}}{\frac{a}{b}}$

f) $\frac{1}{\frac{1}{y}}$

1.3 Mængder

En mængde er en samling af ting. Tager man f.eks. tallene 1, 2 og 3, kan man samle dem i en mængde M . Den mængde opskrives på følgende måde:

$$M = \{1, 2, 3\}$$

Tingene i mængden kaldes elementer. Mængden M består altså af elementerne 1, 2 og 3. Man kan bruge tegnet " $\in$ " til at vise, at et element ligger i en mængde. F.eks. kan vi skrive, at 2 ligger i M ved at skrive $2 \in M$. Parentesen " $\{\}$ " kaldes en *Tuborg* eller en *krøllet parentes*.

Øvelse 1.3.1

Lad K være mængden bestående af tallene -2 og 7 .

a) Opskriv K .

b) Er det rigtigt at $3 \in K$?

Særlige mængder

Den største mængde vi støder på her på mathhx er mængden af samtlige tal på tallinjen. Denne mængde kaldes *de reelle tal* og betegnes $\mathbb{R}$ (læg mærke til den specielle font).

Den mindste mængde, der findes, er den tomme mængde. Den betegnes med $\emptyset$ og indeholder ingen elementer.

Øvelse 1.3.2

Afgør om

- a) $0 \in \mathbb{R}$?
- b) $\pi \in \mathbb{R}$? Jeg håber du har lært om tallet π i folkeskolen, ellers skal du have skolepengene tilbage.
- c) $0 \in \emptyset$?

Intervaller

Et *interval* er karakteriseret ved to endepunkter, og består af alle de tal som ligger mellem de to endepunkter. De to endepunkter **kan** være med i intervallet.

Lukkede intervaller

Et lukket interval er et interval, som indeholder endepunkterne. Her er et eksempel:

$$[3; 7]$$

Ovenstående læses ”Det lukkede interval fra 3 til 7” og består af alle tal fra og med 3 til og med 7.

Øvelse 1.3.3

Vi vil tage udgangspunkt i det lukkede interval fra og med -2 til og med 5 .

- a) Opskriv intervallet.
- b) Ligger π i intervallet?
- c) Ligger -2 i intervallet?
- d) Ligger $-2,1$ i intervallet?

Åbne intervaller

Et åbent interval er det samme som et lukket interval, bortset fra at det ikke inkluderer endepunkterne. Her er et åbent interval:

$$]1; 4[$$

Vi ser at parenteserne vender omvendt i forhold til det lukkede interval. Intervallet her indeholder altså alle tal, som ligger mellem 1 og 4, men inkluderer ikke 1 og 4.

Øvelse 1.3.4

- a) Opskriv det åbne interval bestående af tallene mellem 7 og 7,5.
- b) Ligger 7 i intervallet?

Halvåbne intervallet

Man kan også lave halvåbne intervaller. Det giver lidt sig selv hvordan, men her er alligevel nogle eksempler

Eksempel 1.3.1

Intervallet $[3; 5[$ består af alle tal mellem 3 og 5 inklusiv 3, men uden 5.

Intervallet $]3; 5]$ består af alle tal mellem 3 og 5 uden 3, men inklusiv 5.

Øvelse 1.3.5

Opskriv følgende intervaller

- a) Intervallet fra 1 til 3, hvor hverken 1 eller 3 er med. Er det åbent, lukket eller halvåbent?
- b) Intervallet fra 5 til 9, hvor de begge endepunkter er med. Er det åbent, lukket eller halvåbent?
- c) Intervallet fra 2 til 7, hvor 2 er med, men 7 ikke er med. Er det åbent, lukket eller halvåbent?

Intervaller med "uendelig"

Man kan have intervaller, der er uendeligt lange. Vi betegner "uendelig" med symbolet ∞ . "Uendelig" er ikke selv et tal, men det kan bruges som endepunkt i et interval.

Eksempel 1.3.2

Intervallet $]3; \infty[$ består af alle tal større end 3. Læg mærke til at intervallet er åbent i den ende, der indeholder ∞ . Det er fordi ∞ ikke er et tal, og derfor kan det ikke ligge i intervallet.

Man kan også have intervaller med $-\infty$. Altså uendelig, men i negativ retning.

Eksempel 1.3.3

Intervallet $] - \infty; 7]$ består af alle tal mindre end eller lig med 7. Bemærk igen,

at intervallet er halvåbent, da ”minus uendelig” ikke er et tal og derfor ikke kan ligge i intervallet.

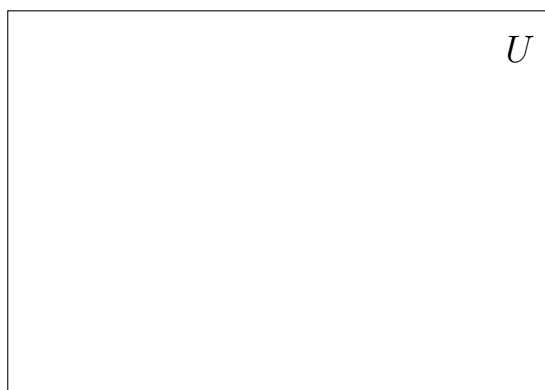
Øvelse 1.3.6

Opskriv følgende intervaller:

- a) Intervallet fra og med -3 til og med 7 .
- b) Intervallet bestående af alle tal større end -2 .
- c) Intervallet bestående af alle tal mindre end eller lig med 5 .

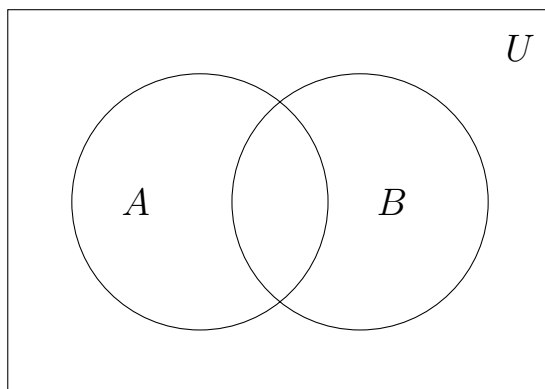
Nye mængder ud fra gamle

Man kan danne nye mængder ud fra eksisterende mængder. Vi starter med det som vi kalder for den *universelle mængde* og betegner med U :

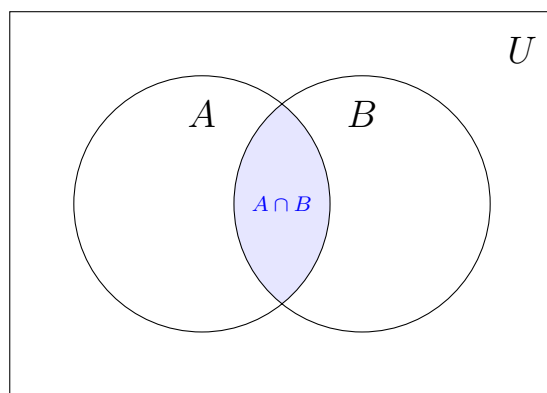


Denne mængde er ”det hele”. Vil vi arbejde med talmængder kunne U være $\mathbb{R}$ (som vi husker betyder ”alle tal på tallinjen”). Kigger vi på et terningkast, er $U = \{\square, \square\square, \square\square\square, \square\square\square\square, \square\square\square\square\square, \square\square\square\square\square\square\}$.

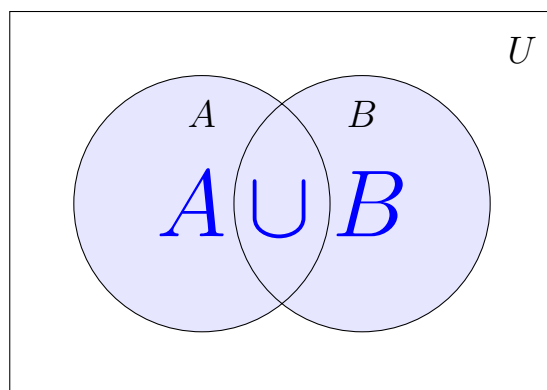
Inde i U tegner vi to mængder A og B :



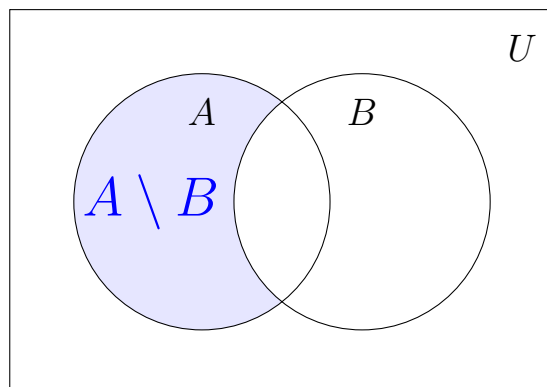
Det som de to mængder har tilfælles kaldes *fællesmængden* og betegnes $A \cap B$:



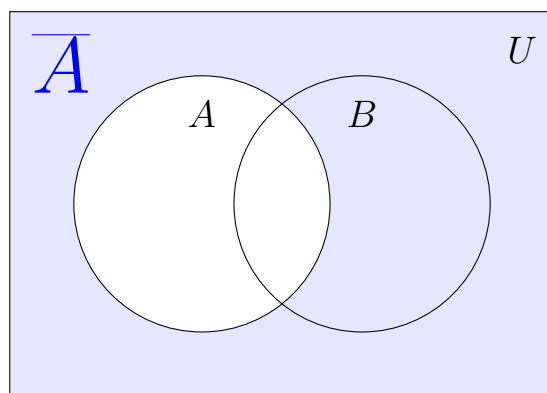
Samler man A og B til en stor mængde får man *foreningsmængden* $A \cup B$:



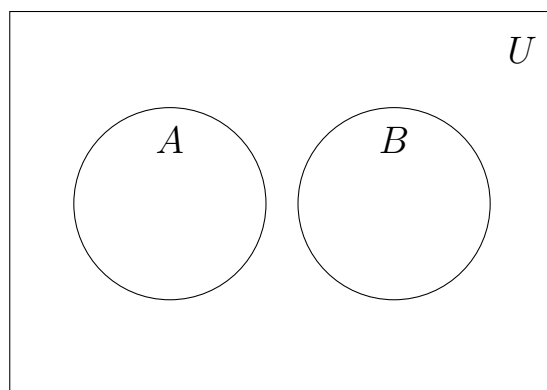
Tager man alle de elementer i A som ikke ligger i B får man *differensmængden* $A \setminus B$



Tager man alle de elementer som ikke ligger i A får man *komplementærmængden* $\overline{A}$



Mængderne A og B siges at være *disjunkte*, hvis de ikke har noget til fælles:



Øvelse 1.3.7

Lad $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ og $C = \{4\}$

- Bestem $A \cap B$
- Bestem $A \cup B$
- Bestem $A \setminus B$
- Bestem $B \setminus A$
- Er A og B disjunkte?
- Er A og C disjunkte?

Øvelse 1.3.8

Lad $A = [2; \infty[$ og antag at den universelle mængde U er $\mathbb{R}$.

- Bestem $\overline{A}$
- Bestem $A \cap [-3; 5[$
- Bestem $A \cup [-3; 5[$

1.4 Ligninger

At løse en ligning betyder at finde de mulige værdier for den ubekendte (som normalt betegnes med x). Man skal altså finde de tal, man kan sætte ind i ligningen, så ligningen bliver sand.

De fleste ligninger, vi møder her i grundforløbet, har netop én løsning, men en ligning kan altså godt have flere løsninger eller slet ingen løsninger.

Eksempel 1.4.1

Vi vil undersøge om $x = 3$ er løsning til ligningen $-x^2 + 1 = 10$.

Vi indsætter 3 på x 'ets plads:

$$-3^2 + 1 = 10$$

og reducerer

$$-8 = 10$$

Da denne ligning er falsk er $x = 3$ ikke en løsning.

Øvelse 1.4.1

Undersøg om $x = 2$ er en løsning til følgende ligninger:

a) $-(x - 1)(x + 3) = x^3 - 13$

b) $x + 6 = \frac{x^2 + 12}{x + 4}$

Har man en meget simpel ligning, kan man regne ud hvad løsningen er bare ved at kigge på ligningen.

Eksempel 1.4.2

Vi vil løse ligningen $2x = 10$. Vi skal altså have et tal, så når man ganger det med 2 får man 10. Hvad kan det mon være...? Det er selvfølgelig 5. Så løsningen er $x = 5$.

Øvelse 1.4.2

Løs ligningerne:

a) $x + 2 = 3$

b) $4 = 1 + x$

c) $7x = 14$

Det er ikke altid, at man nemt kan se løsningen. Så må man løse ligningen ved at omforme den, så x står alene på den ene side af lighedstegnet. Dette kaldes også at "isolere x ". Reglerne burde være kendt fra folkeskolen, men her et eksempel til lige at friske det op.

Eksempel 1.4.3

Vi vil løse ligningen $2x + 6 - 4x = -x - 2$. Det gør vi ved at isolere x .

$$2x + 6 - 4x = -x - 2$$

Skriver ligningen op

$$-2x + 6 = -x - 2$$

Reducerer venstresiden

$$-2x = -x - 2 - 6$$

Trækker 6 fra på begge sider

$$-2x = -x - 8$$

Reducerer højresiden

$$-2x + x = -8$$

Lægger x til på begge sider

$$-x = -8$$

Reducerer venstresiden

$$x = 8$$

Ganger med -1 på begge sider

Øvelse 1.4.3

Løs ligningerne ved at isolere x som i ovenstående eksempel.

a) $2(x + 1) = 12$

b) $2 - x = 10$

c) $(x - 2) \cdot 3 = 5x$

Ikke alle ligninger har løsninger.

Eksempel 1.4.4

Ligningen $x = x + 1$ har ingen løsninger, da den kan omformes til $0 = 1$ og uanset hvilken værdi vi sætter x til, vil dette altid være forkert.

Øvelse 1.4.4

Løs ligningerne:

a) $x + 5 = 7$

b) $-(x + 2) = 10$

c) $x + (3 + x) = -4$

d) $x + 4 = x + 2 \cdot 3$

e) $2 - (2 - x) = 10x$

f) $2x - 2 = 2(x - 1)$

Løsningsmængde og grundmængde

Mængden af løsninger til en ligning kaldes *løsningsmængden* og betegnes med L .

Eksempel 1.4.5

Betragt ligningen $2x = 8$. Deler vi med 2 på begge sider får vi løsningen $x = 4$. Løsningsmængden er

$$L = \{4\}$$

Betragt i stedet ligningen $x + 1 = x$. Den ligning har vi set før og der konkluderede vi, at den ikke havde nogle løsninger. Løsningsmængden bliver derfor:

$$L = \emptyset$$

Øvelse 1.4.5

Bestem løsningsmængden til følgende ligninger

a) $-(2 - x) = x$

b) $2x = 4(x + 3)$

c) $3(x + 2) + 2 = 3x + 8$

Skal man tjekke om et tal er løsning til en ligning, sætter man tallet ind i ligningen og ser om ligningen bliver sand. Men vi kan risikere, at man slet ikke kan sætte tallet ind i ligningen. Mængden af tal, som kan sættes ind i ligningen kaldes for *grundmængden* og betegnes med G .

Eksempel 1.4.6

Betragt ligningen $x + 1 = 2x + 5$. Vi har:

$$G = \mathbb{R}$$

fordi man kan sætte alle tal ind i ligningen. Det er ikke sikkert, at ligningen bliver sand, men vi kan regne både venstre og højresiden af ligningen uden problemer uanset hvilket tal vi sætter ind.

Betragt nu ligningen

$$\frac{1}{x-2} = 4$$

Hvis vi sætter 2 ind på x 'ets plads kommer der til at stå nul i nævneren, det er ikke godt, da man ikke kan dele med nul. Derfor er 2 ikke med i grundmængden. Man kan dog sætte alle andre tal ind i ligningen så:

$$G = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Øvelse 1.4.6

Bestem grundmængden for følgende ligninger

a) $\frac{3}{x} = 9$

b) $5 + x = \frac{3}{2x-6}$

c) $\sqrt{x} = 5x$

d) $\sqrt{x+1} = \frac{5}{x}$

To ligninger med to ubekendte (Mat-A)

Nogle ligninger indeholder mere end én ubekendt.

Eksempel 1.4.7

Betragt ligningen $x + y = 10$. Det er en ligning med 2 ubekendte, fordi der både optræder et ubekendt x og et ubekendt y .

Skal man løse en ligning med flere ubekendte skal man bestemme hvilke værdier af de ubekendte, som gør ligningen sand.

Eksempel 1.4.8

Ligningen $x + y = 10$ har $x = 0$ og $y = 10$ som løsning. Indsætter vi disse

tal i ligningen bliver den nemlig sand. Men der er dog andre løsninger også. F.eks. $x = 1$ og $y = 9$. Faktisk har ligningen uendelig mange løsninger, da der er uendelig mange talpar, der tilsammen giver 10 (husk at man også kan bruge negative tal).

Vi har netop set, at en ligning med to ubekendte kan have uendelig mange løsninger. Sådan er det typisk. Men har man **to** ligninger med to ubekendte, vil der ofte kun være en løsning, som opfylder begge ligninger.

Eksempel 1.4.9

Betragt ligningen $x + y = 10$ og ligningen $x - y = 0$. Der er kun en kombination af x og y som vil være løsning til begge ligninger på en gang. Ligningen $x - y = 0$ er opfyldt når $x = y$ og fordi x og y tilsammen skal give 10, så må $x = 5$ og $y = 5$.

Der findes en simpel systematisk måde at løse to ligninger med to ubekendte. Den er nemmest at forklare igennem et eksempel:

Eksempel 1.4.10

Vi vil løse ligningssystemet:

$$x + y = 10 \quad \text{og} \quad x - y = 0$$

Vi starter med at isolere x i den første ligning. Det giver:

$$x = 10 - y$$

Nu erstatter vi x i den anden ligning med det x vi lige har fundet. Den anden ligning var $x - y = 0$ og indsætter vi $x = 10 - y$ i den får vi:

$$10 - y - y = 0$$

Det er nemt at se at $y = 5$ er løsning til denne ligning. Vi indsætter nu denne y -værdi i den første ligning. Altså vi indsætter $y = 5$ i ligningen $x + y = 10$. Det giver

$$x + 5 = 10$$

Denne ligning har løsning $x = 5$ og vi konkludere at ligningssystemet (de to ligninger tilsammen) har løsning

$$x = 5 \quad \text{og} \quad y = 5$$

Man bestemmer selv, hvilken en ligning man starter med, og hvilken en ubekendt man isolere. Det går godt, så længe man indsætter den isolerede variabel i den ligning, man ikke tog udgangspunkt i. Der er også valgfrihed i forhold til, hvilken en ligning man sætter ind i til sidst, når man altså har fundet en af de to variable.

Øvelse 1.4.7

Løs ligningssystemerne med metoden fra eksempel 1.4.10.

a) $2x + y = 8$ og $y + x = 2x + 2$

b) $4x + 2y = 6 + x$ og $2y + x = y + 3$

Det er ikke altid, at der er netop én løsning, når man har to ligninger med to ubekendte. Nogle gange har de uendelig mange løsninger, og nogle gange har de slet ikke nogle.

Ekstra om ligninger med brøker

Ligninger med brøker løses nemmest ved at gange igennem med et tal, der får brøkerne til at forsvinde.

Eksempel 1.4.11

Vi vil løse ligningen $\frac{2}{3}x + 4 = \frac{25}{6}$.

Vi vil gerne af med brøkerne og da 6 er fællesnævner for brøkerne, ganger vi med 6 på begge sider.

$$6 \cdot \frac{2}{3}x + 6 \cdot 4 = 6 \cdot \frac{25}{6}$$

Vi ganger ud:

$$4x + 24 = 25$$

Denne ligning skulle du gerne kunne løse uden problemer. Løsningen er

$$x = \frac{1}{4}$$

Øvelse 1.4.8

Løs ligningerne ved brug af metoden fra eksempel 1.4.11

a) $\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = x$

b) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}x - 1$

Man kan også komme ud for at den ubekendte står i nævneren. Her kan man igen benytte samme strategi med at gange igennem med et tal, som får brøkerne til at forsvinde.

Eksempel 1.4.12

Vi vil løse ligningen

$$\frac{2}{x+1} + 1 = \frac{4}{3}$$

Vi ganger igennem med $3(x+1)$, da det er fællesnævner for de to brøker i ligningen.

$$3(x+1)\frac{2}{x+1} + 3(x+1)1 = 3(x+1)\frac{4}{3}$$

Vi reducerer.

$$\cancel{3(x+1)}\frac{2}{\cancel{x+1}} + 3(x+1)1 = \cancel{3(x+1)}\frac{4}{\cancel{3}}$$

Vi får så:

$$3 \cdot 2 + 3(x+1) = (x+1) \cdot 4$$

Denne ligning kan nu løses på sædvanligvis og det giver:

$$x = 5$$

Øvelse 1.4.9

Løs ligningerne

a) $6 = \frac{3}{x}$

b) $\frac{1}{2x+3} = \frac{4}{6x+9} - \frac{1}{3}$

Ekstra om ligninger med numerisk værdi

Vi husker, at numerisk værdi betyder at man ”fjerne minuset hvis der er et”.

Eksempel 1.4.13

Vi vil løse ligningen $|x| = 8$. Vi skal altså finde et tal, sådan at man får 8, når man tager den numeriske værdi. Det er der to tal der opfylder, nemlig $x = 8$ og $x = -8$. Så ligningen har altså to løsninger. Man kan opskrive løsningerne på følgende måde

$$x = -8 \quad \vee \quad x = 8$$

Tegnet ” $\vee$ ” betyder ”eller”.

Eksempel 1.4.14

Vi vil løse ligningen $|x + 5| + 1 = 3$. Vi starter med at isolere den numeriske værdi:

$$|x + 5| = 2$$

Så $x + 5$ skal altså give 2 når vi fjerner et evt. minus. Det giver os to muligheder:

$$x + 5 = 2 \quad \vee \quad x + 5 = -2$$

Løser vi disse to ligninger får vi

$$x = -3 \quad \vee \quad x = -7$$

og dette er løsningerne til den oprindelige ligning.

Øvelse 1.4.10

Løs ligningerne

a) $|x| = 4$

b) $2 = |x - 3|$

c) $|2x + 4| = 3x$

d) $|x| = -3$

1.5 Uligheder

En ulighed er ligesom en ligning bortset fra at den indeholder et ulighedstegn i stedet for et lighedstegn

Der findes 4 ulighedstegn:

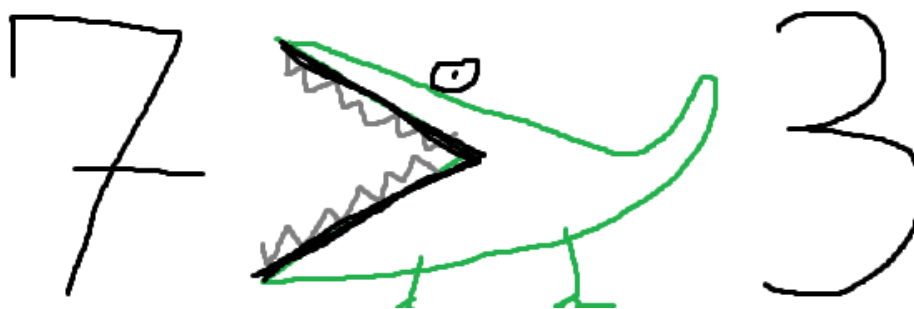
$<$: Betyder "mindre end".

$\leq$: Betyder "mindre end eller lig med".

$>$: Betyder "større end".

$\geq$: Betyder "større end eller lig med".

Mange elever glemmer betydningen af hvordan ulighedstegnet vender.. Når der står $>$, betyder det så større eller mindre end? Er man i tvivl om hvordan de skal vende, så kan man huske at krokodillen altid spiser det største tal:



Læg mærke til krokodillens mund som har form som tegnet $>$. Der står altså "7 er større end 3". Det er en sand ulighed, da 7 rent faktisk er større end 3.

Øvelse 1.5.1

Afgør hvilke af følgende uligheder som er sande:

- a) $2 > 5$
- b) $5 < 5$
- c) $11 \leq 12$
- d) $11 \leq 11$

Løsning af uligheder

At løse en ulighed er som at løse en ligning bortset fra en ting: **Når man ganger eller dividerer med et negativt tal, skal man vende ulighedstegnet!**

Eksempel 1.5.1

Vi vil løse uligheden $2x \leq 6$. Vi dividerer med 2 på begge sider af ulighedstegnet, og får

$$x \leq 3$$

Altså har uligheden løsningen $x \leq 3$.

Øvelse 1.5.2

Løs ulighederne:

- a) $2x \geq 6$
- b) $2 + x < -1$
- c) $x + 2 > 14$

Eksempel 1.5.2

Vi vil løse uligheden $2x + 4 < 6x + 2(x - 4)$.

$2x + 4 < 6x + 2(x - 4)$	(Skriver uligheden op)
$2x + 4 < 6x + 2x - 8$	(Ganger parentes ud)
$2x + 4 < 8x - 8$	(Reducerer højresiden)
$2x + 4 - 8x < -8$	(Trækker $8x$ fra på begge sider)
$-6x + 4 < -8$	(Reducerer venstresiden)
$-6x < -8 - 4$	(Trækker 4 fra på begge sider)
$-6x < -12$	(Reducerer højresiden)
$x > 2$	(Deler med -6 fra på begge sider)

Læg mærke til hvordan vi har vendt ulighedstegnet til sidst, hvor vi dividerer med -6 .

Øvelse 1.5.3

Løs ulighederne:

- a) $-x \geq 7$
- b) $2 - x < 8$
- c) $(x - 2) \cdot 3 \leq 5(x + 1)$
- d) $2(2 + x) - (x - 1) < 8$
- e) $0 \geq 5x + 10 - (x + 1)$
- f) $-(x + 3) \cdot 2 > (5 + 1) \cdot x$

Øvelse 1.5.4

Uligheder med brøker løses på tilsvarende måde, som man løser ligninger med brøker. Hvis du ikke har læst ekstraafsnittet med brøker, så spring denne øvelse over.

Løs ulighederne:

a) $3 \geq \frac{x}{-5}$

b) $\frac{6}{x} < 2$. Forudsæt at x er positiv.

c) $\frac{6}{x} < 2$. Forudsæt at x er negativ (svær)

Dobbeltuligheder (A)

En dobbeltulighed er en ulighed med to ulighedstegn. Den kunne f.eks. se således ud:

$$3 < 2x + 1 < 9$$

Tænker man lidt over det, så er det klart, at sådan en dobbeltulighed bare er en kompakt måde at skrive to uligheder, nemlig:

$$3 < 2x + 1 \quad \text{og} \quad 2x + 1 < 9$$

De to uligheder kan vi løse på sædvanlig vis (gør det!), og det giver:

$$x > 1 \quad \text{og} \quad x < 4$$

Så x skal altså være større end 1, men mindre end 4. Dvs. x skal ligge imellem 1 og 4. Det kan vi også skrive som:

$$1 < x < 4$$

og dette er så løsningen til dobbeltuligheden.

Øvelse 1.5.5

Løs ulighederne. De to sidste er måske lidt svære, hvis du ikke har regnet øvelsen om uligheder med brøker.

a) $1 < x - 1 < 5$

b) $x + 1 \leq 2x < x + 2$

c) $-1,5 \leq -\frac{a}{400} \leq -0,25$

d) $-1,5 \leq -\frac{300}{b} \leq -0,25$ (forudsæt at $b > 0$).

Ekstra: Løsningsmængde og grundmængde

Ligesom ligninger har løsningsmængde og grundmængde har uligheder det også. Det fungerer helt tilsvarende.

Eksempel 1.5.3

Vi bestemmer løsningsmængden for uligheden $2x + 1 < 3$. Det ses nemt at løsningen er

$$x < 1$$

De x -værdier som opfylder denne ulighed, vil ligge i intervallet:

$$]-\infty; 1[$$

Løsningsmængden L er dermed

$$L =]-\infty; 1[$$

Øvelse 1.5.6

Opskriv løsningsmængden for ulighederne i øvelse 1.5.5.

a) $1 < x - 1 < 5$

b) $x + 1 \leq 2x < x + 2$

c) $-1,5 \leq -\frac{a}{400} \leq -0,25$

d) $-1,5 \leq -\frac{300}{b} \leq -0,25$ (forudsæt at $b > 0$).

1.6 Kvadratsætninger

Dette afsnit kan springes over, indtil du får brug for det.

Sætning 1.6.1

(Kvadratsætninger)

Lad a og b være to reelle tal. Da gælder

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad (2)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (3)$$

Sætningerne hedder kvadratsætninger, fordi "noget i anden" kaldes et kvadrat. Skriver vi x^2 , kan det læses som "kvadratet på x "

Eksempel 1.6.1

Vi vil regne $(x + 3)^2$. Vi bruger regel (1):

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= x^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot 3 \\ &= x^2 + 9 + 6x\end{aligned}$$

Øvelse 1.6.1

Regn følgende vha. kvadratsætningerne

- a) $(x + 4)^2$
- b) $(z - 1)^2$
- c) $(p + q)(p - q)$

Vi kan bruge kvadratsætningerne den anden vej også.

Eksempel 1.6.2

Vi vil omskrive $x^2 + 16 - 8x$ til et kvadrat (noget i anden). Vi ser først, at $x^2 + 16 - 8x$ har form som $a^2 + b^2 - 2ab$, hvor $a = x$ og $b = 4$.

Ifølge kvadratsætning (2) er:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

Da vi har $a = x$ og $b = 4$ giver dette:

$$x^2 + 16 - 8x = (x - 4)^2$$

Øvelse 1.6.2

Omskriv til kvadrat

- a) $x^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x$
- b) $x^2 + 1 + 2x$
- c) $F^2 + 2bF + b^2$

1.7 Potensregneregler

Dette afsnit kan springes over, indtil du får brug for det.

Potensregneregler er små regneregler, omhandlende potenser, som man får brug for en gang imellem. Der er mange af dem, og vi bruger dem ikke hele tiden, så derfor kan de være svære at huske. Jeg anbefaler at man lærer dem udenad og træner dem med jævne mellemrum, da det er en fordel at kunne huske dem.

Sætning 1.7.1

(Potensregneregler)

Lad a og b være to reelle tal, som ikke er nul og p og q hele tal. Da gælder:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (4)$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (5)$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} \quad (6)$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \quad (7)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad (8)$$

$$a^0 = 1 \quad (9)$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad (10)$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad (11)$$

$$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a} \quad (12)$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (13)$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (14)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (15)$$

Reglerne er nummereret så de matcher formelsamlingen.

Eksempel 1.7.1

Vi vil bestemme $\frac{5^{30}}{5^{28}}$ uden bruge af lommeregner.

Vi bruger regel (5):

$$\frac{5^{30}}{5^{28}} = 5^{30-28} = 5^2 = 25$$

Øvelse 1.7.1

Regn uden lommeregner (ved hjælp af potensregneregler):

- a) $\frac{2^9}{2^7}$
- b) 13^0
- c) 4^1
- d) 10^{-2}
- e) $\frac{28^3}{14^3}$
- f) $\frac{3^5 \cdot 3^9}{3^{12}}$
- g) $9^{\frac{1}{2}}$
- h) $\sqrt{16 \cdot 25}$

1.8 GeoGebra

Dette afsnit kan springes over, indtil du får brug for det.

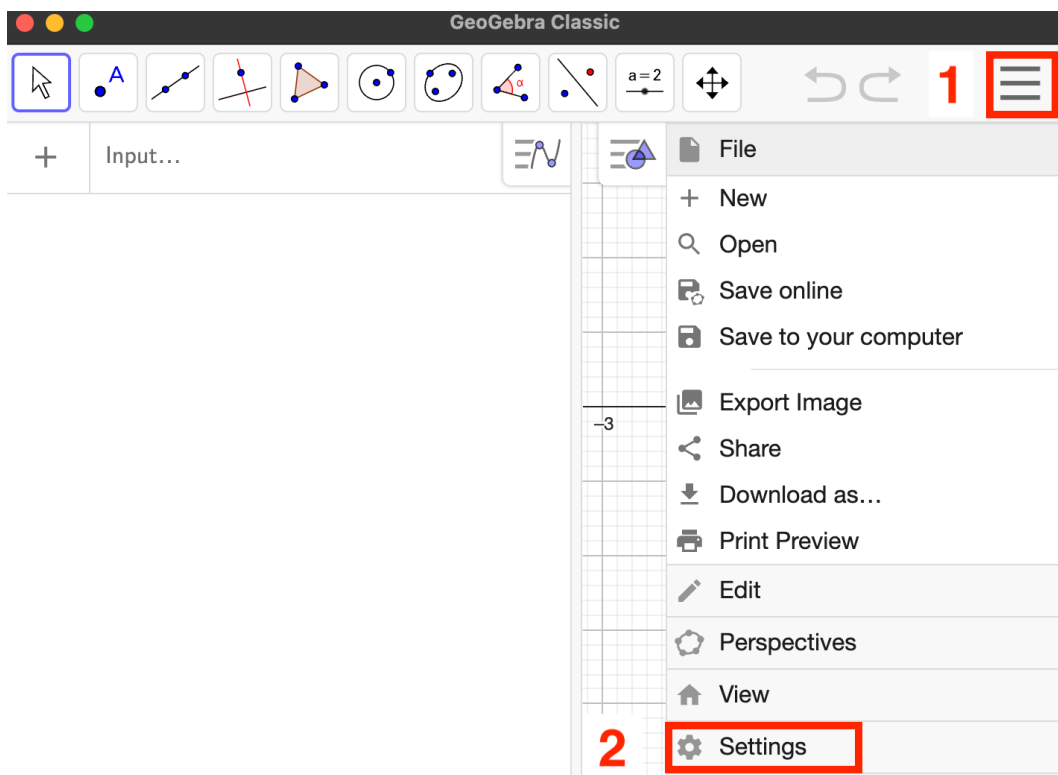
GeoGebra er et gratis matematikprogram, der kan stort set alt, hvad vi har brug for på HHX. Generelt lærer man mere af at regne opgaver med papir og blyant end at regne dem i GeoGebra, så derfor vil vi primært regne opgaver i hånden.

Man kan bruge GeoGebra online, **men det forbudt**. Du skal i stedet downloade det på din computer. Vi får brug for den version der hedder "Classic 6" og den kan hentes her:

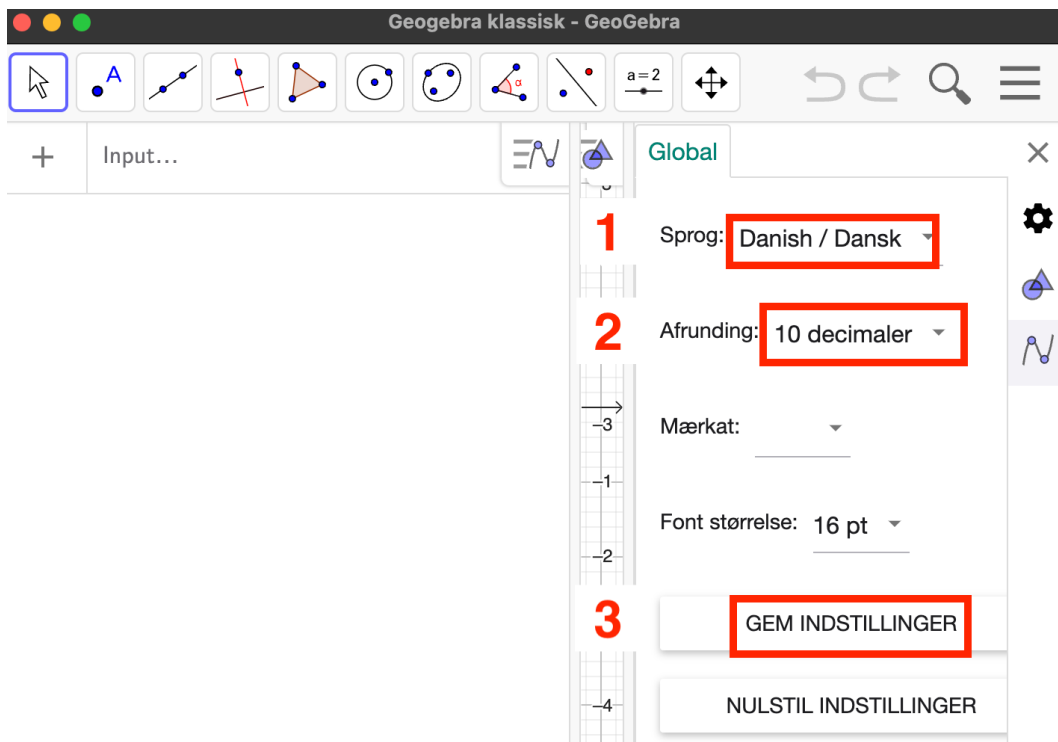
Mac: <https://itunes.apple.com/us/app/geogebra-math-apps/id1182481622>

Windows: <https://download.geogebra.org/package/win-autoupdate>

Når du har downloadet GeoGebra skal du konfigurere det. Klik på hamburger-ikonet og klik "Settings":



Vælg "Danish/Dansk" som sprog, 10 decimaler som afrunding og gem indstillingerne:



Øvelse 1.8.1

I denne øvelse skal du installere og konfigurere GeoGebra

- Download GeoGebra.
- Vælg sprog og afrunding.
- Gem indstillingerne.

Vi vil introducere de forskellige dele af GeoGebra i takt med, at vi får brug for dem.

Brug af GeoGebra som lommeregner

Man kan bruge GeoGebra som en almindelig lommeregner, man skal bare huske at **kommatal skrives med punktum** i stedet for komma.

Sådan skriver man de forskellige operationer ind i GeoGebra:

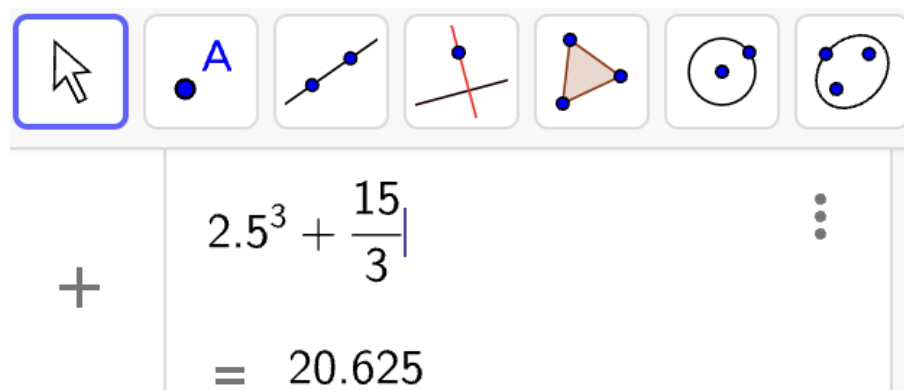
Plus	Minus	Gange	Dividere	Opløfte	Komma
+	-	*	/	^	.

Eksempel 1.8.1

Vi vil regne $2,5^3 + \frac{15}{3}$ i GeoGebra. Vi taster:

$2.5^3+15/3$

og får:



Vi ser det giver 20,625

Øvelse 1.8.2

Regn i GeoGebra

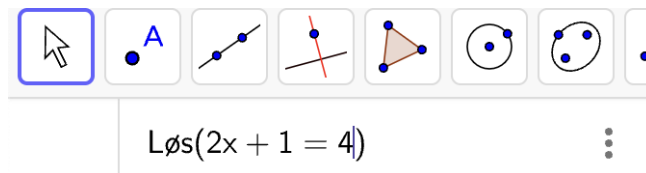
a) $\frac{23^2 + 12^3}{4,7}$

Løsning af ligninger og uligheder

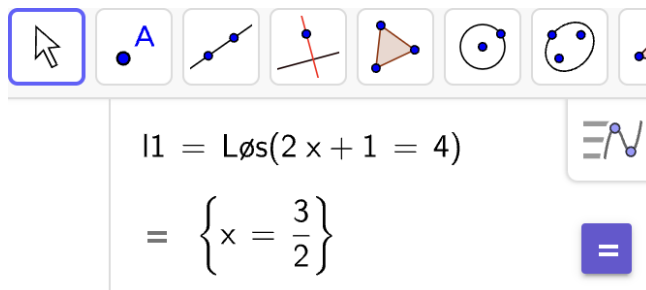
Det er nemt at løse ligninger og uligheder i GeoGebra. Man bruger kommandoen **Løs**.

Eksempel 1.8.2

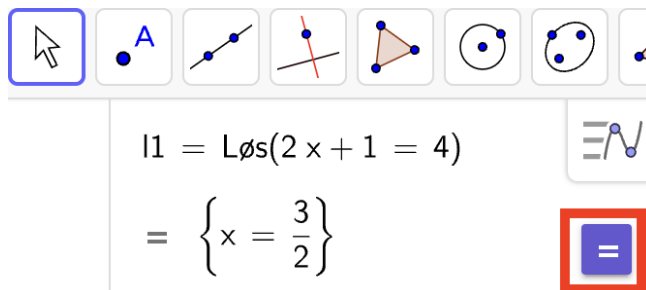
Vi vil løse ligningen $2x + 1 = 4$ Vi skriver:



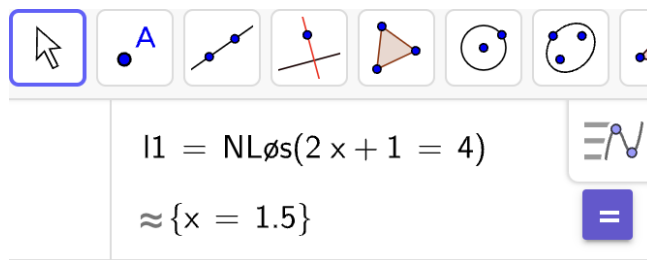
Det giver:



Vi kan få løsningen som kommatal (efter vi har bestemt den eksakt) ved at trykke på "≈":



Vi får så



Altså er $x = 1,5$ løsning til ligningen.

Øvelse 1.8.3

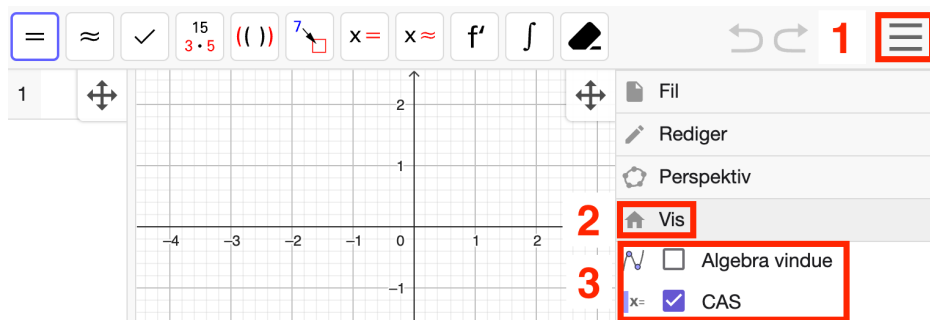
Løs følgende ligninger og uligheder i GeoGebra

a) $x^2 - 3x = 7$

b) $7(x - 4) < 3x + 1$

GeoGebra CAS

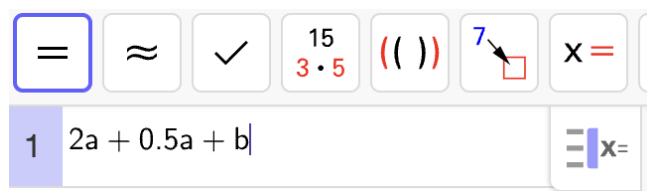
Vil man lave mere avanceret bogstavregning, skal man åbne et særligt vindue kaldet *CAS*. Man åbner CAS sådan her:



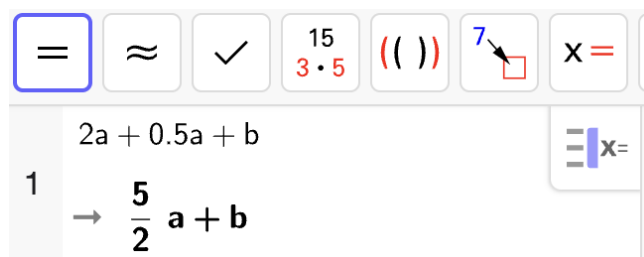
Vi kan bruge CAS til at reducere.

Eksempel 1.8.3

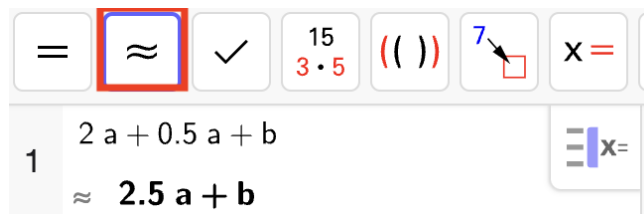
Vi vil reducere $2a + 0,5a + b$. Vi skriver det ind i CAS:



Det giver



Hvis vi ikke vil have brøker kan vi trykke "≈". Husk altid at trykke på den knap når GeoGebra viser et stort og mærkeligt facit.



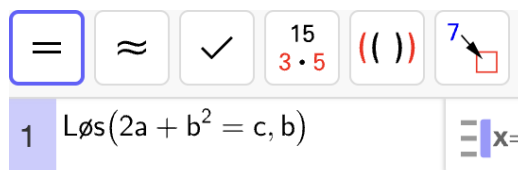
Vi konkluderer at

$$2a + 0,5a + b = 2,5a + b$$

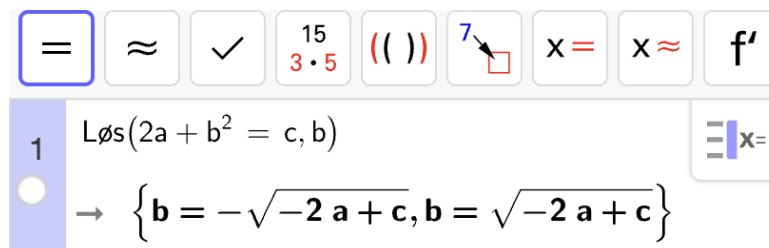
Man kan også bruge GeoGebra til at isolere en størrelse i en ligning.

Eksempel 1.8.4

Vi vil isolere b i udtrykket $2a + b^2 = c$. Vi åbner CAS og skriver:



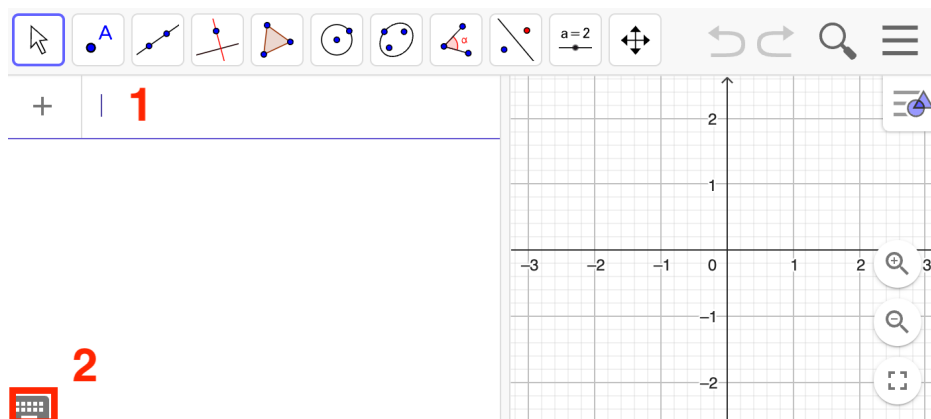
Læg mærke til at vi har skrevet ",b" efter $2a + b^2 = c$. Det betyder at det er b vi gerne vil finde. Det giver:



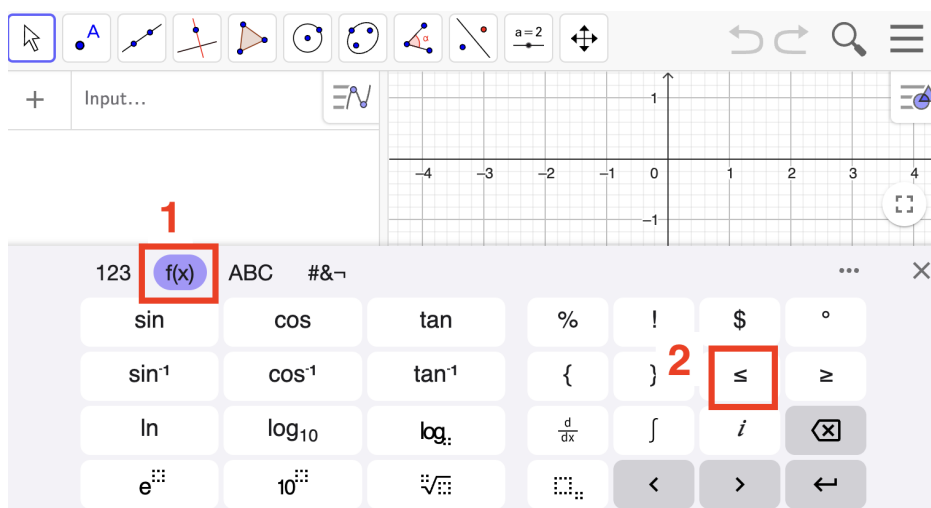
Vi ser at der er 2 muligheder for b : $b = \sqrt{-2a + c}$ og $b = -\sqrt{-2a + c}$

Specialtegn i GeoGebra

Står man og mangler et symbol, kan man finde det i GeoGebra-tastaturet. Er tastaturet ikke fremme kan du få det frem ved at klikke på et inputfelt, hvorefter du kan klikke nede i hjørnet:



Skal vi f.eks. løse uligheden $5x \leq 7x - 1$, får vi brug for symbolet " $\leq$ ". Det kan vi finde i GeoGebra tastaturet:



Øvelse 1.8.4

Find følgende symboler i GeoGebra.

- a) $\geq$
- b) $\sqrt{\quad}$
- c) ∞
- d) Tallet e som vi skal lære mere om senere. Find det og tryk på det. Hvilken værdi har tallet?

På Mac er der genveje for mange symboler. **Du skal bruge højre option-knap.**

$\leq$	$\geq$	$\sqrt{\quad}$	∞
OPTION + <	OPTION + SHIFT + >	OPTION + v	OPTION + 5

1.9 Andre værktøjer

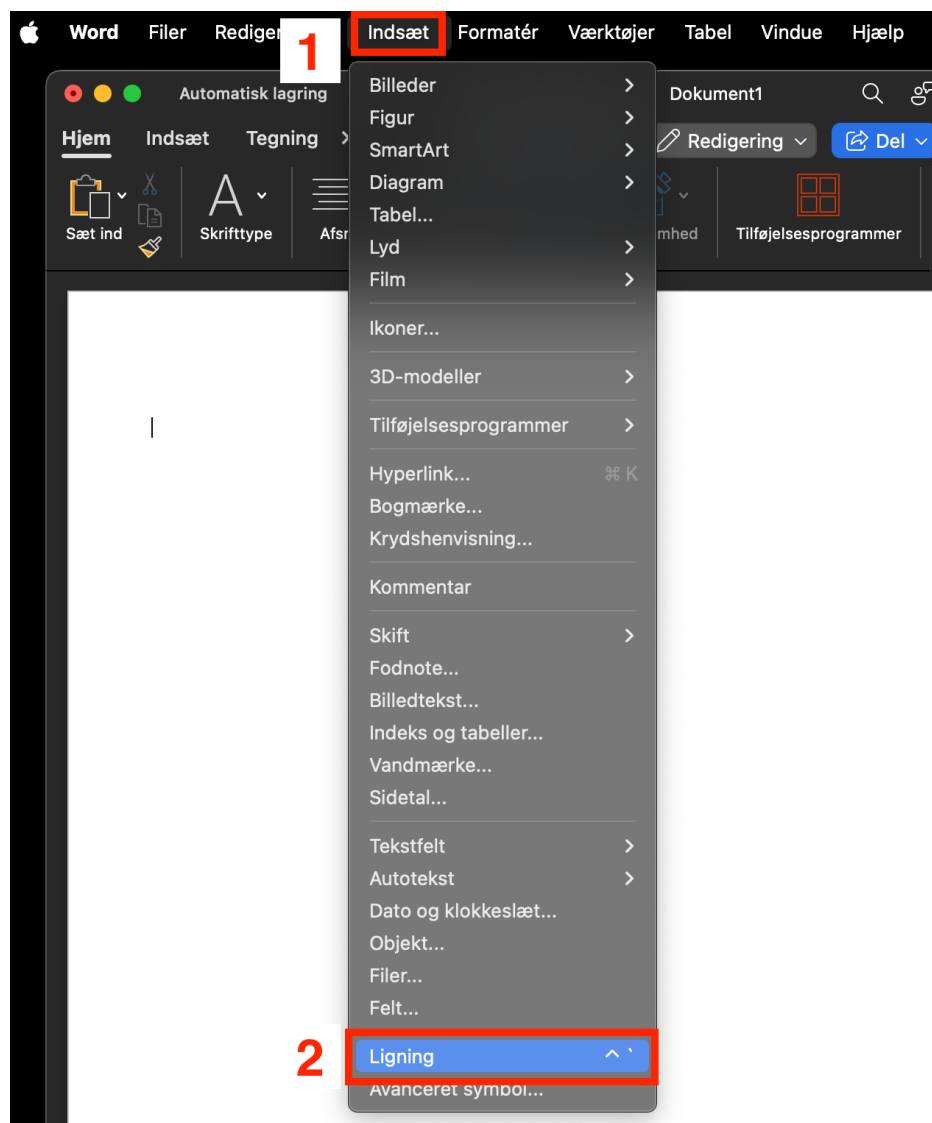
Dette afsnit kan springes over, indtil du får brug for det.

Lommeregner

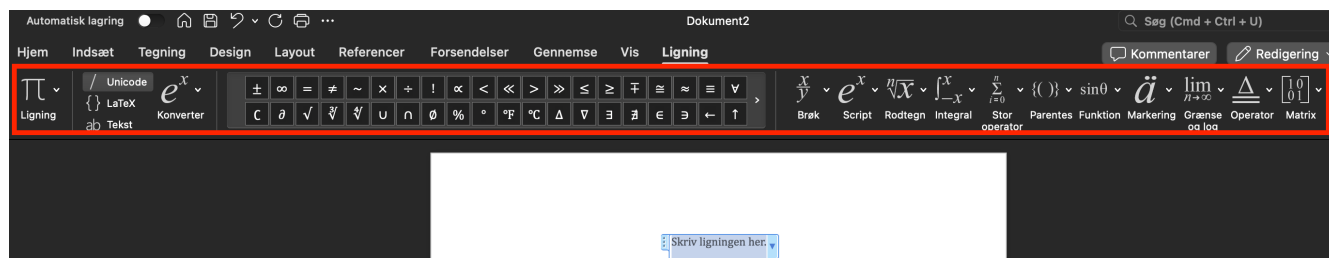
Jeg anbefaler en lommeregner. Standardvalget vil være en Texas Instruments TI-30-model (der er lige meget, hvilken en af dem, det er). Man kan klare sig uden, men det vil gøre nogle ting nemmere. Bruger man en TI-30, er der dog nogle ting, man skal være opmærksom på. F.eks. har TI-30 to slags minus'er. Har du styr på, hvornår man bruger det ene, og hvornår man bruger det anden?

Word

I kommer til at lave nogle af jeres afleveringer i Word. Når man skriver matematik i Word, er det vigtigt, at man altid bruger "Indsæt ligning":



På Mac kan man også trykke "control" + "+" (altså control og plus-symbolet samtidig) for at få en ligning. Når man har gjort det, kommer denne her frem (efter vi har maksimeret vinduet):



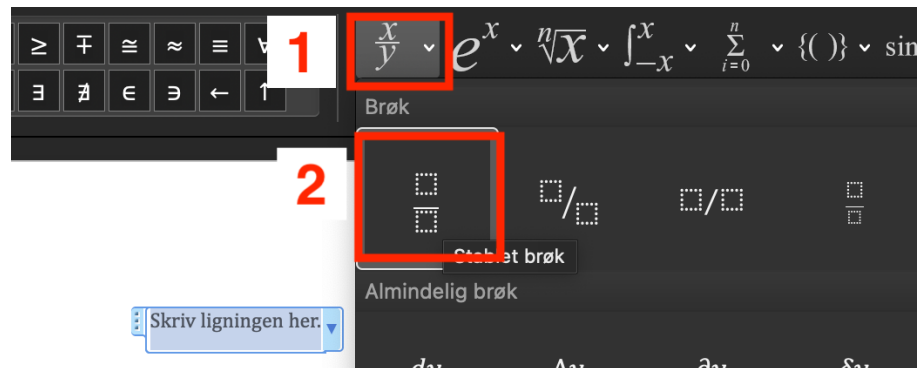
Her kan du vælge forskellige symboler

Eksempel 1.9.1

Vi vil skrive udtrykket $x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$ ind i Word.

Først skriver vi $x_1 =$ og den laver selv $x_1 =$ om til $x_1 =$ (ellers tryk space lige efter du har skrevet x_1).

Nu skal vi have en brøk, så vi trykker:



Vi kan nu skrive resten ind. Kvadratroden findes på tilsvarende måde som brøken. Her er resultatet:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

Beautiful!

Øvelse 1.9.1

Skriv følgende udtryk ind i Word

$$a) f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Øvelse 1.9.2

Lad os sige at en elev skriver følgende i en aflevering.

Jeg skal løse ligningen $2x+1=0$ for at...

a) Hvad er det galt med dette?

Det er særligt slemt når der optræder $*$ og $/$ i afleveringer fra elever. Det **skal** være det rigtige gangetegn, og division skal være med en rigtig brøk. Så husk **Brug altid "Indsæt ligning", når du skriver matematik i Word.**

Matematik i Excel

Vi får brug for Excel også. Det vil blive forklaret hvordan, når vi når så langt, men det er vigtigt du har Excel installeret (og ja... det **skal** være Excel og ikke et alternativ)

Kapitel 2

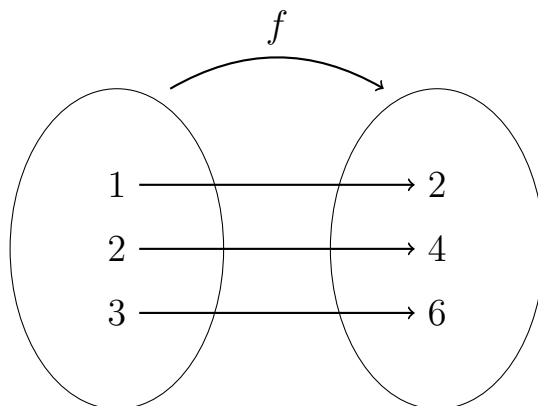
Funktioner

Funktioner er centrale i matematikundervisningen på HHX. De bruges, når man gerne vil beskrive sammenhængen mellem to størrelser. Det kunne f.eks. være sammenhæng mellem salg og indtjening (det som I senere lærer som afsætning og dækningsbidrag) for en virksomhed, eller hvordan en pris har udviklet sig over en årrække.

I dette kapitel skal vi kigge på flere begreber, som knytter sig til funktioner. Praktiske eksempler kommer i de senere kapitler.

2.1 Introduktion til funktioner

En funktion er sammenknytning af to mængder. Det skal forstås på den måde, at til hvert element i den første mængde knyttes netop ét element i den anden mængde. Det er nemmest at forstå med et eksempel:



Diagrammet ovenover viser en funktion, som til hvert tal knytter det dobbelte tal. Til 1 knyttes 2, til 2 knyttes 4 osv. Vi kalder tallene i den første mængde for x 'er

(dvs. 1, 2, 3 osv.) og tallene i den anden mængde er y 'er (2, 4, 6 osv.). Vi kalder også y 'erne for funktionsværdier. Funktionens navn er f .

Øvelse 2.1.1

I denne øvelse tages udgangspunkt i den konkrete funktion, som er beskrevet ovenover.

- a) Hvilket tal knytter f til tallet 5?
- b) Hvis $x = 4$, hvad er så y ?
- c) Hvad er funktionsværdien når $x = -3$?
- d) Hvis $y = 20$, hvad var så x ?

Forskrift

Vi beskriver ofte funktioner vha. en *forskrift*. Tager vi den før omtalte funktion, kan vi beskrive den med forskriften $f(x) = 2x$. Her er f funktions navn, og $2x$ betyder, at vi skal gange hvert x med 2 for at få den tilhørende funktionsværdi (dvs. y -værdien).

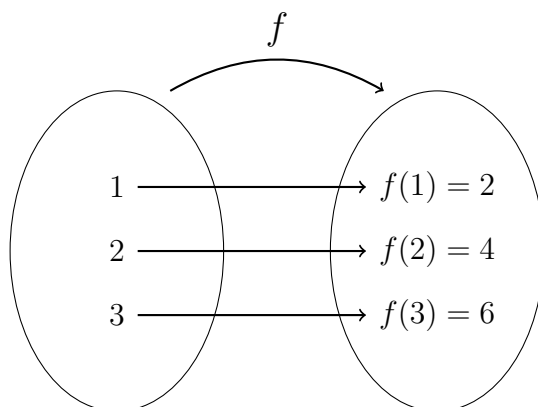
Eksempel 2.1.1

Vi regner funktionsværdien hørende til $x = 15$:

$$f(15) = 2 \cdot 15 = 30$$

Funktionsværdien hørende til $x = 15$ er altså 30.

Læg mærke til, at der står $f(15) = 30$ i stedet for $y = 30$. Det er smart, da man så kan se, at man har fat i den funktionsværdi, der hører til 15. Udtrykket $f(x)$ læses "f af x" og $f(30)$ læses "f af 30".



Øvelse 2.1.2

Vi bliver ved den samme funktion $f(x) = 2x$.

- a) Bestem $f(-7)$ og $f(9)$.
- b) Læs højt " $f(x)$ og $f(3)$ "

Når vi skal opskrive en funktion, vil vi normalt ikke lave et diagram, vi vil nøjes med angive forskriften.

Eksempel 2.1.2

Lad $f(x) = 3x + 1$. Vi regner funktionsværdien $f(7)$ ved at sætte 7 ind i stedet for x i forskriften:

$$f(7) = 3 \cdot 7 + 1 = 22$$

Så $f(7) = 22$.

Nogle gange hedder funktionen ikke f . Den kunne også hedde g , eller h . Kun fantasien sætter grænser her.

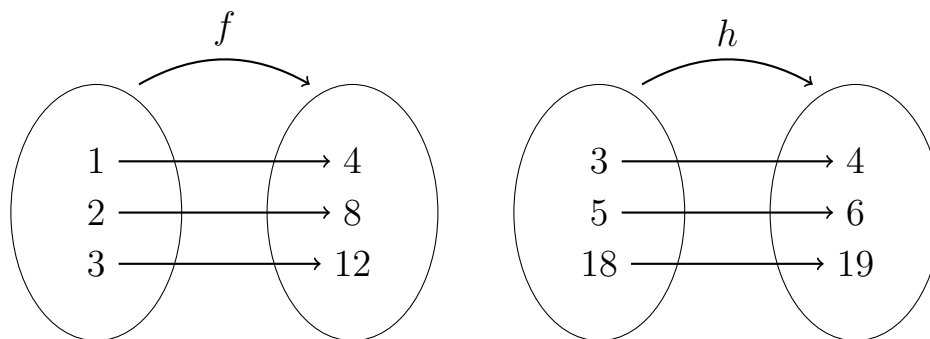
Øvelse 2.1.3

Betragt funktion $g(x) = 2x - 1$.

- a) Bestem funktionsværdien, der hører til x -værdien 3.
- b) Regn $g(6)$, $g(0)$ og $g(-1)$.
- c) Ved at prøve dig frem, skal du finde den x -værdi, som giver funktionsværdien 7.

Øvelse 2.1.4

Betragt diagrammerne:



- Bestem en forskrift, som passer med diagrammet for funktionen f .
- Bestem en forskrift, som passer med diagrammet for funktionen h .

Når vi har en funktion, kalder vi x for den uafhængige variabel, fordi vi selv kan bestemme, hvilken x -værdi vi putter ind i funktionen. Vi kalder y for den afhængige variabel, da den jo afhænger af den x -værdi, vi putter ind i funktionen.

Konstante funktioner

En konstant funktion er en funktion som f.eks. $f(x) = -53$. Mange bliver forvirrede, når de møder konstante funktioner første gang — for hvordan skal man regne funktionsværdierne, når der ikke er noget x i forskriften? Det er dog meget nemt:

Eksempel 2.1.3

Lad $f(x) = -53$. Vi bestemmer funktionsværdien $f(6)$ ved at sætte 6 ind på x 'ets plads. Det bliver vi dog hurtigt færdig med, da der slet ikke er noget x i forskriften. Så $f(6) = -53$

Øvelse 2.1.5

Bestem funktionsværdierne

- $f(3)$ og $f(-5)$, når $f(x) = 4$
- $g(-2)$ når $g(x) = -2x^3$

Beregning af x ud fra y

Har man en forskrift $f(x)$, og en funktionsværdi y , kan man finde x -værdien ved at sætte y ind i stedet for $f(x)$ i forskriften.

Eksempel 2.1.4

Lad $f(x) = 4x - 1$. Vi vil gerne finde den x -værdi, som hører til funktionsværdien 7. Vi sætter 7 ind i stedet for " $f(x)$ " og løser ligningen:

$$f(x) = 4x - 1$$

$$7 = 4x - 1$$

$$8 = 4x$$

$$x = 2$$

At sætte 7 ind i stedet for $f(x)$, som vi gjorde i eksemplet, kaldes også at løse ligningen $f(x) = 7$.

Øvelse 2.1.6

Lad $f(x) = -3x + 1$.

- a) Bestem x , så funktionsværdien y er 10.
- b) Løs ligning $f(x) = 0$.

Øvelse 2.1.7 (Svær)

Lad $f(x) = x^2$.

- a) Løs ligningen $f(x) = 9$

2.2 Grafer

Indtil videre har vi illustreret funktioner med mængdeboller som f.eks.:

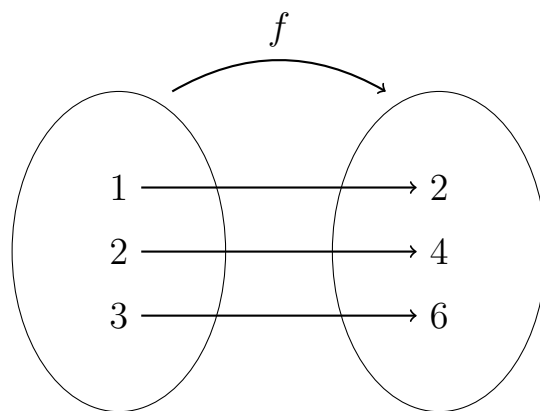


Diagram der viser funktionen $f(x) = 2x$

Fremover vil vi ikke illustrere funktioner med mængdeboller. I stedet vil vi tegne deres grafer. Man tegner en graf ved først at lave et *sildeben*. Vi konstruerer sildebenet ved at vælge nogle x -værdier og derefter udregne de tilhørende funktionsværdier. Det hele stilles op i en tabel.

Eksempel 2.2.1

Vi konstruerer et sildeben for funktionen $f(x) = 2x$. Vi vælger x -værdierne til at gå fra -4 til 4. Vores sildeben kommer så til at se således ud:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

Den nederste række er bestemt ved at regne:

$$f(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$$

$$f(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$$

$\vdots$

Øvelse 2.2.1

Nedenunder ses et sildeben for funktionen $f(x) = 2x^2 - 10$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	-2		-10			8

a) Regn de tomme felter.

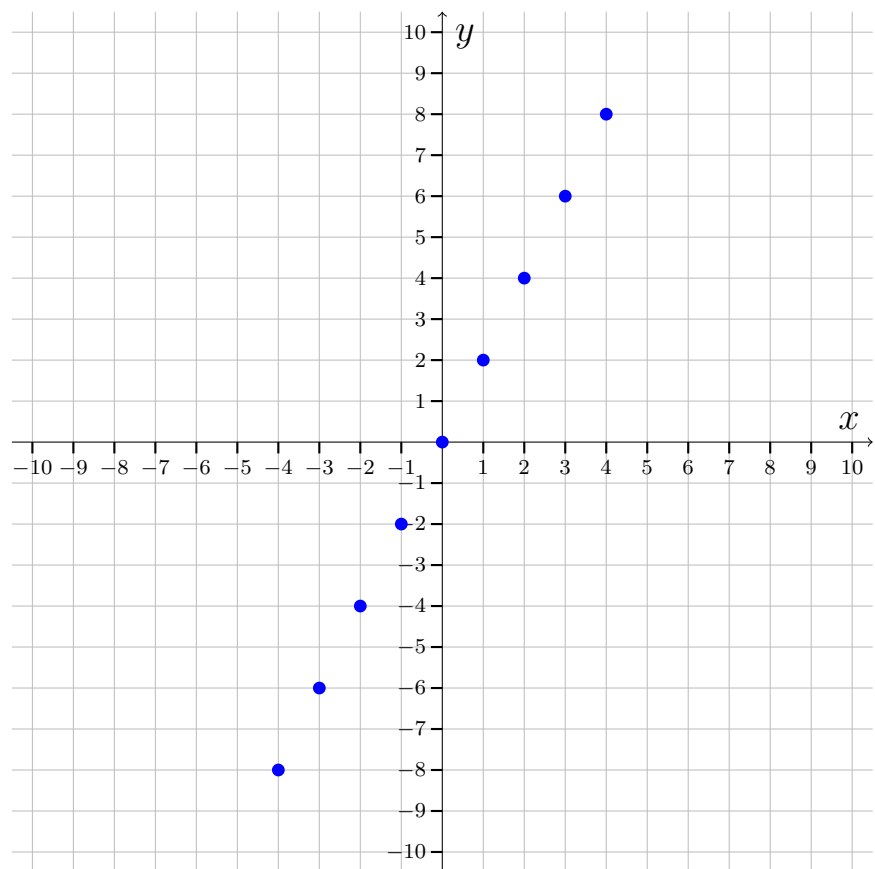
Har man et sildeben, kan man tegne en graf. Hver kolonne i sildebenet bliver til et punkt i et koordinatsystem. Man afsætter x -værdien ud af x -aksen og $f(x)$ -værdien ud af y -aksen (vi husker at $f(x) = y$). Punkterne man tegner kaldes *støttepunkter*.

Eksempel 2.2.2

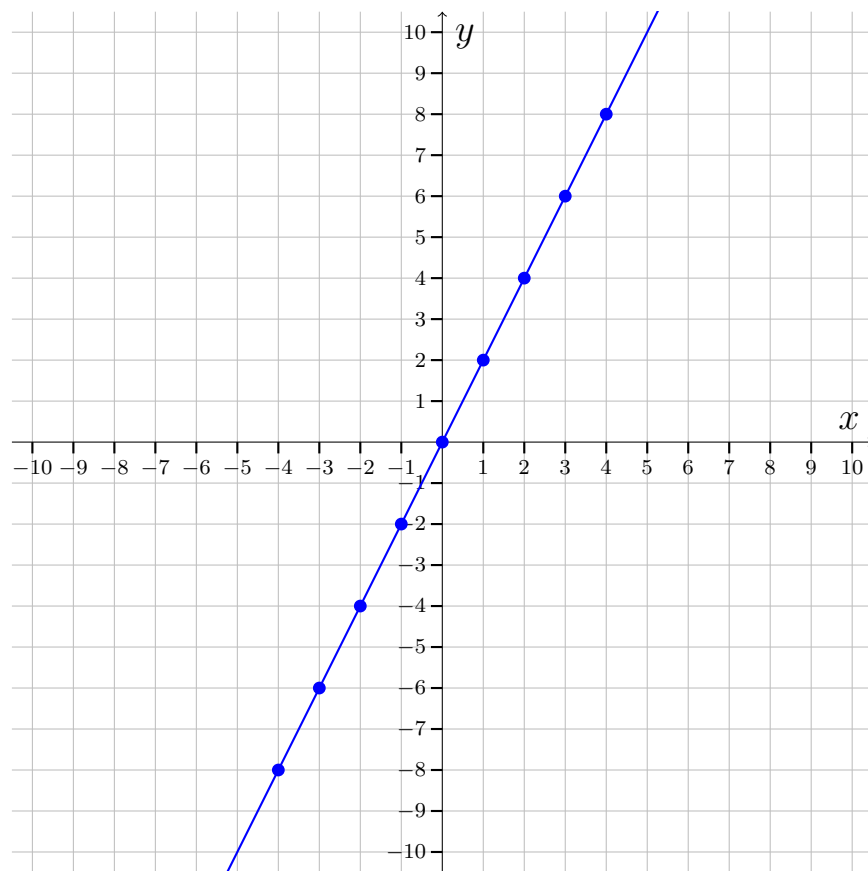
I øvelse 2.2.1 lavede vi et sildeben for funktionen $f(x) = 2x$. Det så således ud:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

Vi tegner grafen for f ved at afsætte punkterne fra sildebenet i et koordinatsystem. Første punkt bliver $(-4, -8)$, fordi $x = -4$ og $y = f(-4) = -8$. Tegner vi alle punkterne fra sildebenet får vi:



Derefter forbinder vi punkterne med en kurve:



Vi kan se, at grafen er linje. Funktioner, der har linjer som grafer, kaldes lineære funktioner, og der findes nemmere metoder til at tegne dem. Mere om det i næste kapitel.

Øvelse 2.2.2

Betragt sildebenet for funktionen g :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-9	1	7	9	7	1	-9

a) Tegn grafen for g

Læg mærke til at grafen i ovenstående øvelse er rund i toppen. Den er **IKKE** spids. Det er en almindelig fejl at tegne bløde kurver spidse.

Øvelse 2.2.3

Lad $f(x) = x^3 + 3x^2$.

a) Tegn grafen for f .

Øvelse 2.2.4

Lad $f(x) = -3$.

a) Tegn grafen for f ,

Øvelse 2.2.5

Lad $f(x) = -x + 4$.

a) Ligger punktet $(30, -25)$ på grafen for f ?

Øvelse 2.2.6 (Svær)

Lad $r(x) = \frac{1}{x}$.

a) Tegn grafen for funktionen r .

VINK: Du får brug for mange støttepunkter med x -værdier tæt på nul (f.eks. $x = -0,5$, $x = 0,5$).

Skæring mellem grafer

Har man to funktioner f og g , finder man skæringspunkter ved at sætte $f(x) = g(x)$ og løse ligningen.

Eksempel 2.2.3

Vi vil gerne finde skæringspunktet mellem $f(x) = -2x + 2$ og $g(x) = 2x$. Vi løser ligningen:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\-2x + 2 &= 2x \\-4x &= -2 \\x &= \frac{-2}{-4} \\x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Så x -koordinaten til skæringspunktet er $\frac{1}{2}$. Vi finder y -koordinaten ved at sætte

x -værdien ind i forskriften for f eller g . Vi vælger g da den er simplest:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Altså skærer f og g hinanden i punktet $(\frac{1}{2}, 1)$.

Øvelse 2.2.7

Beregn evt. skæringspunkter mellem funktionerne

a) $f(x) = 2x + 1$ og $g(x) = -x + 4$

b) $f(x) = 2x$ og $g(x) = 2x + 2$

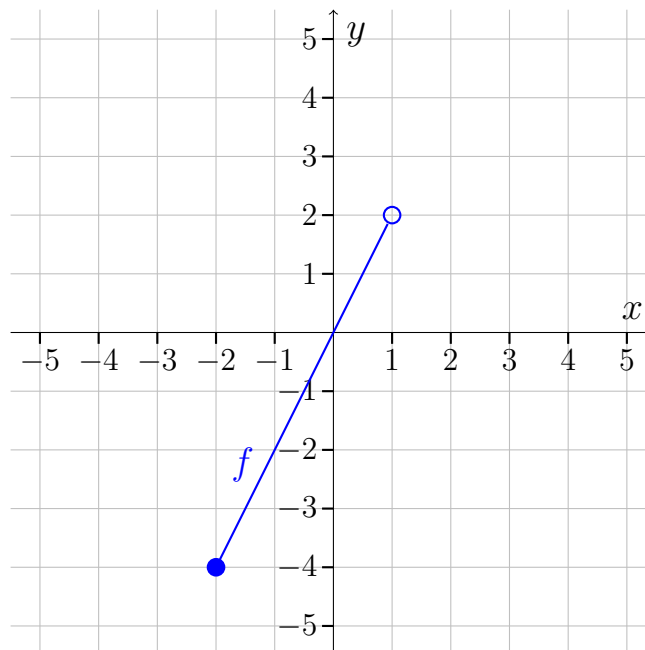
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = x$ (svær)

Begrænsede funktioner og deres grafer

Der kan optræde begrænsninger på funktioner. Betragt funktionen

$$f(x) = 2x \quad , \quad -2 \leq x < 1$$

Denne funktion er magen til funktionen $f(x) = 2x$, bortset x skal ligge i intervallet $[-2; 1[$. Tegner vi grafen ser den således ud:



Her har vi begrænset grafen, så alle x -værdierne ligger i intervallet $[-2; 1[$. Da $x = -2$ ligger i intervallet er punktet $(-2, -4)$ en del af grafen, hvilket vi markerer med

en "udfyldte" bolle i $(-2, -4)$. Da $x = 1$ ikke ligger i intervallet har vi markeret punktet $(1, 2)$ med en "hul" bolle. Intervallet $[-2; 1[$ kaldes *definitionsområdet* for f , og den skal du lære mere om i næste afsnit.

Øvelse 2.2.8

Lad

$$f(x) = \frac{8}{x} \quad , \quad 2 < x \leq 8$$

og

$$g(x) = 3 \quad , \quad x > 4$$

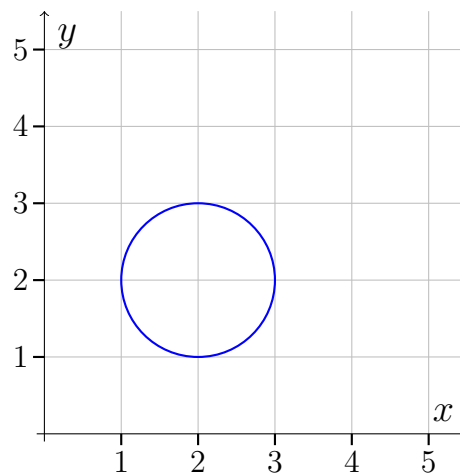
a) Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem

Funktioner har kun én y -værdi til hver x -værdi

Funktioner har kun én y -værdi til hver x -værdi, og dette har betydning for, hvordan grafer kan se ud.

Eksempel 2.2.4

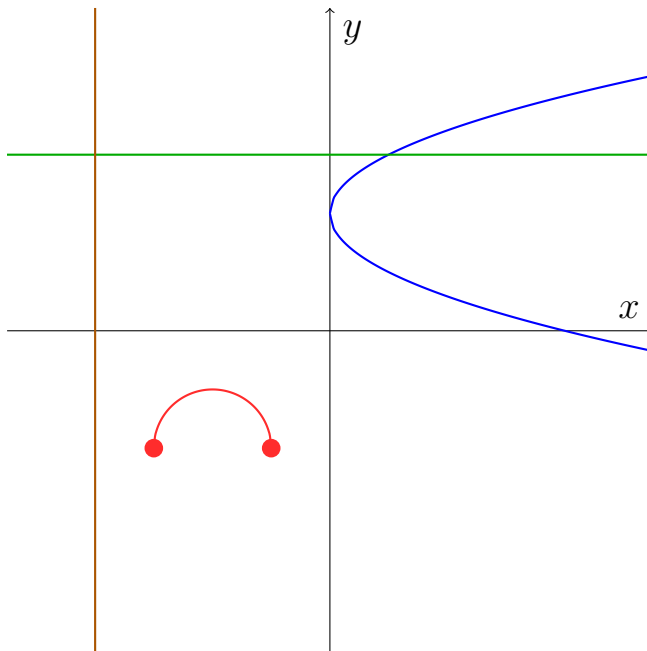
Betragt cirklen:



Vi ser, at cirklen går igennem både $(2, 1)$ og $(2, 3)$. Så hvis cirklen var graf for en funktion skulle $f(2)$ både være 1 og 3 på en gang. Måske kunne man aftale, at $f(2) = 1$ i hverdagen og $f(2) = 3$ i weekenden og på den måde gøre alle glade? Nej i matematik kan noget ikke have to forskellige værdier på en gang, så derfor kan cirklen ikke være graf for en funktion.

Øvelse 2.2.9

Betragt kurverne:



- a) Kan brun kurve være graf for en funktion?
- b) Kan grøn kurve være graf for en funktion?
- c) Kan rød kurve være graf for en funktion?
- d) Kan blå kurve være graf for en funktion?

2.3 Definitions- og værdimængde

Vi skal nu lære nogle nye begreber, I sikkert ikke har set før. Når man indføre nye begreber mere formelt, skriver man dem som en "Definition". En definition er altså med måde at fastlægge betydningen af et eller flere begreber.

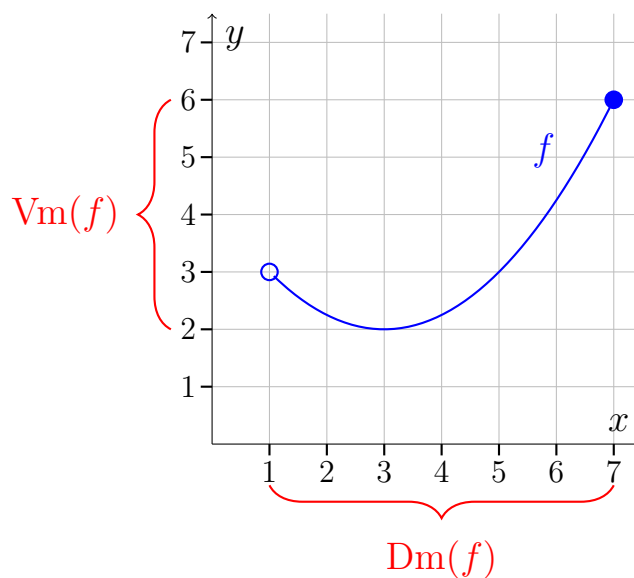
Definition 2.3.1

Lad f være en funktion.

Definitionsmængden for f er mængden af mulige x 'er og betegnes $\text{Dm}(f)$.

Værdimængden for f er mængden af mulige y 'er og betegnes $\text{Vm}(f)$.

Lad os tage et konkret eksempel. Betragt grafen for en funktion f :



Vi husker, at en "hul" bolle betyder, at punktet ikke ligger på grafen, mens en "udfyldt" bolle betyder, at punktet ligger på grafen, så i dette eksempel er

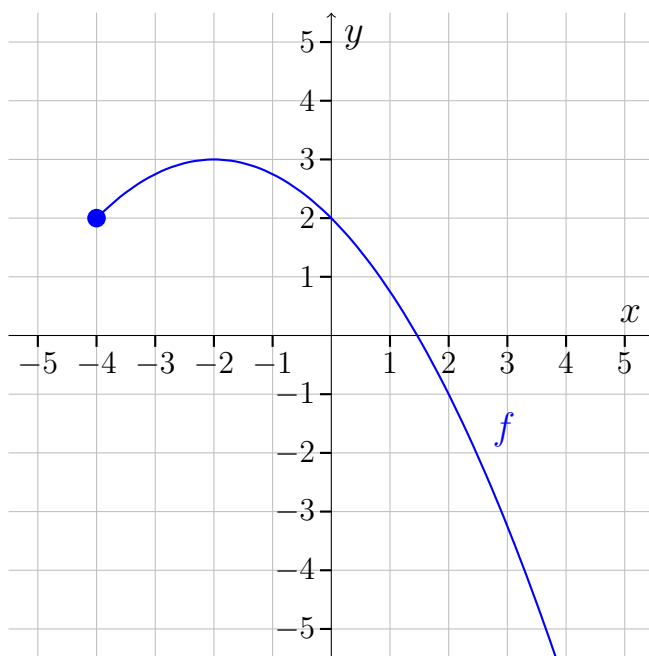
$$\text{Dm}(f) =]1; 7] \quad \text{og} \quad \text{Vm}(f) = [2; 6]$$

Læg mærke til at værdimængden starter i $y = 2$ (det laveste punkt på grafen).

Er et endepunkt på en graf ikke markeret med en bolle, betyder det, at funktionen ikke stopper, men fortsætter ud af koordinatsystemet.

Eksempel 2.3.1

Betragt funktionen

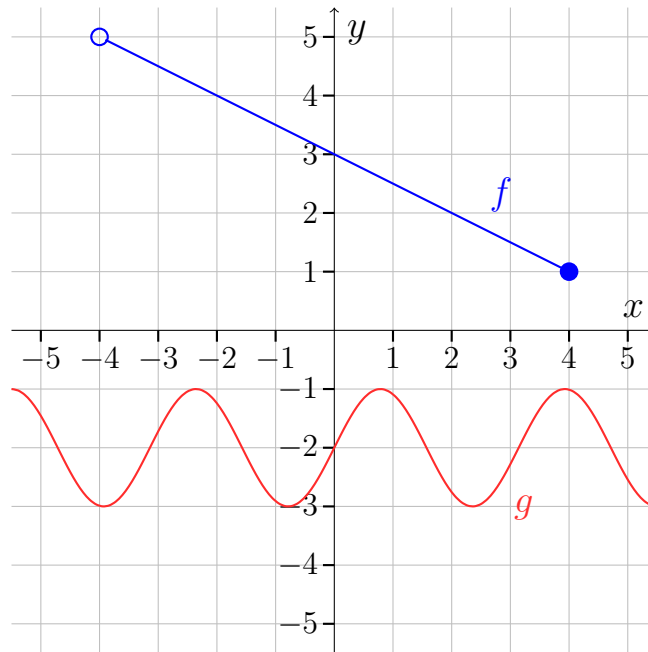


Vi kan se, at funktionen fortsætter ned til højre, og der er derfor ingen begrænsning på definitions- og værdimængden i den retning. Så

$$\text{Dm}(f) = [-4; \infty[\quad \text{og} \quad \text{Vm}(f) =] - \infty; 3]$$

Øvelse 2.3.1

Betragt graferne for to funktioner f og g :



- Bestem definitions- og værdimængden for f .
- Bestem definitions- og værdimængden for g .

Definitionsmængde ud fra forskriften

Man kan bestemme definitionsmængden ud fra forskriften. Lad os tage nogle eksempler for at se hvordan.

Eksempel 2.3.2

I sidste afsnit mødte vi funktionen

$$f(x) = 2x \quad , \quad -2 \leq x < 1$$

Vi kan aflæse direkte ud af forskriften at $\text{Dm}(f) = [-2; 1[$, da det svarer til begrænsningen $-2 \leq x < 1$.

Eksempel 2.3.3

Kigger vi på funktionen

$$g(x) = 2x$$

så er der ingen begrænsninger på, derfor er $\text{Dm}(g) = \mathbb{R}$.

Eksempel 2.3.4

Kigger vi på funktionen

$$h(x) = \sqrt{x}$$

så kunne vi godt tro at $\text{Dm}(h) = \mathbb{R}$, da der ikke er skrevet nogle begrænsninger på. Men denne funktion er naturligt begrænset, fordi man ikke kan tage kvadratroden af negative tal, så $\text{Dm}(f) = [0; \infty[$

Øvelse 2.3.2

Lad $f(x) = \frac{1}{x}$.

- a) Regn $f(4)$, hvis det kan lade sig gøre.
- b) Regn $f(-\frac{1}{2})$, hvis det kan lade sig gøre.
- c) Regn $f(0)$, hvis det kan lade sig gøre.
- d) Bestem definitionsmængden for f og begrund dit svar.

Øvelse 2.3.3

Lad $f(x) = \sqrt{x-2}$.

- a) Regn $f(6)$, hvis det kan lade sig gøre.
- b) Regn $f(2)$, hvis det kan lade sig gøre.
- c) Regn $f(1)$, hvis det kan lade sig gøre.
- d) Bestem $\text{Dm}(f)$ og begrund dit svar.

Øvelse 2.3.4

Bestem definitionsmængden for funktionerne

a) $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x < 2$

c) $f(x) = \frac{x}{5}$

d) $f(x) = \frac{5}{x}$

e) $f(x) = \frac{2x+1}{x+37}$

f) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 1}$ (svær)

2.4 Nulpunkter og fortegn

Definition 2.4.1

Lad f være en funktion.

Et *nulpunkt* for f er en x -værdi, som opfylder, at $f(x) = 0$.

Eksempel 2.4.1

Vi vil undersøge om $x = 3$ er nulpunkt for funktionen $f(x) = 2x - 6$, så vi udregner $f(3)$:

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

Da $f(3) = 0$, er $x = 3$ nulpunkt for f .

Værdien $x = 4$ er derimod ikke et nulpunkt for funktionen $f(x) = 2x - 6$, da

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2 \quad \text{Altså ikke nul!}$$

Øvelse 2.4.1

Lad $f(x) = x^2 - 16$ og $g(x) = \sqrt{x} - 3$

a) Er $x = 4$ nulpunkt for f ?

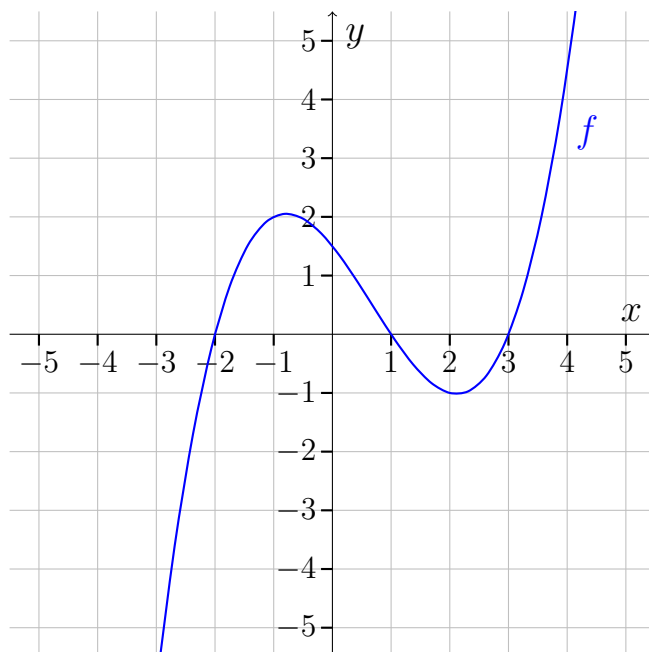
b) Er $x = -4$ nulpunkt for f ?

c) Er $x = 4$ nulpunkt for g ?

Det er altså nemt tjekke, om en x -værdi er et nulpunkt, men hvordan finder man nulpunkterne første omgang? Vi starter med at se på det grafisk.

Nulpunkter og fortegnssundersøgelse ved grafisk aflæsning

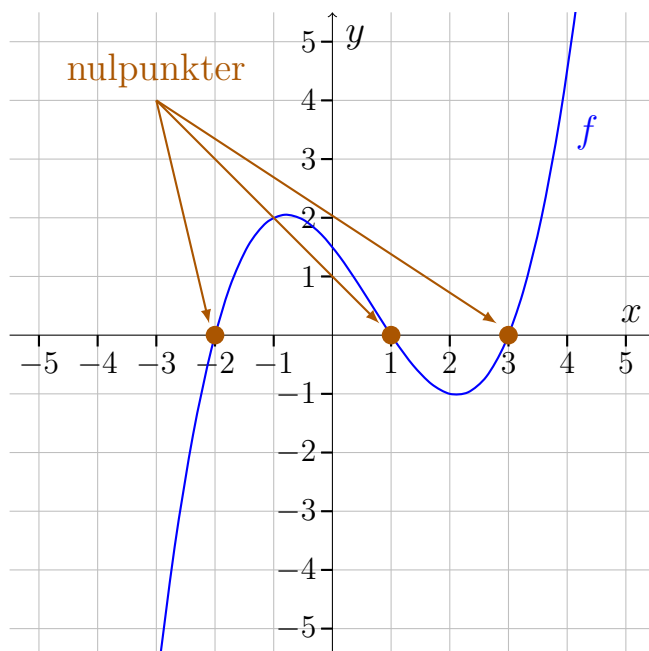
Lad os tage udgangspunkt i en grafen for en konkret funktion f :



Vi vil først bestemme nulpunkter for f . Grafisk er nulpunkter x -værdier, hvor funktionen skærer x -aksen. Vi ser at funktionen skærer x -aksen i $x = -2$, $x = 1$ og $x = 3$, og vi kan konkludere.

Funktionen f har nulpunkter i $x = -2$, $x = 1$ og $x = 3$.

Her vist på grafen:



Når man har nulpunkterne for en funktion, kan man lave en *fortegnsundersøgelse* af funktionen. Det betyder, at man bestemmer de x -værdier, hvor funktionsværdierne er hhv. positive og negative. Det kan man gøre ved at aflæse, hvor grafen er hhv. under og over x -aksen.

Når man laver fortegnsundersøgelsen, opskrifter man også nulpunkterne. Resultatet af fortegnsundersøgelsen kaldes funktionens *fortegnsvariation*.

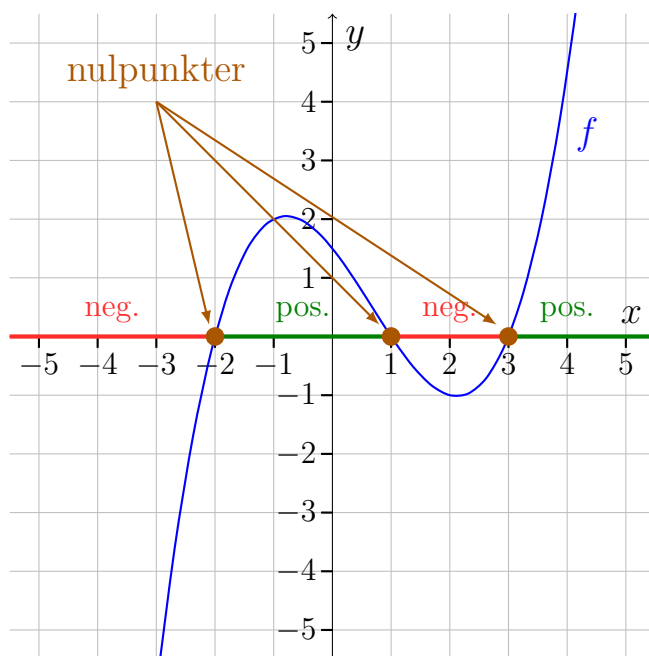
Vi ser, at grafen er under x -aksen, når x ligger i intervallerne $] -\infty; -2[$ og $]1; 3[$, mens grafen er over x -aksen når x ligger i $] -2; 1[$ og $]3; \infty[$. Vi konkluderer:

Funktionen f er negativ på intervallerne $] -\infty; -2[$ og $]1; 3[$.

Funktionen f er positiv på intervallerne $] -2; 1[$ og $]3; \infty[$.

Funktionen f er nul når $x = -2$, $x = 1$ og $x = 3$.

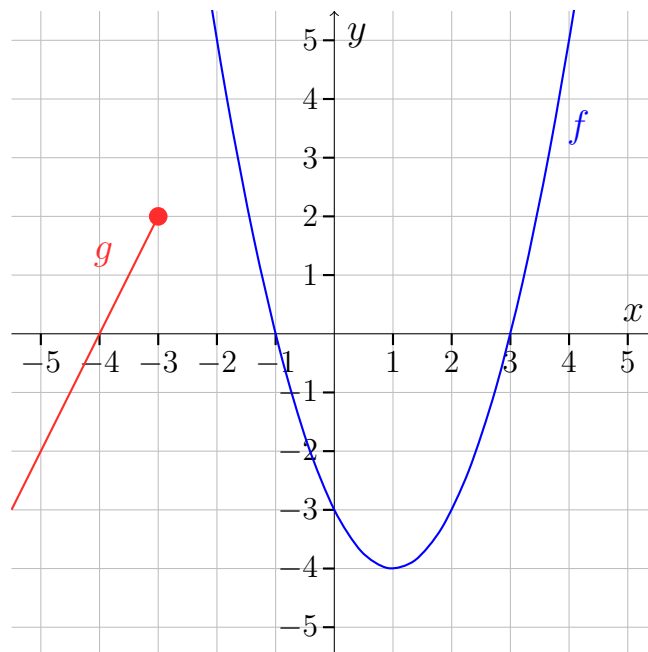
Her vist på grafen:



Læg mærke til at intervallerne for fortegnsundersøgelsen er langs x -aksen.

Øvelse 2.4.2

Betragt grafen for funktionerne f og g :

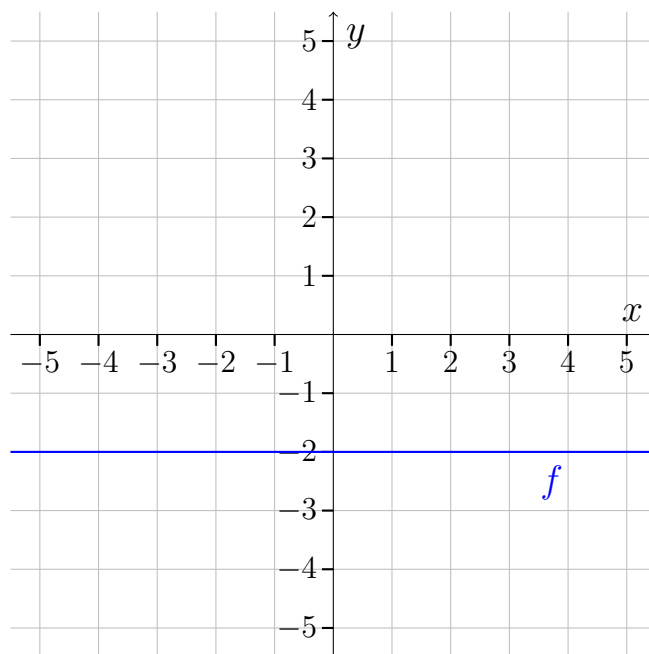


- a) Bestem nulpunkterne for f .
- b) Lav en fortegnundersøgelse for f .
- c) Bestem nulpunkterne for g .
- d) Bestem fortegnsvariationen for g .

Ikke alle funktioner har nulpunkter.

Eksempel 2.4.2

Betragt grafen for en funktion f :



Da f ikke skærer x -aksen, har f ingen nulpunkter. Da funktionen er negativ for alle x -værdier, er det simpelt at lave en fortegnundersøgelse. Vi skriver blot:

Funktionen f er negativ.

Øvelse 2.4.3

Lad $f(x) = 4$

- Bestem $f(-3)$.
- Tegn grafen for f .
- Bestem nulpunkter for f .
- Lav en fortegnundersøgelse for f .

Nulpunkter og fortegn ved beregning

Man beregner nulpunkterne ved at sætte $f(x) = 0$ og løse ligningen.

Eksempel 2.4.3

Vi ønsker at beregne nulpunkter for funktionen $f(x) = 2x - 2$. Vi leder altså

efter x 'er, som opfylder at $f(x) = 0$. Vi stiller det op som en ligning:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\2x - 2 &= 0 && (\text{da } f(x) = 2x - 2) \\2x &= 2 \\x &= 1\end{aligned}$$

Altså har $f(x)$ netop et nulpunkt, som er $x = 1$.

Øvelse 2.4.4

Bestem ved beregning nulpunkterne for følgende funktioner:

- a) $f(x) = 4x + 2$
- b) $g(x) = -x$
- c) $f(x) = 2(x + 1)$
- d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ (svær)
- e) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ (svær)

Fortegnsundersøgelse ved beregning

Når man har beregnet nulpunkterne, er det ikke svært at lave en fortegnsundersøgelse. Man gør det ved at vælge nogle x -værdier, som omgiver nulpunkterne, og indsætte dem i funktionen. Derfra kan man aflæse fortegnene.

Eksempel 2.4.4

Lad $f(x) = 3x + 6$. Vil vi lave en fortegnsundersøgelse.

Vi finder først nulpunkter:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\3x + 6 &= 0 \\3x &= -6 \\x &= \frac{-6}{3} \\x &= -2\end{aligned}$$

Funktion har altså nulpunkt i $x = -2$. Vi vælger først en x -værdi til venstre for nulpunktet (dvs. en x -værdi som er mindre end -2) Vi tager $x = -3$, men vi

kunne også have taget $x = -4$, $x = -5$ osv. Vi vælger så en x -værdi til højre for nulpunktet. Her tager vi $x = 0$. Vi regner nu de tilhørende funktionsværdier.

$$f(-3) = 3 \cdot (-3) + 6 = -3 \quad \text{og} \quad f(0) = 3 \cdot 0 + 6 = 6$$

Vi skriver nulpunktet og de to funktionsværdier ind i et sildeben.

x	-3	-2	0
$f(x)$	-3	0	6

Vi kan se at funktionsværdierne er negative til venstre for $x = -2$ og positive til højre for $x = -2$, så det giver os fortegnsvariationen:

$$f(x) < 0 \text{ på intervallet }] -\infty; -2[.$$

$$f(x) > 0 \text{ på intervallet }] -2; \infty[.$$

$$f(x) = 0 \text{ når } x = -2.$$

Øvelse 2.4.5

Lad $f(x) = -0,5x + 2$

- a) Lav en fortegnundersøgelse for f .

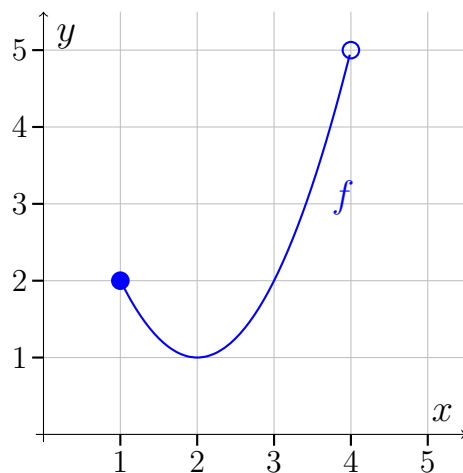
Øvelse 2.4.6

Funktionen $h(x) = x^2 - 6x + 8$ har nulpunkter i $x = 4$ og $x = 2$.

- a) Vælg først nogle x -værdier som omgiver nulpunkterne (dvs. du skal også vælge en x -værdi imellem de to nulpunkter). Vælg de x -værdier som er nemmest at regne med.
- b) Lav et sildeben med nulpunkterne og de valgte x -værdier. Beregn de tilhørende funktionsværdier og sæt dem ind tabellen.
- c) Opskriv fortegnsvariationen.

2.5 Ekstrema og monotoniforhold

Et *ekstremum* (flertal: *ekstrema*) er en maksimal eller minimal funktionsværdi for en funktion. Funktionens *monotoniforhold* er en beskrivelse af, hvor den vokser og aftager. Lad os tage udgangspunkt i en konkret funktion f :



Vi vil nu bestemme ekstrema for f — altså de punkter hvor f har minimum og maksimum. Vi ser, at den mindste funktionsværdi findes i punktet $(2, 1)$. Dette punkt kaldes et globalt minimum, fordi det er det mindste punkt på hele grafen. Vi skriver:

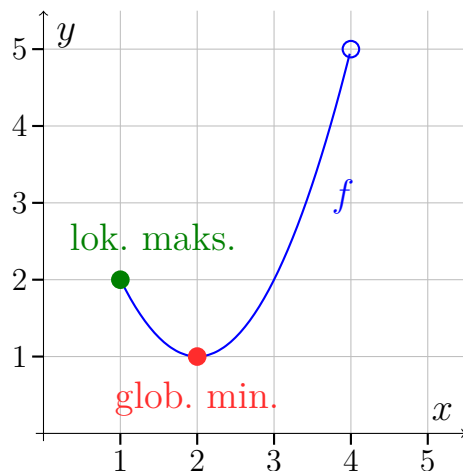
Funktionen f har globalt minimum i $x = 2$ med minimumsværdi 1.

Vi kigger nu på punktet $(1, 2)$. Dette punkt er ikke det højst liggende punkt på hele grafen, men det er det højst liggende punkt, når man begrænser sig til x -værdier tæt på $x = 1$. Derfor er det et lokalt maksimum. Vi skriver:

Funktionen f har lokalt maksimum i $x = 1$ med maksimumsværdi 2.

Nu kunne man tro, at funktionen havde globalt maksimum i $(4, 5)$, men dette punkt ligger slet ikke på grafen, så det kan ikke være maksimum for funktionen. Funktionen har slet ikke noget globalt maksimum — uanset hvilket punkt vi vælger på grafen, kan vi altid finde et punkt, som ligger højere.

Her er ekstremumpunkterne vist på grafen:



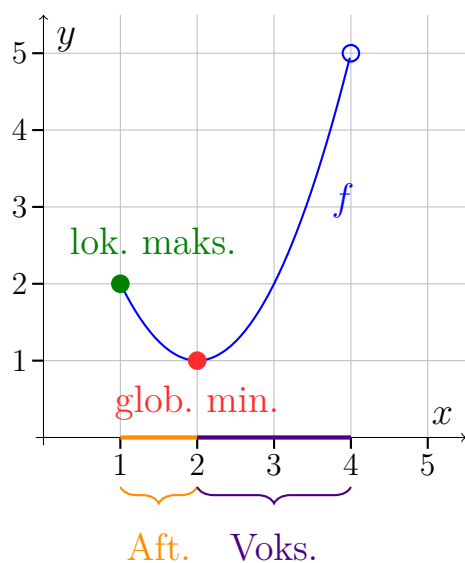
Vi bestemmer funktionens monotoniforhold ved at angive de intervaller på x -aksen, hvor funktionen er aftagende/voksende/konstant. Vi ser at grafen aftager, indtil vi når det globale minimum i $x = 2$, hvorefter den vokser, indtil den slutter ved $x = 4$. Vi skriver:

Funktionen f er aftagende i $[1; 2]$.

Funktionen f er voksende i $[2, 4[$.

Man kan undrer sig over, at 2 er med i begge intervaller. Men man kan også også lade være med at undre sig og tænke: ”sådan er det nok bare”. Hvis du undrer dig, så tjek ekstraafsnittet til slut.

Her er det vist på grafen:

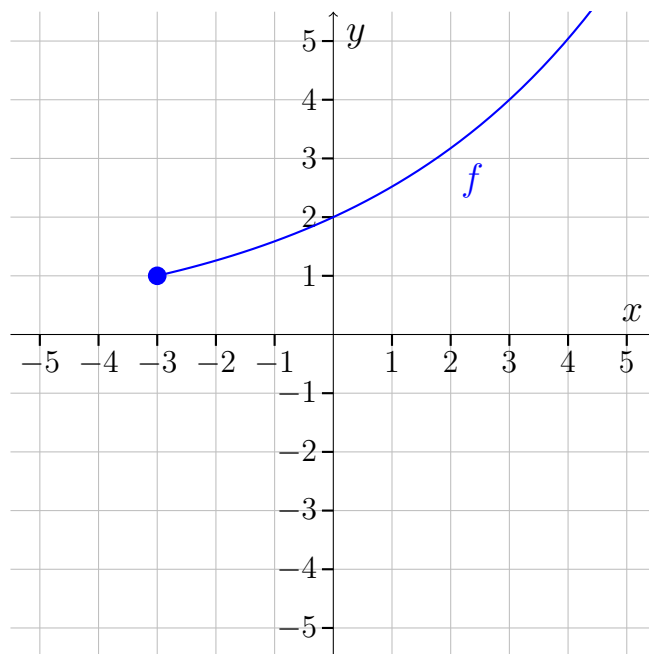


Læg mærke til, at monotonintervallerne er intervaller langs x -aksen.

En funktion der hverken vokser eller aftager, siges at være *konstant*.

Eksempel 2.5.1

Betragt grafen



Vi bestemmer først ekstrema. Vi ser, at $(-3, 1)$ er det laveste punkt på grafen, så vi konkluderer:

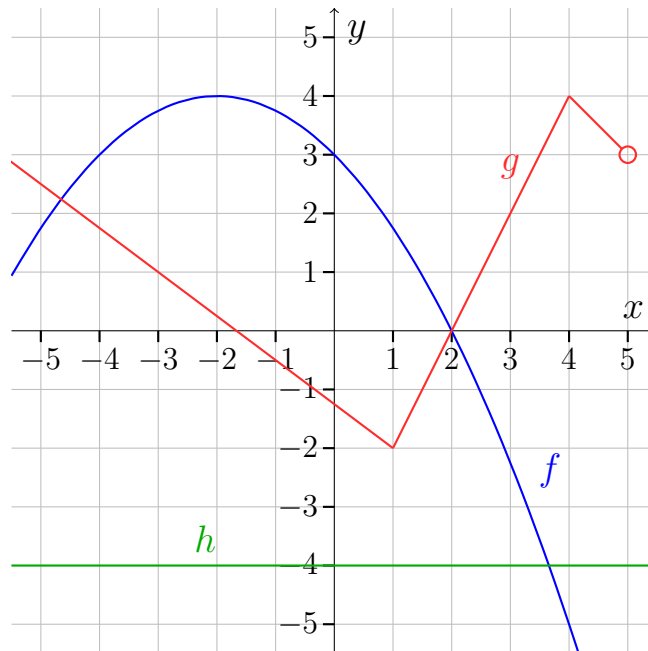
Funktionen har globalt minimum i $x = -3$ med minimumsværdi 1.

Vi bestemmer nu monotoniforhold. Det er nemt, da funktionen er voksende over det hele. Vi kunne skrive at f er voksende i $[-3; \infty[$, men da der ikke er nogle skift i monotoniforholdene, skriver vi bare:

Funktionen f er voksende.

Øvelse 2.5.1

Betragt graferne:

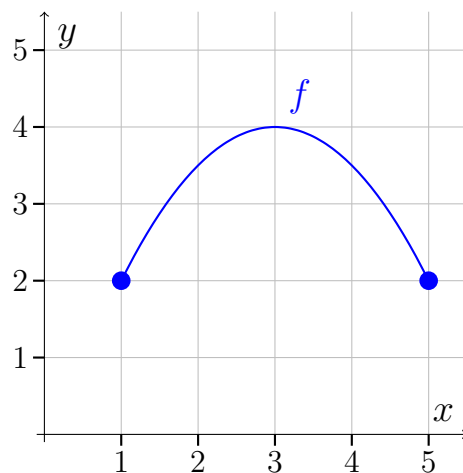


- a) Bestem ekstrema for f :
- b) Bestem monotoniforhold for f
- c) Bestem ekstrema for g
- d) Bestem monotoniforhold for g
- e) Bestem monotoniforhold for h

En funktion kan godt have flere globale ekstrema. At et punkt er et globalt maksimumspunkt, betyder bare, at der ikke er nogle punkter, som er højere. Tilsvarende med globale minima.

Eksempel 2.5.2

Betragt grafen for en funktion f



Funktionen f har globalt minimum i både $x = 1$ og $x = 4$. Minimumsværdien er 2.

Øvelse 2.5.2

Kig på graferne i øvelse 2.5.1

- a) Bestem ekstrema for funktionen h

Ekstra

Vi skal nu se, hvorfor ekstremumsstedet hører med til begge monotoniintervaller. Det kræver, at vi bliver lidt mere præcise i forhold til, hvad vi forstår ved ”voksende” og ”aftagende”, og vi skal derfor have fat i *definitionen* af disse begreber.

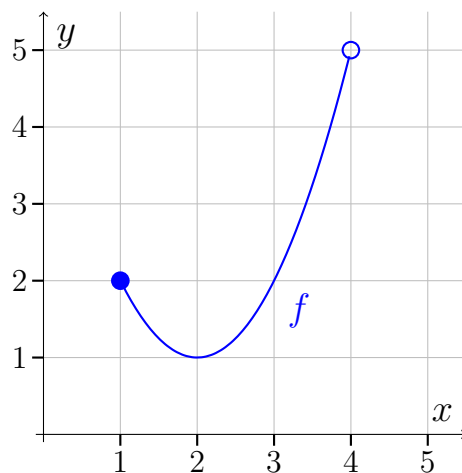
Definition 2.5.1

En funktion f siges at være *voksende* i et interval I , hvis der for alle $x_1 \in I$ og $x_2 \in I$ gælder, at $f(x_2) > f(x_1)$ når $x_2 > x_1$.

En funktion f siges at være *aftagende* i et interval I , hvis der for alle $x_1 \in I$ og $x_2 \in I$ gælder, at $f(x_2) < f(x_1)$ når $x_2 > x_1$.

En funktion f siges at være *konstant* i et interval I , hvis der for alle $x_1 \in I$ og $x_2 \in I$ gælder, at $f(x_1) = f(x_2)$.

Så lad os sammenligne med grafen:



Vi kan se, at hvis vi sætter I til at være $[1, 2]$ og vælger et $x_1 \in I$ og et $x_2 \in I$, sådan at $x_2 > x_1$, ja så vil $f(x_2) < f(x_1)$, og funktionen er dermed aftagende i $[1, 2]$ ifølge definitionen. Betyder det at funktionen er både aftagende og voksende i $x = 2$? Ikke rigtigt, for ifølge definitionen skal man have et interval, før man kan være aftagende/voksende. Så det giver ikke mening at spørge, om den er aftagende/voksende i en enkelt x -værdi.

Vi kan også opskrive en præcis definition af ekstrema. Det er dog lidt bøvlet at definere de lokale ekstrema. Men læs definitionen, og spørg mig, hvis du ikke forstår den (medmindre du er ligeglad, om du forstår den).

Definition 2.5.2

En funktion f har globalt maksimum x_0 , hvis $f(x_0) \geq f(x)$ for alle $x \in \text{Dm}(f)$.

En funktion f har globalt minimum x_0 , hvis $f(x_0) \leq f(x)$ for alle $x \in \text{Dm}(f)$.

En funktion f har lokalt maksimum i x_0 , hvis der findes et åbent interval I , indeholdende x_0 , så $f(x_0) \geq f(x)$ for alle $x \in I \cap \text{Dm}(f)$.

En funktion f har lokalt minimum i x_0 , hvis der findes et åbent interval I , indeholdende x_0 , så $f(x_0) \leq f(x)$ for alle $x \in I \cap \text{Dm}(f)$.

2.6 Grafer i GeoGebra

Dette afsnit kan springes over, indtil du får brug for det.

Forudsætninger

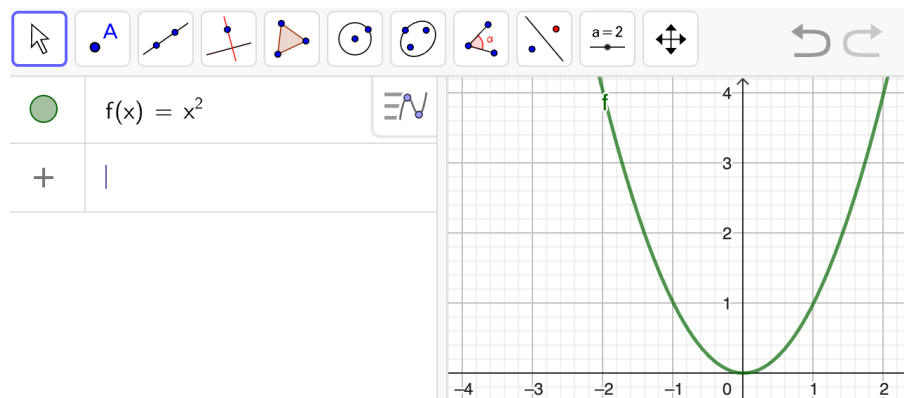
Dette afsnit kræver at du har regnet afsnit [1.8](#)

Vi har set, hvordan vi bruger GeoGebra til at løse ligninger, reducerer osv. Men GeoGebra kan også bruges til at tegne grafer.

Eksempel 2.6.1

Lad os tegne grafen for $f(x) = x^2$.

Vi åbner GeoGebra og skriver forskriften ind:



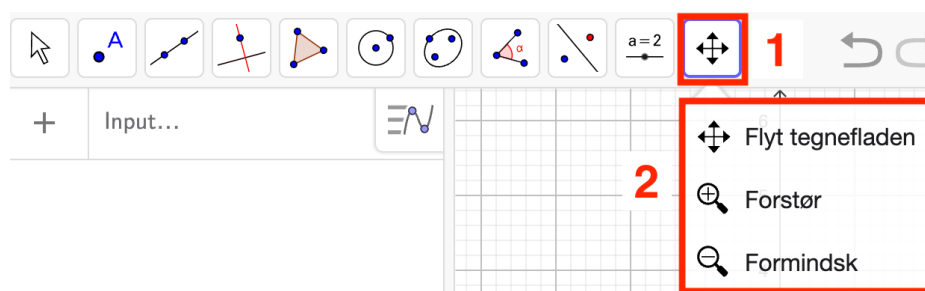
Grafen ses til højre.

Øvelse 2.6.1

Tegn i GeoGebra grafen for :

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

Man kan zoome og "trække" i koordinatsystemet. Der er flere måder at gøre det på. Man kan højreklikke, man kan bruge to-fingre-zoom og kan man bruge værktøjerne her:



Klikker man på "Flyt tegnefladen" kan man også trække i akserne, så enhederne kommer til at stå tættere eller mere spredt.

Øvelse 2.6.2

Tegn følgende grafer og zoom/træk, så de ser pæne ud

a) $f(x) = x + 1000$

b) $g(x) = 1000x^2$

c) $h(x) = 1000(x - 1000)$

Begrænsede funktioner

Man kan tegne begrænsede funktioner i GeoGebra.

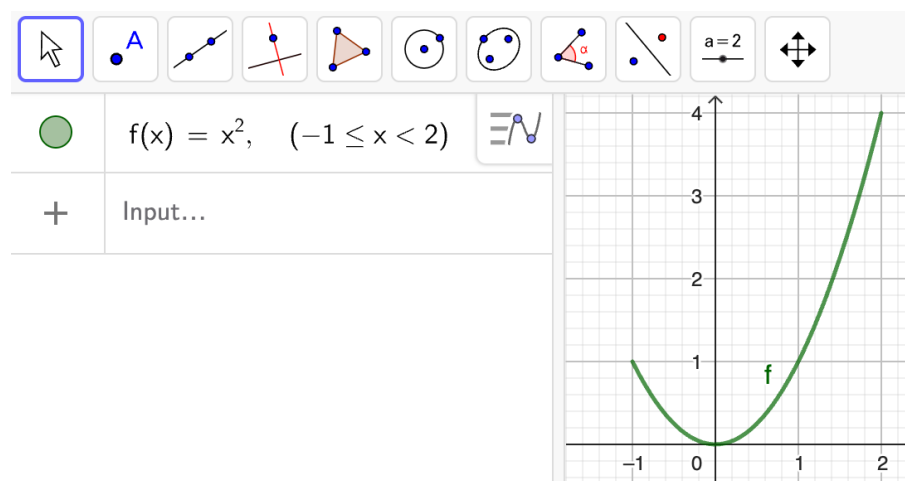
Eksempel 2.6.2

Vi vil tegne funktionen $f(x) = x^2$ hvor $-1 \leq x \leq 2$. Altså funktionen $f(x) = x^2$ begrænset til definitionsmængden $D_m(f) = [-1; 2[$.

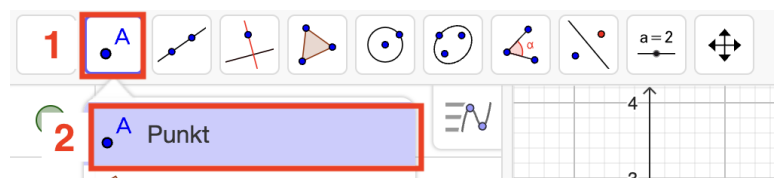
Vi taster først

$$x^2, -1 \leq x < 2$$

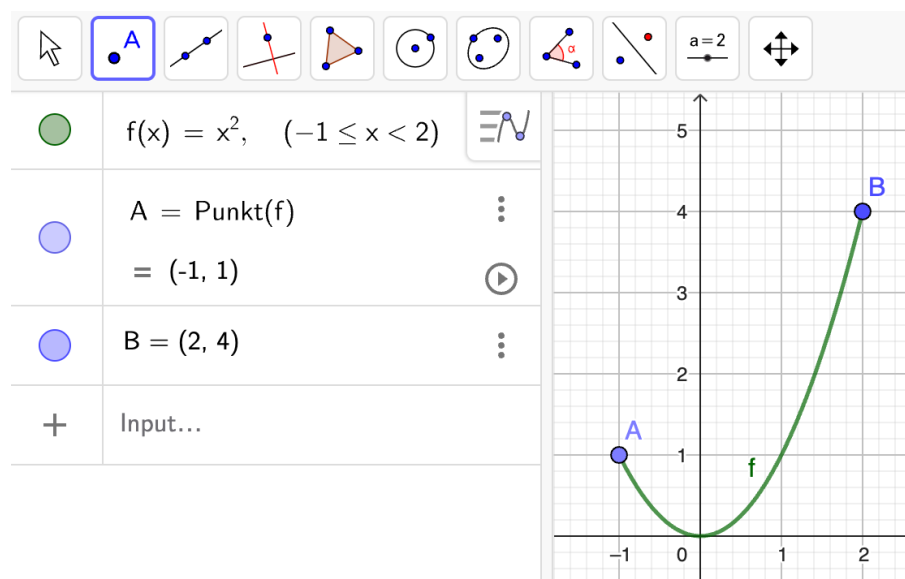
Det giver:



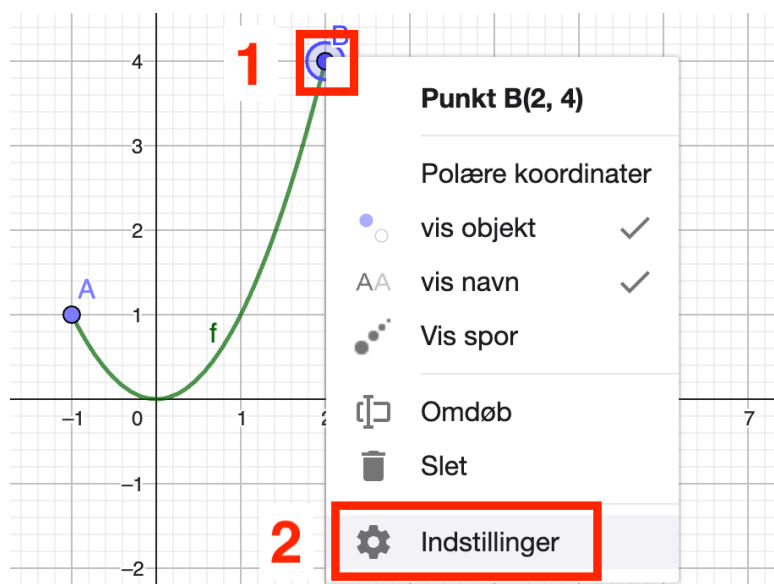
hmmm.... ikke helt godt. GeoGebra kan ikke finde ud af at tilføje endepunkter, så det må vi selv gøre. Vi vælger "Punkt":



og klikker på endepunkterne:



Du skal muligvis kæmpe lidt med punkt B , da punktet ikke ligger på grafen, og derfor bliver GeoGebra lidt sur, når den skal tegne det. Vi mangler nu bare at få punkterne til at se rigtige ud. Vi højreklikker på et af punkterne:



og fjerner flueben i "vis navn":

Basis Farve Stil Avanceret Algebra

Scripting

Navn
B

Definition
(2, 4)

Tekst

☐ Brug tekst som mærkat

☒ vis objekt

☐ Vis spor

☐ vis navn: Navn ▾

☐ Fast objekt

☐ Hjælpe objekt

Hvorefter vi klikker "Stil" og vælger den rigtige punktmarkering (vi husker, at punktet ikke skulle være med på grafen):

Basis F 1 Stil Avanceret Algebra

Scripting

Punkt størrelse 5

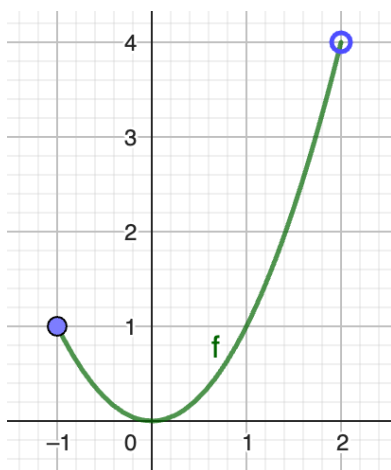
Punktmarkering

2

☐ ☒ ☐ + ☐ ☐

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

På samme måde fjerne vi navnet på punkt A, og her er det endelige resultat:



Sehr gut.

Øvelse 2.6.3

Tegn i GeoGebra graferne for funktionerne

- a) $f(x) = 2x - 3$, hvor $1 < x \leq 4$
- b) $g(x) = 0,01x^2 + 100$ hvor $x > 20$.

Øvelse 2.6.4

Det er fint at kunne tegne grafer i GeoGebra, men hvis man glemmer hvordan man gør i hånden, ja så har man også glemt, hvad en graf **er**, og så kan det hele være ligemeget.

- a) Hvordan tegner man grafen for $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ uden at bruge GeoGebra?

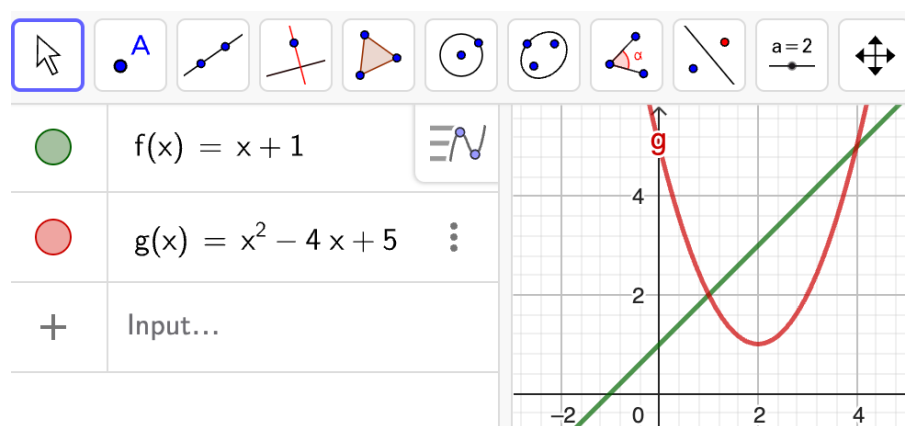
Grafisk løsning af ligninger og uligheder

Man kan løse ligninger og uligheder vha. grafer.

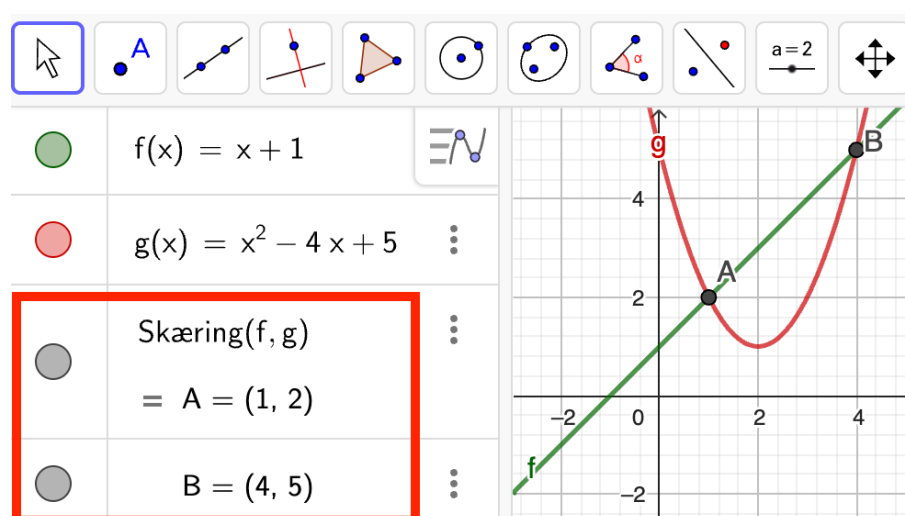
Eksempel 2.6.3

Vi vil løse ligningen $x + 1 = x^2 - 4x + 5$.

Vi sætter $f(x)$ lig med venstresiden af ligningen og $g(x)$ lig med højresiden, dvs. $f(x) = x + 1$ og $g(x) = x^2 - 4x + 5$ og vi skal dermed finde ud af hvornår $f(x) = g(x)$. Vi tegner graferne for begge funktioner i GeoGebra:



Vi vil nu bruge kommandoen **Skæring** til at finde skæringen mellem f og g , så vi skriver **Skæring(f,g)** :



Løsningerne til ligningen er x -koordinaterne til de to skæringspunkterne. Ligningen har altså to løsninger:

$$x = 1 \quad \text{og} \quad x = 4$$

I afsnittet om polynomier skal vi se, hvordan man løser den type ligninger uden at bruge GeoGebra.

Øvelse 2.6.5

Brug den grafiske metode til at løse ligningerne:

a) $2x - 7 = 5(x + 1)$

b) $-x^2 + 1 = 2^x$

Hvis der ikke er nogle skæringspunkter, så er der heller ingen løsninger til lignin-

gen.

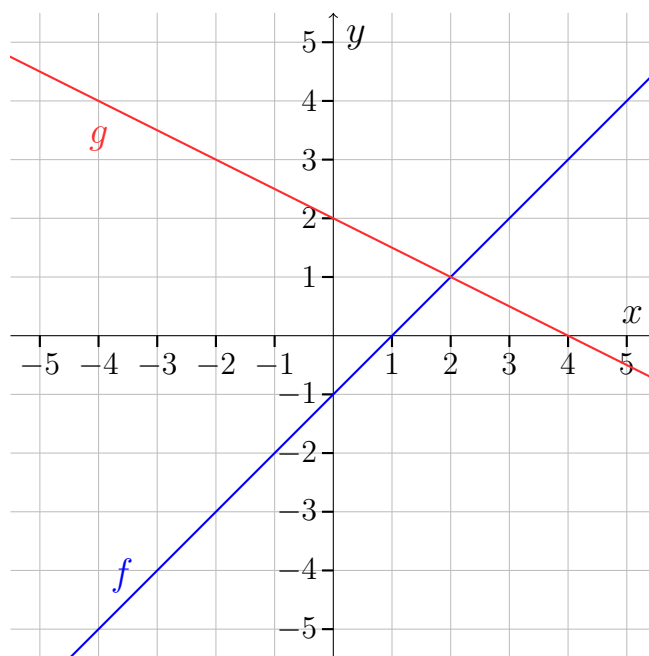
Øvelse 2.6.6

Brug den grafiske metode til at løse ligningen:

a) $x^2 + 1 = x - 2$

Øvelse 2.6.7

Nedenunder ses graferne for to funktioner $f(x)$ og $g(x)$.



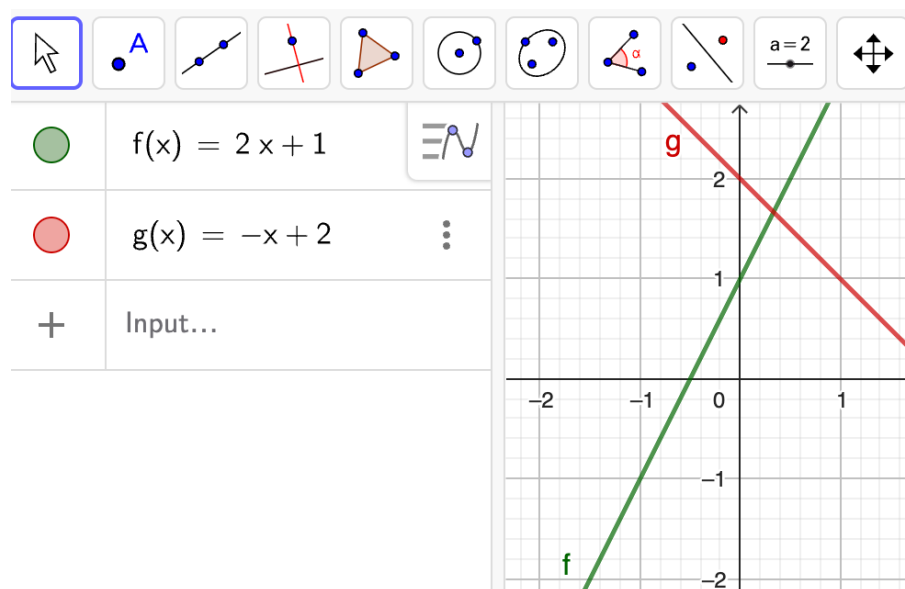
a) Løs ligningen $f(x) = g(x)$.

Vi kan også løse uligheder grafisk.

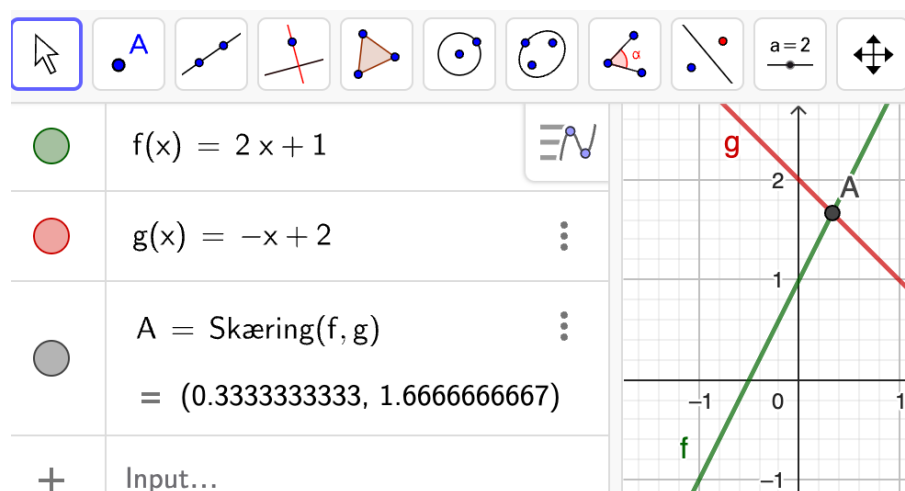
Eksempel 2.6.4

Vi vil løse uligheden $2x + 1 < -x + 2$.

Vi tegner begge sider af uligheden ind i GeoGebra:



Da $2x + 1$ skal være mindre end $-x + 2$, må løsningen være givet ved det område, hvor den grønne graf ligger under den røde. Vi finder skæringspunktet:



og løsningen må så være $x < 0,33$, fordi den grønne graf ligger under den røde når $x < 0,33$.

Øvelse 2.6.8

Brug den grafiske metode til at løse ulighederne:

- $-x + 7 < x - 4$
- $x^2 + x < 2x$
- $x^2 + x \geq 2x$

Kapitel 3

Lineære funktioner

Lineære funktioner er funktioner, som vokser med en fast værdi, når x vokser med 1. Udover at have mange praktiske anvendelser er lineære funktioner en af de grundlæggende funktionstyper, som udgør en del af fundamentet for meget andet matematik.

3.1 Introduktion til lineære funktioner

Vi starter med at *definere* lineære funktioner. Vi husker, at når man definere et begreb i matematik, giver man begrebet en præcis betydning.

Definition 3.1.1

En *lineær funktion* er en funktion med forskriften $f(x) = ax + b$, hvor a og b er to reelle konstanter.

Tallet a kaldes *hældningskoefficienten*, *hældningstallet*, eller bare *hældningen*.

Vi ser at definitionen fastlægger betydningen af begreberne: lineær funktion, hældningskoefficient, hældningstal og hældning.

Eksempel 3.1.1

Funktionen $f(x) = 2x + 1$, er en lineær funktion med $a = 2$ og $b = 1$.

Funktionen $f(x) = -3x$, er en lineær funktion med $a = -3$ og $b = 0$.

Funktionen $f(x) = 5$, er en lineær funktion med $a = 0$ og $b = 5$.

Funktionen $f(x) = 2x^2 + 3$, er ikke en lineær funktion da den ikke har formen

$f(x) = ax + b.$

Øvelse 3.1.1

Afgør, hvilke af følgende funktioner, som er lineære, og bestem for disse tallene a og b :

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = -x$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$

g) $f(x) = 0$

h) $f(x) = -1$

Øvelse 3.1.2

Angiv hældningskoefficienten for funktionerne

a) $f(x) = -3x + 2$

b) $f(x) = 1$

3.2 Grafer for lineære funktioner

Grafen for en lineær funktion kan tegnes på samme måde som grafen for enhver anden funktion, nemlig ved at lave et sildeben.

Øvelse 3.2.1

Lad $f(x) = -2x + 3$.

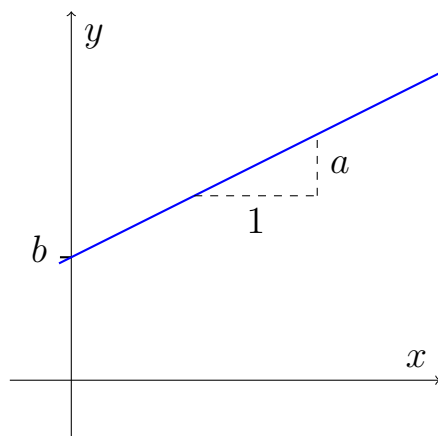
a) Lav et sildeben, og tegn ud fra det grafen for f (med papir og blyant).

Kender man betydningen af a og b i forskriften $f(x) = ax + b$, kan man tegne grafen med en hurtigere metode.

- Tallet b angiver, hvor grafen skærer y -aksen.
- Tallet a er det tal, man skal gå op, hver gang man går 1 ud af x -aksen. Hvis

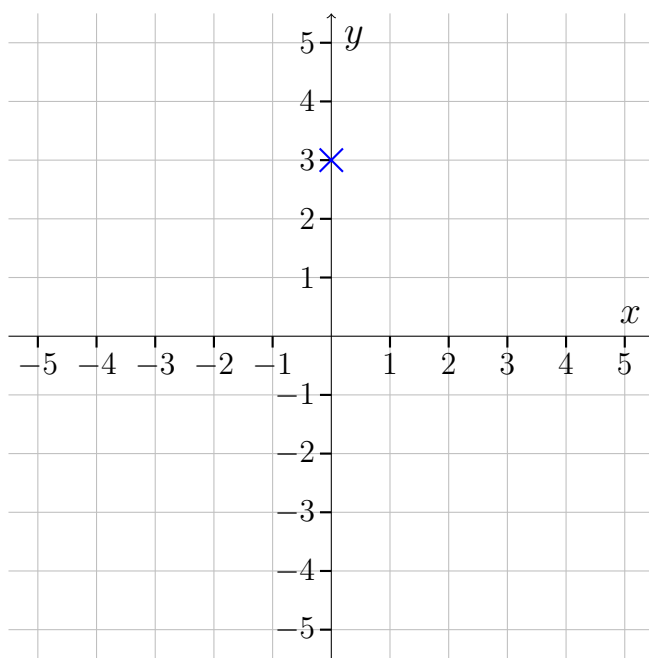
a er negativ, skal man gå ned i stedet for op.

Betydningen af a og b kan også ses på tegningen:

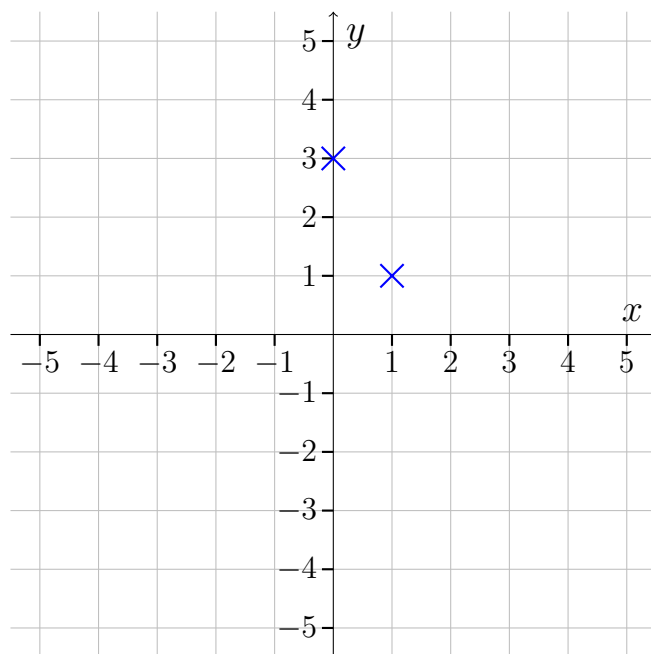


Eksempel 3.2.1

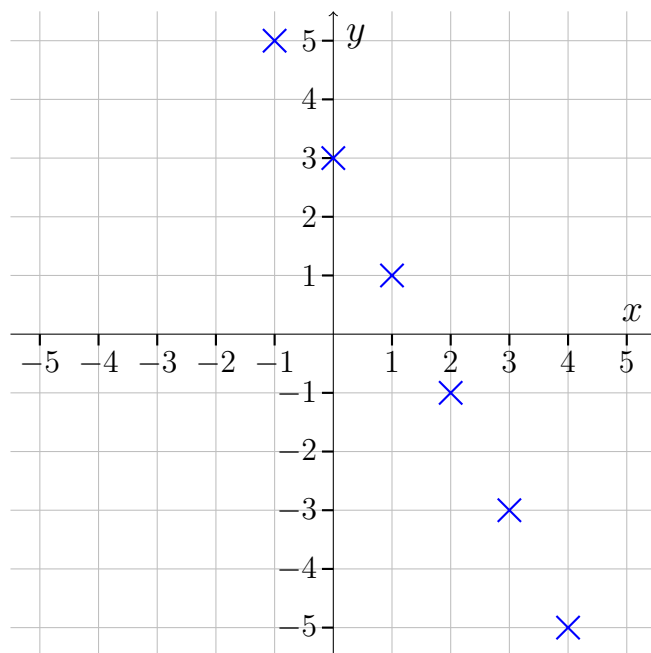
Lad os prøve at tegne funktionen $f(x) = -2x + 3$. Vi kan se, at $b = 3$, så funktionen skærer y-aksen i 3:



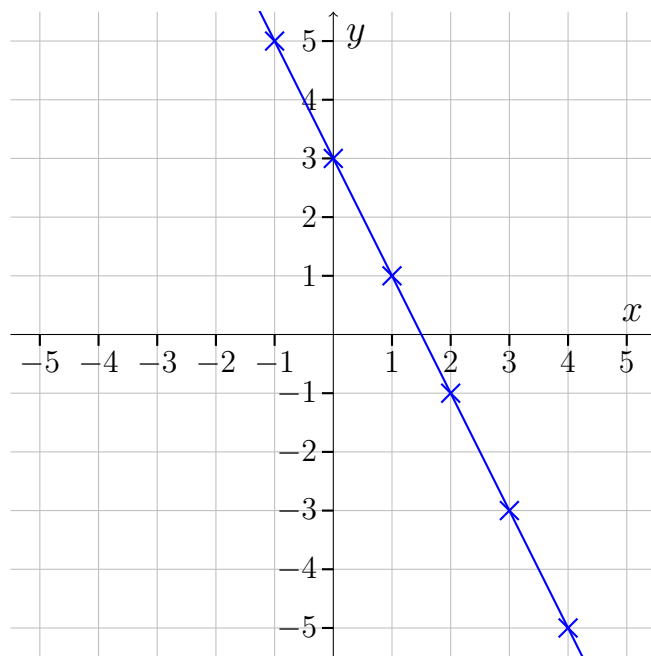
Da $a = -2$, skal vi gå 1 ud og 2 ned for at finde det næste punkt på grafen.



Sådan fortsætter vi:



og vi kan forbinde punkterne med en linje:



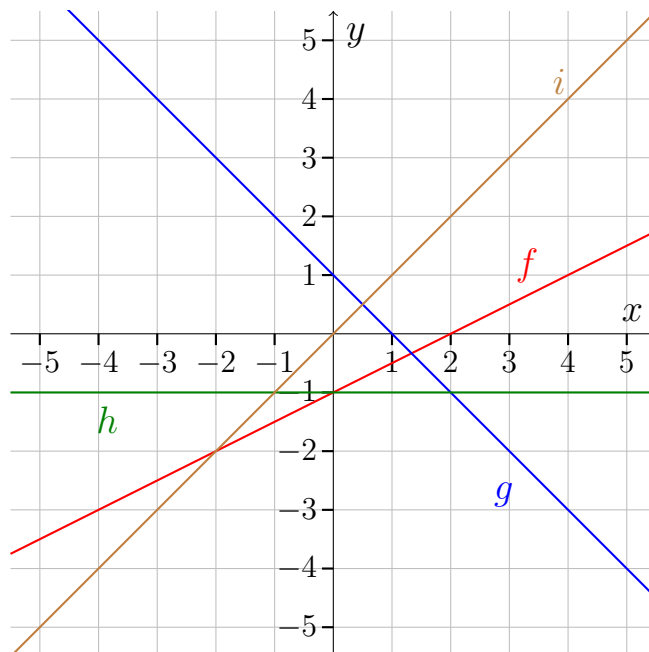
Øvelse 3.2.2

Tegn med papir og blyant en skitse af nedenstående funktioner vha. metoden beskrevet ovenover:

- a) $f(x) = 0,5x + 2$
- b) $f(x) = x + 1$
- c) $f(x) = -2x + 1$
- d) $f(x) = 5$
- e) $f(x) = 0$

Øvelse 3.2.3

Betragt graferne:



Bestem forskriften for følgende funktioner:

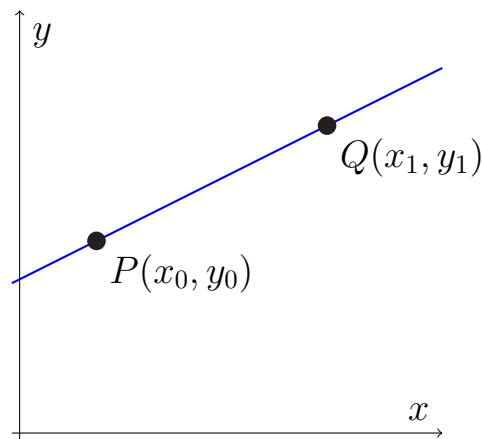
- a) Bestem forskriften for f .
- b) Bestem forskriften for g .
- c) Bestem forskriften for h .
- d) Bestem forskriften for i .

Forskrift ud fra to punkter på grafen

Det er klart, at hvis man har to punkter, så findes der netop én linje igennem punkterne. Vi vil nu præsentere en *sætning*, som kan bruges til at bestemme en forskrift for linjen. En sætning er et matematisk resultat, som er særligt nyttigt.

Sætning 3.2.1

Lad $f(x) = ax + b$ være en lineær funktion og antag, at f går igennem punkterne $P(x_0, y_0)$ og $Q(x_1, y_1)$:



Da er konstanterne a og b givet ved:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{og} \quad b = y_0 - ax_0$$

Notationen (symbolerne) i sætningen kræver lidt forklaring. Har man en funktion, er x en variabel, som kan være alt muligt. Nogle gange vil man dog tage udgangspunkt i en fast x -værdi, som man så kalder x_0 , så man kan skelne den fra x (der jo ikke har en fast værdi). Tallet 0 i skrivemåden x_0 kaldes et *indeks*, og har altså ikke nogen anden betydning end at signalere, at der er tale om en bestemt x -værdi. Har man mere end én fast x -værdi, kan man kalde den næste for x_1 . Tilsvarende gælder for y_0 og y_1 . Så når der står $P(x_0, y_0)$ og $Q(x_1, y_1)$, betyder det altså bare to punkter, kaldet P og Q , med koordinaterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1) , hvor x_0 , y_0 , x_1 og y_1 er nogle bestemte tal. Måske er det nemmest at forstå med et eksempel:

Eksempel 3.2.2

Vi vil bestemme forskriften for linjen gennem punkterne $P(1, 2)$ og $Q(4, 14)$.

Sammenligner vi med sætning 3.2.1 får vi at

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 2$$

$$x_1 = 4$$

$$y_1 = 14$$

Vi regner først a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} && \text{(Formlen for } a \text{ skrives op)} \\ &= \frac{14 - 2}{4 - 1} && \text{(Værdierne for } x_0, x_1, y_0 \text{ og } y_1 \text{ indsættes)} \\ &= 4 \end{aligned}$$

og med den a -værdi i baglommen, kan vi så regne b :

$$\begin{aligned} b &= y_0 - ax_0 && \text{(Formlen for } b \text{ skrives op)} \\ &= 2 - 4 \cdot 1 && \text{(Værdierne for } x_0, y_0 \text{ og } a \text{ indsættes)} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Vi sætter de fundne a og b -værdier ind i formlen $f(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ &= 4x + (-2) && \text{(Værdierne for } a \text{ og } b \text{ indsættes)} \\ &= 4x - 2 \end{aligned}$$

Altså er forskriften $f(x) = 4x - 2$.

Som regel gider vi ikke give punkterne navne. Så i stedet for f.eks. $P(1, 2)$ og $Q(4, 14)$ vil vi bare skrive $(1, 2)$ og $(4, 14)$.

Øvelse 3.2.4

Bestem vha. sætning 3.2.1 den lineære funktion, som går gennem punkterne

- a) $(2, 5)$ og $(4, 11)$.
- b) $(5, -3)$ og $(12, -10)$.

Øvelse 3.2.5

Et sildeben for en lineær funktion f er givet ved:

x	4	8
$f(x)$	130	70

- a) Bestem en forskrift for f

3.3 Anvendelser af lineære funktioner

En lineær funktion har forskriften $f(x) = ax + b$. Vi husker, at den skærer y -aksen i b og vokser med a , hver gang x vokser med 1. Derfor kan lineære funktioner bruges til at beskrive situationer, hvor vi starter på en bestemt værdi og så efterfølgende har en fast vækst eller fald.

Eksempel 3.3.1

Antag at en taxatur koster 40 kr. i starttakst og 15 kr. pr. km (jaja, jeg ved godt, man også skal betale en tidstakst, men den ser vi bort for her).

Vi kan beskrive prisen for en taxatur vha. en lineær funktion

$$f(x) = ax + b$$

hvor x er kørte kilometer og $f(x)$ er prisen. Vi ved at b er skæringen med y -aksen, hvilket svarer til x -værdien 0. Altså må b være starttaksten da den jo svarer til at taxaen har kørt 0 km. Så mangler vi bare a , som er det, vi skal gå op, hver gang x vokser med 1. Altså må a være prisen pr. km, da det jo svarer til det, prisen vokser, hver gang vi kører en km. Alt i alt får vi:

$$f(x) = 15x + 40 \quad , \quad x \geq 0$$

Læg mærke til, at der står $x \geq 0$. Det er fordi, man ikke kan køre et negativt antal km.

Øvelse 3.3.1

Vi tager udgangspunkt i ovenstående eksempel.

- Hvad er definitionsområdet for f ?
- Tegn grafen for funktionen $f(x)$.
- Hvad er værdimængden for f ?
- Beregn prisen, når man kører 10 km.
- Beregn, hvor langt kan man komme for 100 kr.?

Øvelse 3.3.2

En maskine koster 800.000 kr. og afskrives med 50.000 kr. om året.

- a) Bestem forskriften for funktionen $v(x)$, der beskriver maskinens værdi.
- b) Hvor mange år går der, før maskine er afskrevet?

Øvelse 3.3.3

En person besluttede sig for at holde øje med sin græsplæne i en periode. Personen fandt ud af, at græsset højde, målt i cm, kunne beskrives med funktionen

$$f(x) = 1,5x + 5$$

hvor x er antallet af uger efter i 1. maj 1980 og $f(x)$ er højden.

- a) Forklar betydningen af tallene 1,5 og 5 i forskriften.

Øvelse 3.3.4

En virksomhed sælger en vare.

Prisen $E(x)$, som funktion af efterspørgslen x , er givet ved:

$$E(x) = -2x + 400 \quad , \quad x \geq 0$$

Prisen $U(x)$, som funktion af udbuddet x , er givet ved:

$$U(x) = 2x + 200 \quad , \quad x \geq 0$$

Prisen er i kr. og mængden er i stk.

Ligevægtmængden er den mængde x , hvor udbud og efterspørgsel er lige store (surprise). Den tilhørende pris, kaldes ligevægtsprisen (surprise surprise).

- a) Bestem ligevægtmængden.
- b) Bestem ligevægtsprisen.

Øvelse 3.3.5

En virksomhed producerer en vare. De faste omkostninger er 30.000 kr., og derefter er der en enhedsomkostning på 140 kr. pr. kg. Virksomheden kan sælge varen for 200 kr. pr. kg.

- a) Bestem en forskrift for funktionen C som beskriver omkostningerne $C(x)$ i kr. som funktion af vægten x i kg.
- b) Bestem en forskrift for funktionen R som beskriver omsætningen $R(x)$ i kr. som funktion af vægten x i kg.
- c) Bestem omkostningerne ved en produktion på 100 kg.
- d) Hvor mange kg. skal virksomheden producere, før det giver overskud?

Øvelse 3.3.6

Prisen på en vare kan beskrives ved en lineær funktion $p(x) = ax + b$, hvor x er afsætningen i stk. Ved en pris på 800 kr. afsættes 1500 stk. og ved en pris på 1000 kr. afsættes 1100 stk.

x	1500	1100
$p(x)$	800	1000

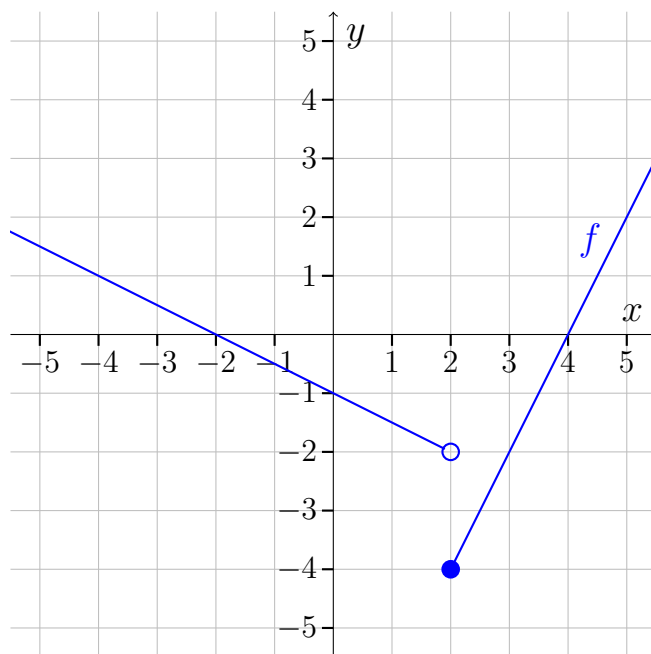
- a) Bestem en forskrift for p .
- b) Bestem prisen ved en afsætning på 500 stk.
- c) Bestem afsætningen ved en pris på 300 kr.

3.4 Stykkevis lineære funktioner

En *stykkevis lineær funktion* er en funktion, hvis graf er sammensat af linjestykker.

Eksempel 3.4.1

Her ses grafen for en stykkevis lineær funktion f .



Da en stykkevis lineær funktion består af flere dele, består forskriften også af flere dele. Funktionen fra eksempel 3.4.1 har forskriften:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{for } x < 2 \\ 2x - 8 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

En sådan forskrift kaldes en *gaffelforskrift*. Vi ser at funktionsværdierne er bestemt ved $-\frac{1}{2}x - 1$ når $x < 2$, og $2x - 8$ når $x \geq 2$. Vi kan regne $f(5)$ ved først at observere at $5 \geq 2$, så vi skal bruge udtrykket $2x - 8$ til regne funktionsværdien. Vi har derfor at

$$f(5) = 2 \cdot 5 - 8 = 2$$

Så $f(5) = 2$.

Øvelse 3.4.1

Vi fortsætter med funktionen med forskriften:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{for } x < 2 \\ 2x - 8 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

Beregn

a) $f(-2)$

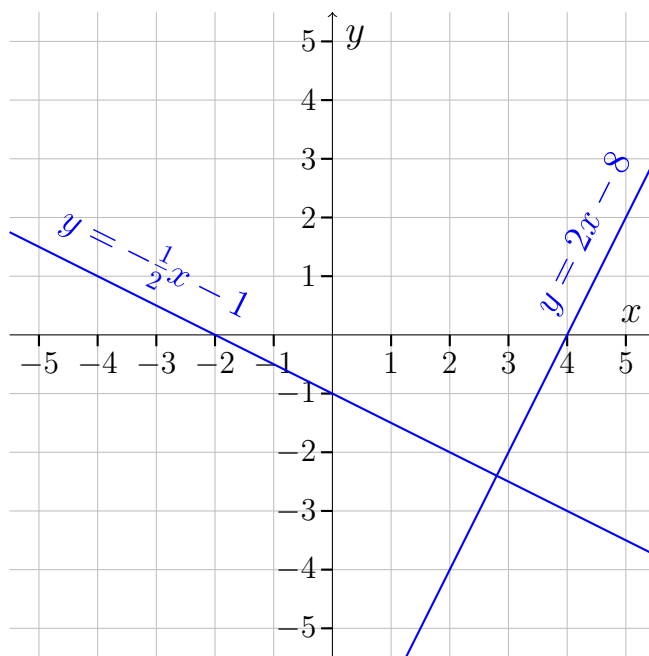
b) $f(2)$

c) $f(3)$

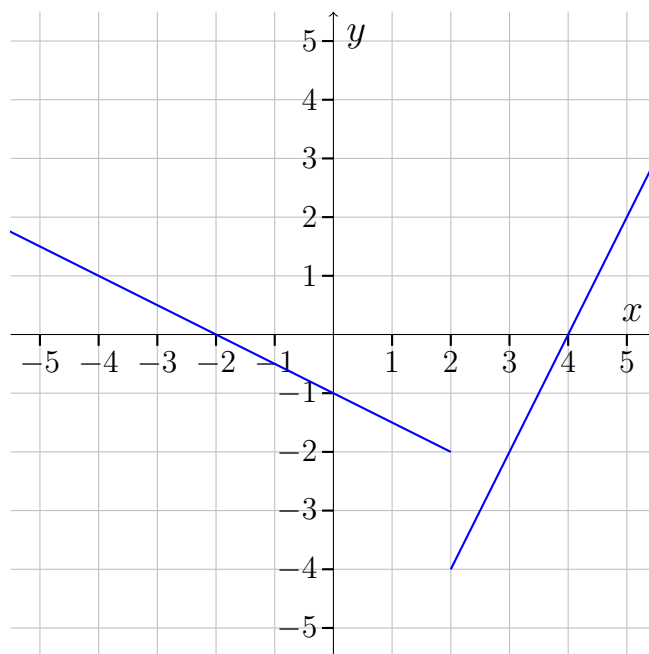
Man kan tegne grafen for en stykkevis lineær funktion ved at tegne alle linjerne i forskriften, hvorefter man visker dele af dem ud. Til sidst kan man tilføje endepunkter. Lad os se på, hvordan man tegner grafen for funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{for } x < 2 \\ 2x - 8 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

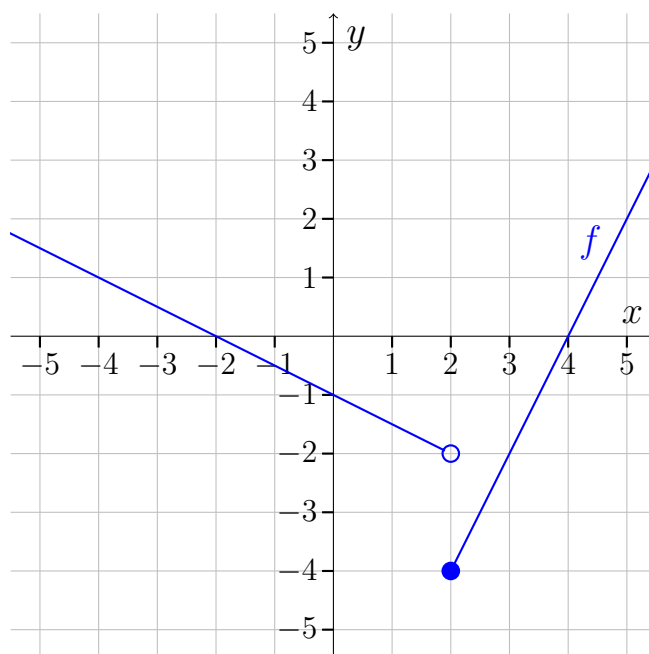
Vi starter med at tegne linjerne $y = -\frac{1}{2}x - 1$ og $y = 2x - 8$:



Funktionen skal skifte ved $x = 2$, så vi visker grafen for $y = 2x - 8$ ud til venstre for $x = 2$ og visker grafen for $y = -\frac{1}{2}x - 1$ ud til højre for $x = 2$.



Vi mangler nu bare at tilføje endepunkter. Da venstre del gælder for $x < 2$, og højre del gælder for $x \geq 2$, må det være højre del, som gælder for $x = 2$, og derfor skal der være et lukket (udfyldt) endepunkt på højre del og et åbent endepunkt (ikke udfyldt) på venstre del:



Øvelse 3.4.2

Tegn grafen for funktionerne:

a)

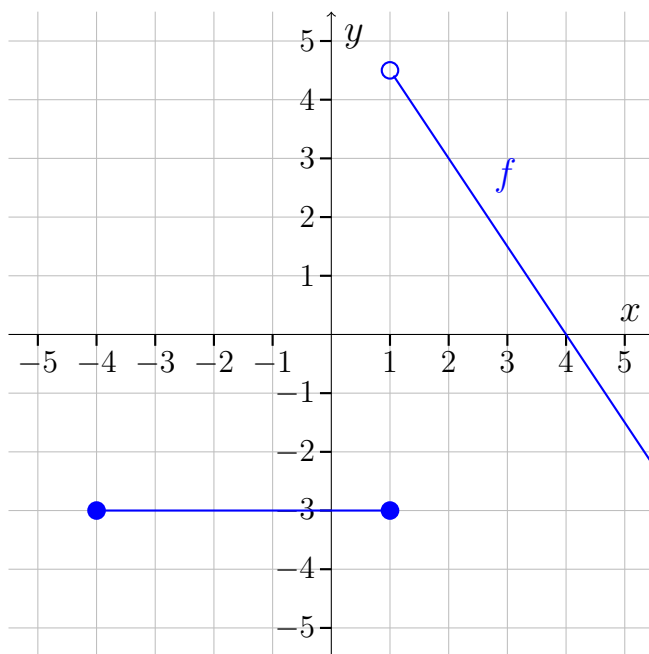
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{for } x \leq -1 \\ x - 4 & \text{for } x > -1 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{for } x \leq -2 \\ 3 & \text{for } -2 \leq x \leq 1 \\ 4x - 3 & \text{for } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Eksempel 3.4.2

Vi vil bestemme forskriften for den stykkevise lineære funktion givet ved grafen:



Venstre del er nem, det er jo bare den konstante funktion $f(x) = -3$, den er gældende når x ligger mellem -4 og 1 , begge punkter er inklusive, da de er markeret med en udfyldt bolle. Så vi har en gren som hedder:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{for } -4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Vi kan bestemme forskriften for højre del ved at vælge to punkter på grafen og så bruge sætning 3.2.1 (den sætning med forskriften ud fra to punkter). Vi

aflæser to pæne punkter på højre del:

$$(2, 3) \quad \text{og} \quad (4, 0)$$

Vi indsætter først i formlen for a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{0 - 3}{4 - 2} \\ &= -1,5 \end{aligned}$$

Så beregnes b :

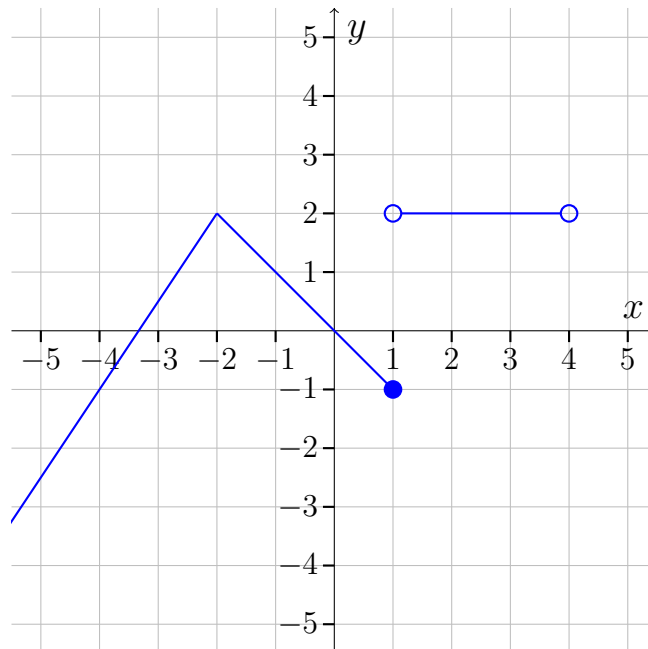
$$\begin{aligned} b &= y_0 - ax_0 \\ &= 3 - (-1,5) \cdot 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Altså højre del er bestemt ved $y = -1,5x + 6$, og da den er gældende for $x > 0$ (endepunktet er markeret med en ikke udfyldt bolle) får vi:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{for } -4 \leq x \leq 1 \\ -1,5x + 6 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

Øvelse 3.4.3

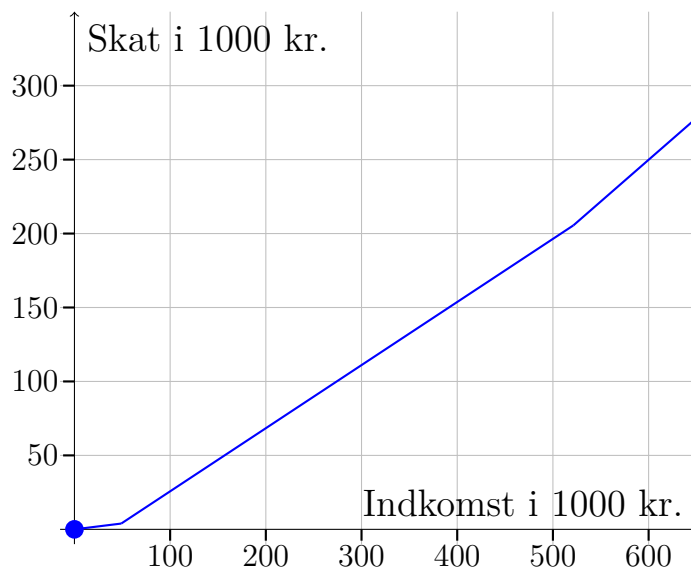
Betragt den stykkevis lineære funktion f :



- a) Bestem forskriften for f
- b) Beregn $f(-2)$ og $f(1)$.

Anvendelse af stykkevis lineære funktioner

Til slut vil vi se på en enkelt anvendelse af stykkevis lineære funktioner. I et progressivt skattesystem betaler dem med højere indkomster en større procentdel i skal end dem med lavere indkomster. Jeg har opgivet at følge med i det danske skattesystem, men på et tidspunkt (måske 2020?) så det ca. sådan her ud:



Funktionen viser det samlede skattebeløb man betaler som funktion af indkomsten x . Man kan se at kurven har et skarpt knæk ved ca. 50.000 kr. og hvis man kigger nøje, kan man se, at den også knækker ved 520.000 kr.

Øvelse 3.4.4

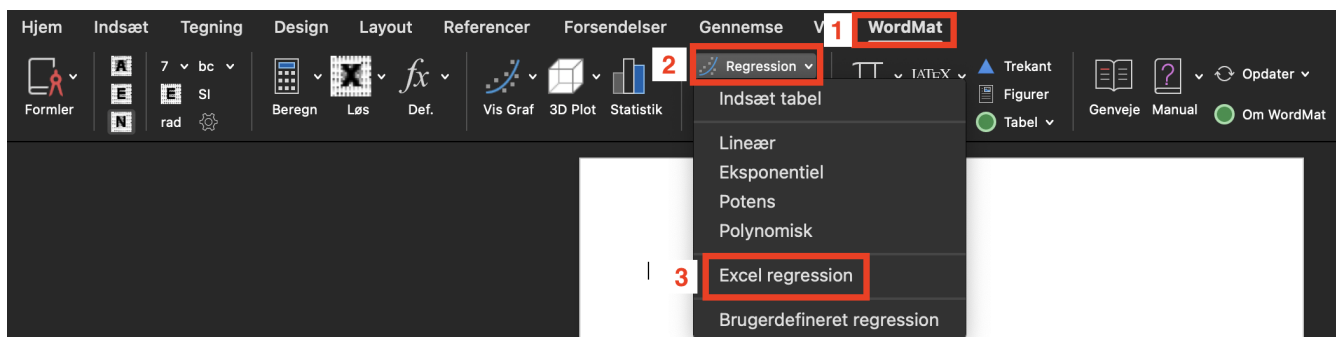
Betragt grafen for skattesystemet.

- Forklar betydningen af de forskellige hældninger på grafen.
- Bestem hældningen for den sidste del af grafen (bare sådan ca.) og forklar, hvad den udtrykker.

3.5 Lineær regression i WordMat

OBS: Dette afsnit **kan** springes over, hvis du er på den gamle ordning (startet før 2024). I stedet skal du så læse afsnit 6.4.

Vi skal bruge et Excel-ark fra WordMat. Hvis du har WordMat installeret, finder du det her:



Hvis ikke du har WordMat installeret, kan du [downloade arket her](#).

Øvelse 3.5.1

For at kunne følge med i resten har du brug for det omtalte Excel-ark.

- a) Åben det omtalte Excel-ark. Enten fra WordMat eller ved at downloade det via linket. Sig ja til "makroer" når du åbner det.

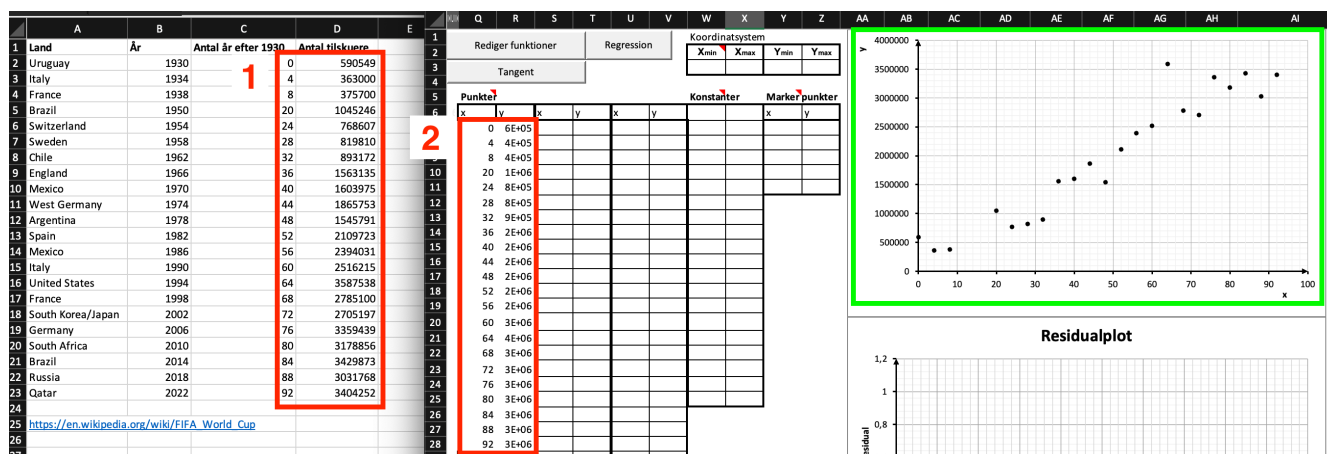
Lineær regression bruges til at beskrive udviklinger, som er tilnærmelsesvist lineære. Vi vil i det følgende kigge på tilskuerudviklingen ved VM i fodbold i perioden 1930-2022:

Land	År	Antal år efter 1930	Antal tilskuere
Uruguay	1930	0	590549
Italy	1934	4	363000
France	1938	8	375700
Brazil	1950	20	1045246
Switzerland	1954	24	768607
Sweden	1958	28	819810
Chile	1962	32	893172
England	1966	36	1563135
Mexico	1970	40	1603975
West Germany	1974	44	1865753
Argentina	1978	48	1545791
Spain	1982	52	2109723
Mexico	1986	56	2394031
Italy	1990	60	2516215
United States	1994	64	3587538
France	1998	68	2785100
South KoreaJapan	2002	72	2705197
Germany	2006	76	3359439
South Africa	2010	80	3178856
Brazil	2014	84	3429873
Russia	2018	88	3031768
Qatar	2022	92	3404252

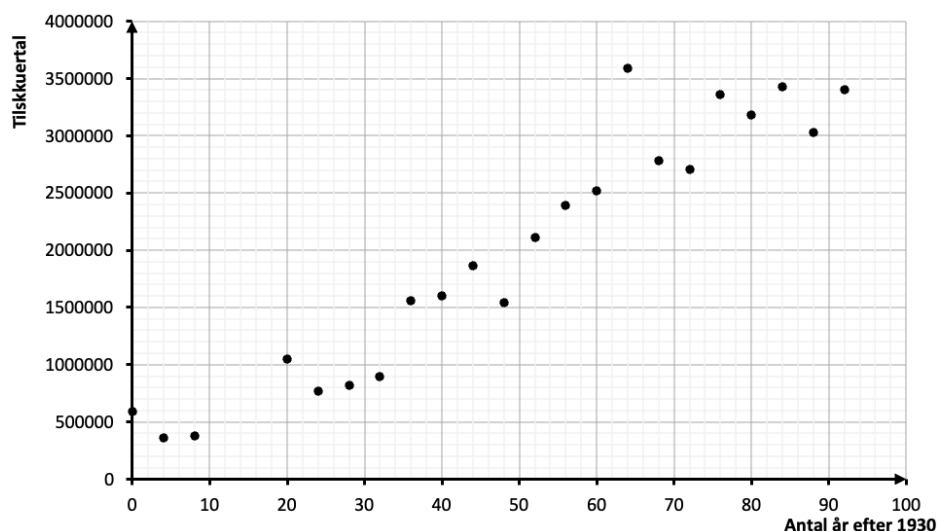
Excel-arket med tilskuerudviklingen kan [downloades her](#).

Konstruktion af xy-plot i WordMat

Vi ønsker at få et overblik over udviklingen. Vi åbner Excel-filen med tilskuerudviklingen, rammer de to sidste kolonner ind og copy paster over i WordMat-arket som vist her:



Indholdet i den grønne boks kaldes et xy-plot og bruges til at visualisere udviklingen. På x -aksen har vi "antal af år efter 1930", og på y -aksen har vi tilskuertallet. For at gøre det tydeligt går vi ind og ændre aksetitlerne (bare ved at dobbeltklikke på "x" og "y" på akserne):



Flot ser det ud!

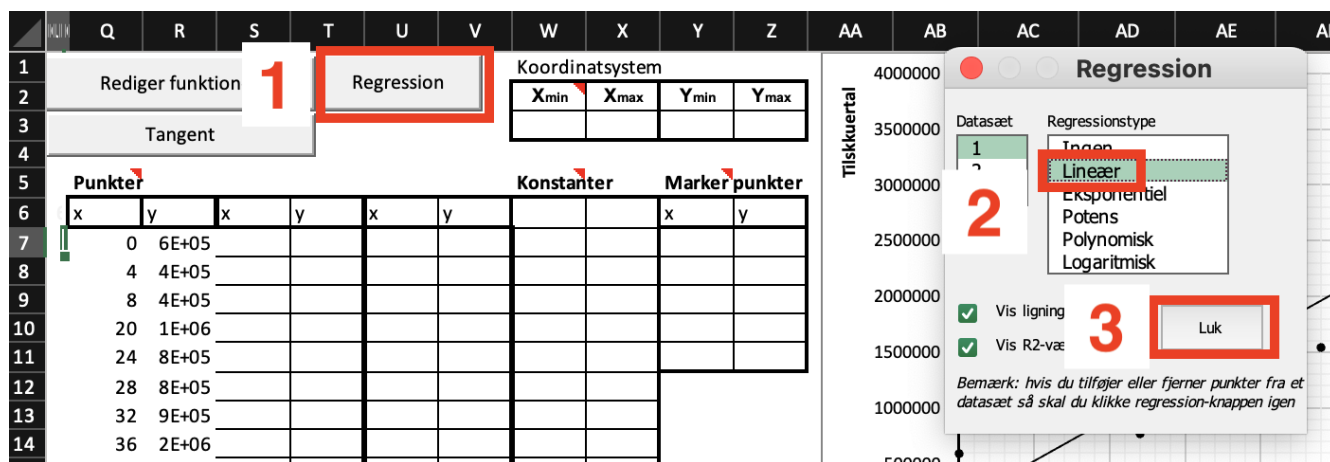
Øvelse 3.5.2

Det er nu din tur

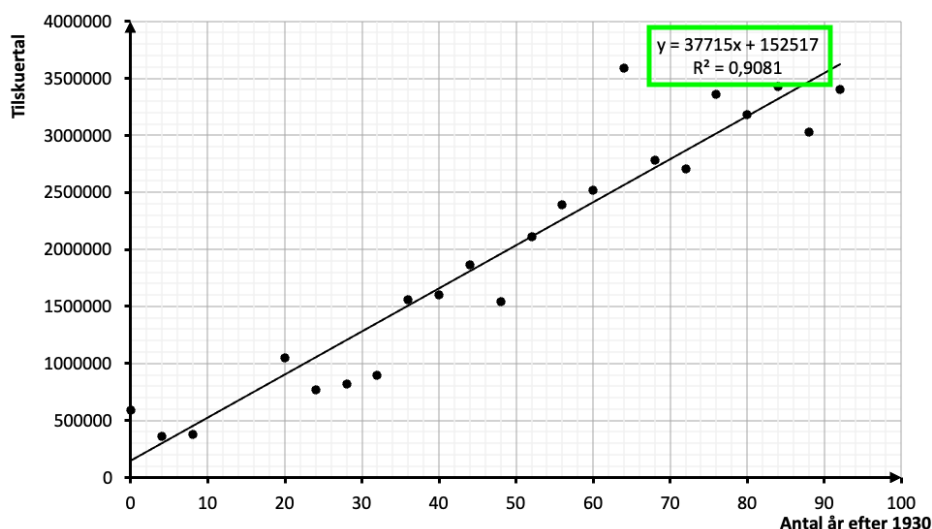
- Lav det omtalt xy-plot i Excel.

Konstruktion af regressionsmodel i WordMat

Vi kan se i xy-plottet, at der er en lineær tendens i udviklingen. Dvs. det ser ud som om, at udviklingen følger en lineær funktion, men med nogle tilfældige afvigelser undervejs. Vi kan finde den lineær funktion ved at klikke som vist her:



Det giver os:



Vi har nu fundet den linje, som passer bedst muligt til punkterne. Vi ser, at punkterne ligger tilfældigt omkring linjen, og det er godt. Er der systematiske afvigelser fra linjen, er der nemlig noget, der tyder på, at vi ikke kan beskrive udviklingen med en lineær funktion. I denne grønne boks ses forskriften for linjen:

$$y = 37715x + 152517$$

Denne funktion kaldes for en *lineær model* for udviklingen. De 37715 kan fortolkes som den årlige stigning af tilskuere i perioden 1930-2022. Det er klart at den faktiske stigning har været forskellig fra år til år, så de 37715 fungerer som et slags "gennemsnit". De 152517 er tilskuerantallet i år 1930 ifølge modellen. Det faktiske antal tilskuere i 1930 var 590549, som det ses i tabellen, så modellen rammer ret skævt her. I screenshottet ses også at $R^2 = 0,9081$. Betydningen af dette vil blive forklaret om lidt.

Eksempel 3.5.1

Vi kan bruge modellen til at forudsige, hvor mange tilskuere der vil være til VM i 2034. Vi regner først, hvor mange år det er efter 1930:

$$2034 - 1930 = 104$$

Vi kan så sætte 104 ind i stedet for x i vores model og få tilskuertallet:

$$y = 37715 \cdot 104 + 152517 = 4074877$$

Så der vil være ca. 4 mio. tilskuere til VM i 2034, hvis den nuværende tendens fortsætter.

Øvelse 3.5.3

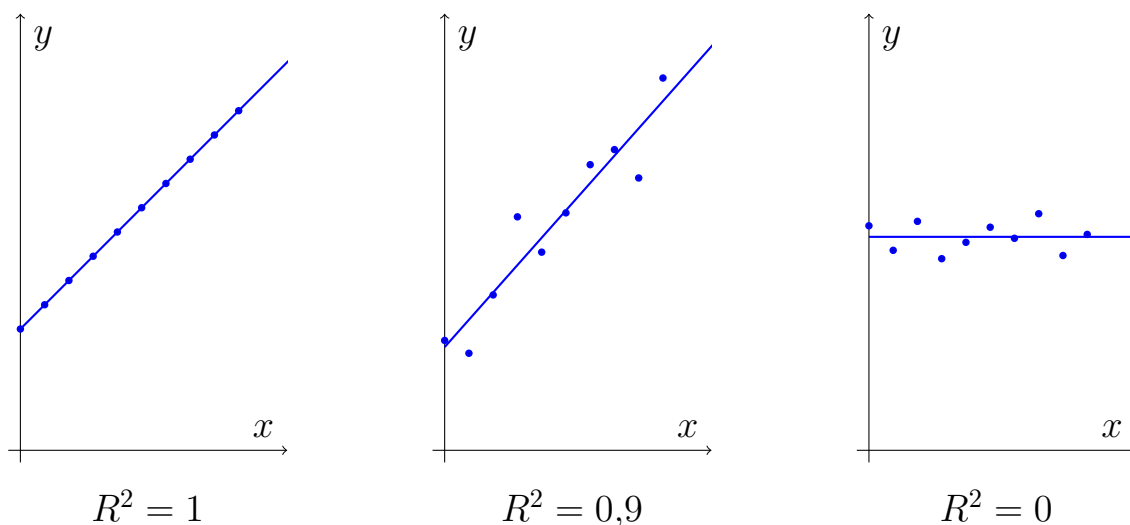
Du skal nu se om du kan komme til den samme model som mig.

- Opstil en lineær model for udviklingen i antallet af tilskuere i perioden 1930-2022.
- Bestem den årlige vækst i antallet af tilskuere i perioden.
- Hvor mange tilskuere var der, ifølge modellen, til VM i Italien i 1990? Sammenlign med det faktiske antal.

Determinationskoefficient og korrelationskoefficient

Da vi lavede den lineære model for tilskuerudviklingen, fik vi også at vide, at $R^2 = 0,9081$. Tallet R^2 kaldes *determinationskoefficienten* er et mål for, hvor godt modellen beskriver udviklingen. Determinationskoefficienten ligger altid mellem 0 og 1, og den er tæt på 1, når modellen passer godt med udviklingen.

Her er tre eksempler på xy-plot med forskellig R^2 værdi:



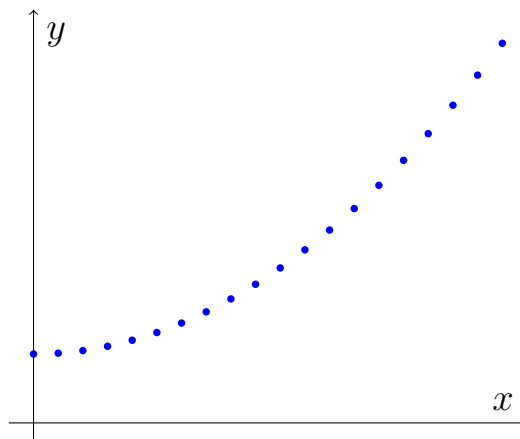
I det første plot er $R^2 = 1$, hvilket betyder at alle punkterne ligger på regressionslinjen. Dvs., at modellen giver en fuldstændig beskrivelse af udviklingen. I det andet plot er $R^2 = 0,9$. Her der en klar voksende lineær tendens, men punkterne afviger noget fra linjen. I det sidste plot er $R^2 = 0$, hvilket umiddelbart er overraskende, da punkter ligger ca. ligeså tæt på linjen som i plot nr. 2. Når vi siger, at R^2 viser, hvor godt modellen beskriver udviklingen, mener vi i forhold til en vandret linje. I det sidste plot, kan vi ikke finde en lineær funktion, som beskriver udviklingen bedre end en vandret linje, og derfor er $R^2 = 0$.

I stedet for at angive determinationskoefficienten, kan man angive en størrelse som hedder *korrelationskoefficienten*. Den betegnes med r og fås ved at tage kvadratroden af R^2 . Dog skal man sætte et minus på, hvis udviklingen er aftagende.

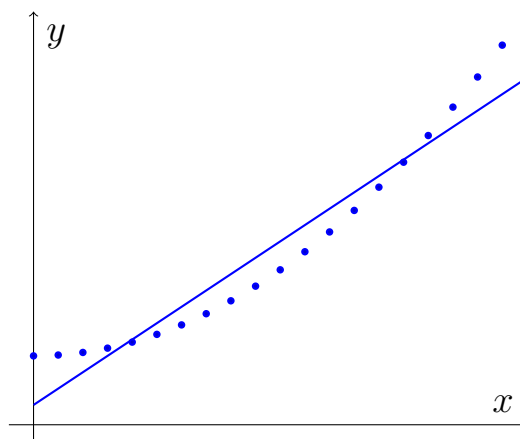
Man kunne tro, at hvis bare R^2 er tæt på 1, så har man også en god model for ens data. Men sådan er det ikke nødvendigvis. Det er vigtigt, at punkterne ligger på en tilfældig måde omkring linjen, så det rent faktisk ligner en lineær funktion med nogle tilfældige afvigelser.

Eksempel 3.5.2

Betragt xy-plottet:

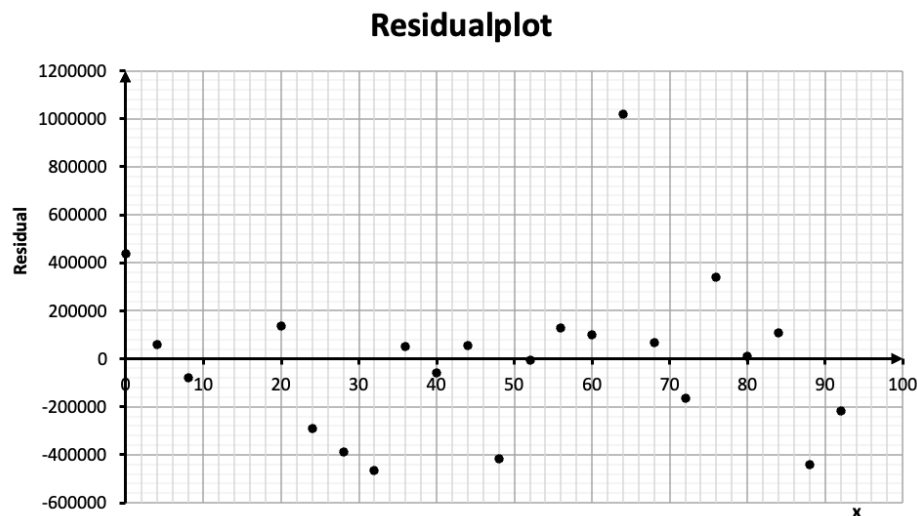


Den ligner ikke en linje, men lad os alligevel prøve at lave en lineær model:



Denne model har $R^2 = 0,93$, hvilket da er rimelig tæt på 1, men igen, det er tydeligt, at der ikke er tale om en lineær udvikling. Så en høj R^2 er ikke nok til at sikre at man har fat i en god model!

I praksis kan det være svært at afgøre, om der er tale om tilfældige eller systematiske afvigelser alene ud fra xy-plottet og modellen. Nogle gange kan det hjælpe at lave et såkaldt *residualplot*. Det er et diagram, som viser afvigelserne mellem punkter og model. WordMat-arket forærer os residualplottet samtidig med at vi laver den lineære model. Det dukker op lige under xy-plottet. Residualplottet for tilskuerudviklingen til VM i fodbold ser således ud:



På residualplottet kan vi se, hvordan modellen afviger fra data. F.eks. har det første punkt i residualplottet en y -værdi på ca 440.000. Det betyder at det første punkt i xy -plottet ligger 440.000 over linjen. Dvs., at hvis vi bruger vores model til at regne tilskuertallet for først VM, vil vi få et resultat, der er 440.000 for lavt. Vi kalder værdierne i residualplottet for *residualer*. Residualerne i det konkrete residualplot ser ud til at fordele sig tilfældigt omkring x -aksen, så vi har ikke nogen grund til at tro, at der skulle være noget galt med vores model.

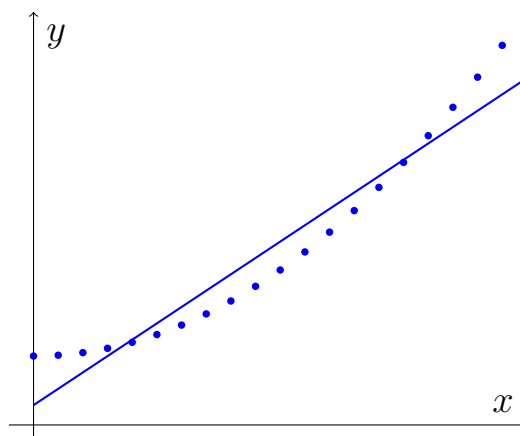
Øvelse 3.5.4

Antag at en aftagende lineær model har $R^2 = 0,9814$

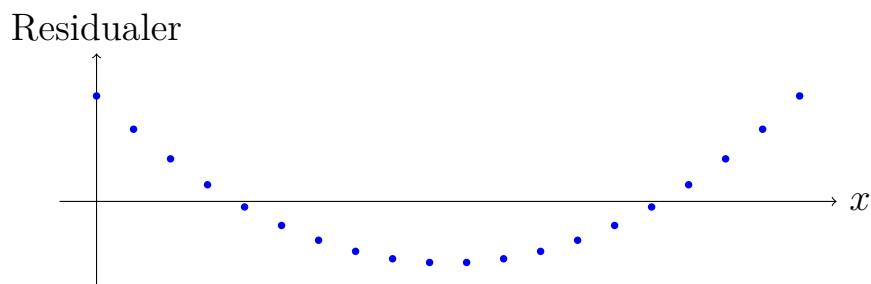
- Er der tale om en tilnærmelsesvis lineær udvikling?
- Bestem korrelationskoefficienten.

Eksempel 3.5.3

Vi vender tilbage til situationen i eksempel 3.5.2:



Som vi også bemærkede i eksempel 3.5.2, kan vi se, at tendensen i punkterne ikke er lineær, og derfor er den lineære model ikke nogen god model. Laver man et residualplot, vil det se således ud:



Her ses det tydeligt, at residualerne ikke fordeler sig tilfældigt omkring linjen, hvilket altså bekræfter, at vores model er problematisk. Kigger man grundigt på xy-plottet og residualplottet, er det klart, at der ikke er nogen ny information i residualplottet. I begge diagrammer kan man se, hvordan punkterne afviger fra linjen — det er bare lidt nemmere at se i residualplottet.

Vi vil møde situationer, hvor der er system i residualerne — især når vi kigger på udviklinger over tid. Er der system i residualerne, er det enten fordi modellen er skrupforkert, eller fordi modellen kun formår at beskrive i udviklingen i grove træk. Vi vil bruge xy-plottet til at afgøre, om det er det ene eller det andet. Ser xy-plottet fint ud (tydelig lineær tendens) samtidig med at residualplottet viser system i residualerne vil vi acceptere modellen, men tage forbehold for, at der er tendenser som modellen ikke fanger. Det skal dog siges, at det er forsimplet statistik vi laver her på HHX, og at man i virkeligheden har forskellige muligheder for at forbedre/ændre modellen, så man kan slippe af med de systematiske afvigelser.

Øvelse 3.5.5

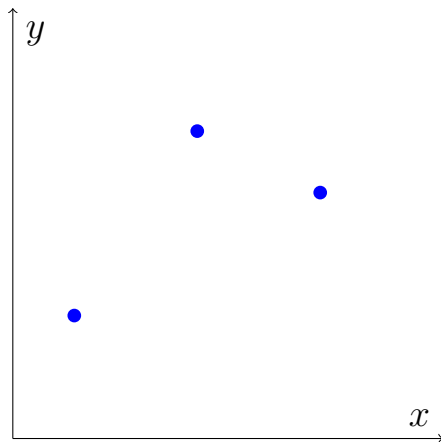
I denne øvelse skal du se på jordens befolkningstal i perioden 1970-2021.

- Download et Excel-ark med data [her](#) og tilføj en søjle til arket, som indeholder antallet af år efter 1970.
- Opstil et xy-plot, som viser jordens befolkningstal som funktion af antallet af år **efter** 1970. Vær opmærksom på, at du muligvis skal højreklikke og vælge "Indsæt speciel -> Værdier", når du indsætter dine data i WordMat (det afhænger af, hvordan du har tilføjet den ekstra søjle i det oprindelige ark).
- Opstil en lineær model for udviklingen i befolkningstal og bestem R^2 .
- Forklar betydningen af tallene i modellen,
- Bestem hvornår vi, ifølge modellen, er 10 mia. mennesker på jorden.
- Lav et residualplot og vurder modellen.

Det er vigtigt at bemærke, at den type modeller, vi kigger på her, har en begrænset levetid. Det kan godt være, at der har været en lineær vækst i jordens befolkning de sidste 50 år, men det betyder ikke at væksten også vil være lineær de næste 50 år. Derfor bør man være forsigtig med at bruge den slags modeller til at fremskrive udviklinger.

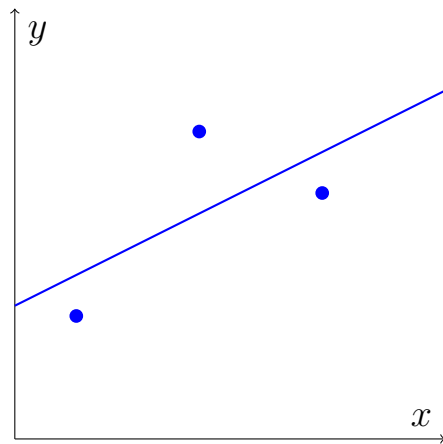
Ekstra

Vi skal nu se, hvordan den lineære model fremkommer når man laver regression i WordMat (eller andre tilsvarende værktøjer). Vi tager udgangspunkt i et simpelt xy-plot med kun tre punkter:

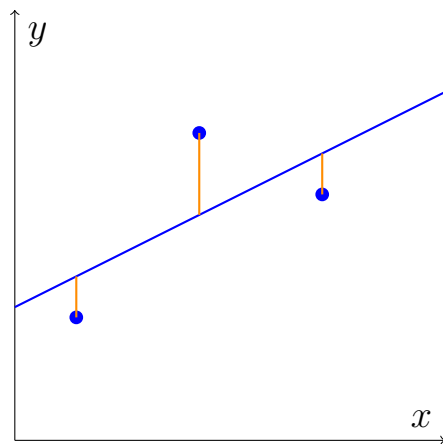


Vi tegner nu (bare så godt vi kan) en lineær funktion, der bedst muligt går igennem

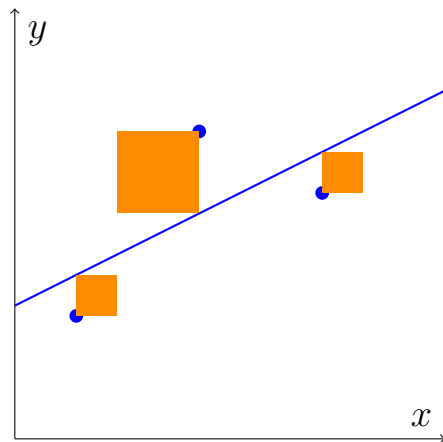
punkterne. Det er svært, da der ikke er en tydelig lineær tendens.



Vi markerer nu residualerne:



Residualerne viser afvigelsen mellem model og data for det pågældende punkt. Man kunne godt tro, at det gik ud på at minimere denne afstand. Altså at vi justerede linjen indtil, at den samlede lodrette afstand fra punkterne til linjen var mindst muligt. Men det er ikke helt det vi gør. I stedet tegner vi kvadrater med residualerne som sidelængder:



Det er arealet af disse kvadrater som WordMat minimerer, når vi laver lineær

regression. Altså WordMat finder regressionsmodellen ved at justere på linjen, indtil det samlede areal af kvadraterne ikke kan blive mindre.

3.6 Lineær regression i Excel og GeoGebra

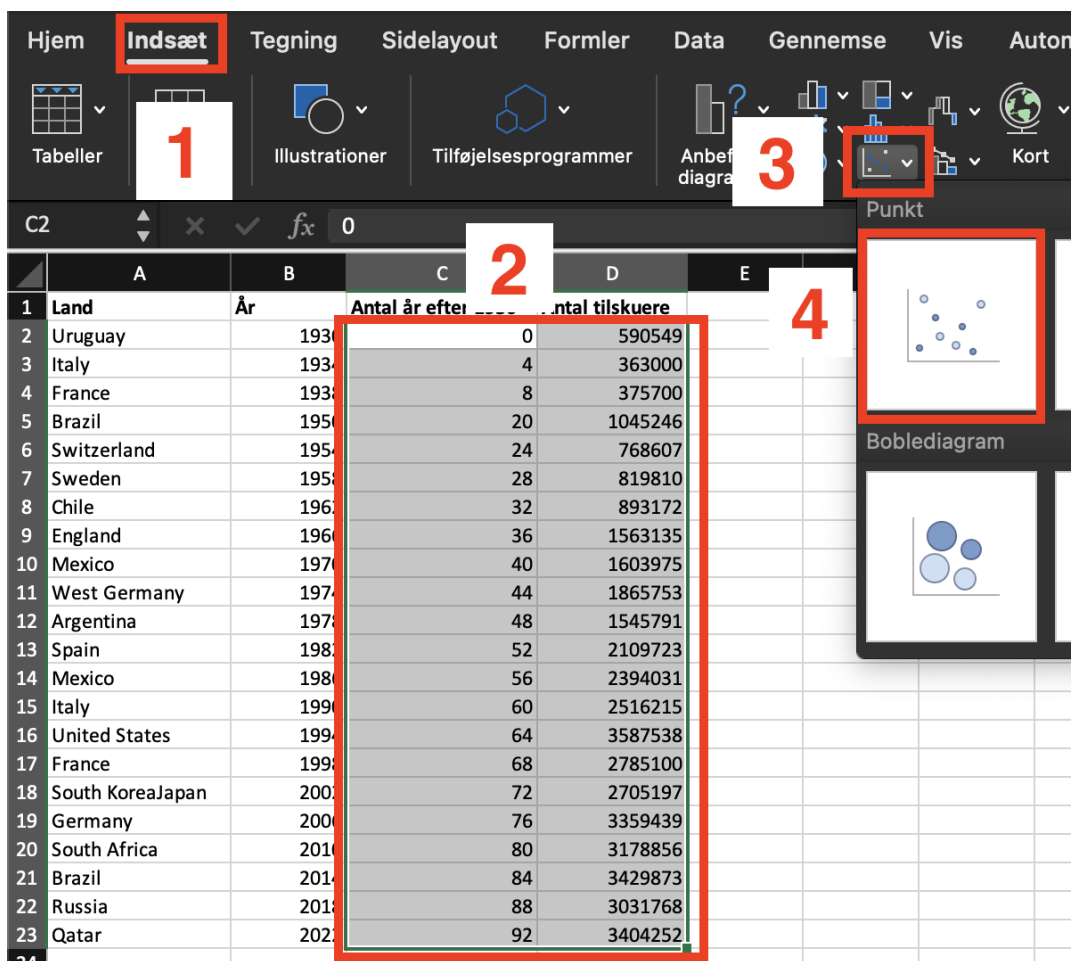
OBS: Det afsnit er for elever på den gamle ordning (startet før 2024) eller for elever, som ønsker at lære flere metoder til at lave lineær regression. Er man på den nye ordning er afsnittet valgfrit, men planlægger man at afslutte matematik på A-niveau, så anbefaler jeg, at man regner dette afsnit også.

Lineær regression bruges til at beskrive udviklinger, som er tilnærmelsesvist lineære. Vi vil i det følgende kigge på tilskuervedviklingen ved VM i fodbold i perioden 1930-2022. Vi vil tage udgangspunkt i et Excel-ark, der indeholder følgende:

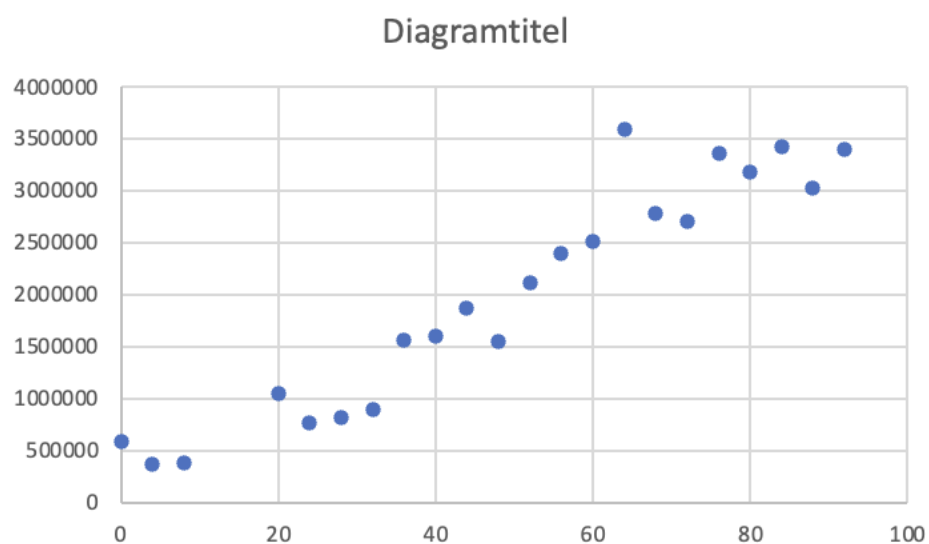
Land	År	Antal år efter 1930	Antal tilskuere
Uruguay	1930	0	590549
Italy	1934	4	363000
France	1938	8	375700
Brazil	1950	20	1045246
Switzerland	1954	24	768607
Sweden	1958	28	819810
Chile	1962	32	893172
England	1966	36	1563135
Mexico	1970	40	1603975
West Germany	1974	44	1865753
Argentina	1978	48	1545791
Spain	1982	52	2109723
Mexico	1986	56	2394031
Italy	1990	60	2516215
United States	1994	64	3587538
France	1998	68	2785100
South KoreaJapan	2002	72	2705197
Germany	2006	76	3359439
South Africa	2010	80	3178856
Brazil	2014	84	3429873
Russia	2018	88	3031768
Qatar	2022	92	3404252

Konstruktion af xy-plot i Excel

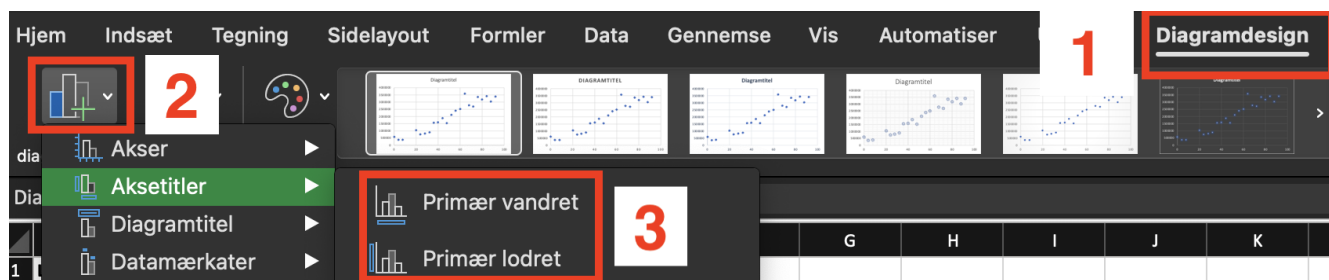
Vi ønsker at få et overblik over udviklingen. Vi åbner Excel-filen, rammer de to sidste kolonner ind og indsætter et punktdiagram:



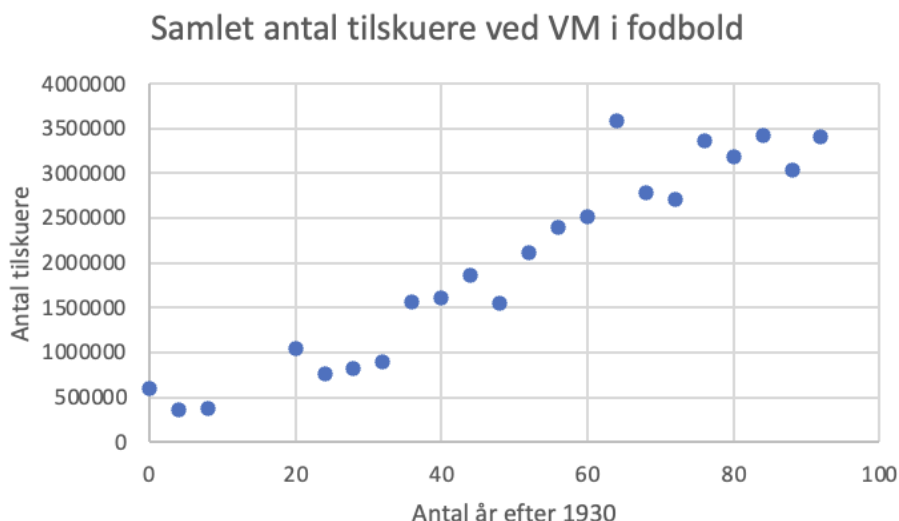
Det giver os følgende diagram:



Det er sådan set et fint diagram bortset fra, at man ikke kan se, hvad det forstiller. Vi tilføjer aksetitler:



Klikker vi diagramtitlen og aksetitlerne, kan vi ændre dem:



Det var meget bedre. Nu kan man se, hvad diagrammet forstiller. Et sådan diagram kaldes et *xy-plot*. Vi kan se, at der er en lineær tendens i udviklingen. Dvs. det ser ud som om, at udviklingen følger en lineær funktion, men med nogle tilfældige udsving undervejs.

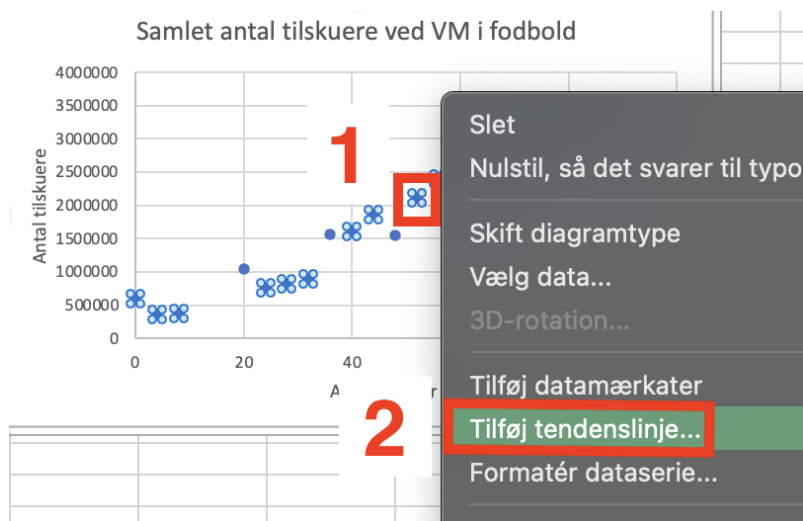
Øvelse 3.6.1

Excel-arket med tilskuerudviklingen kan downloades [downloades her](#).

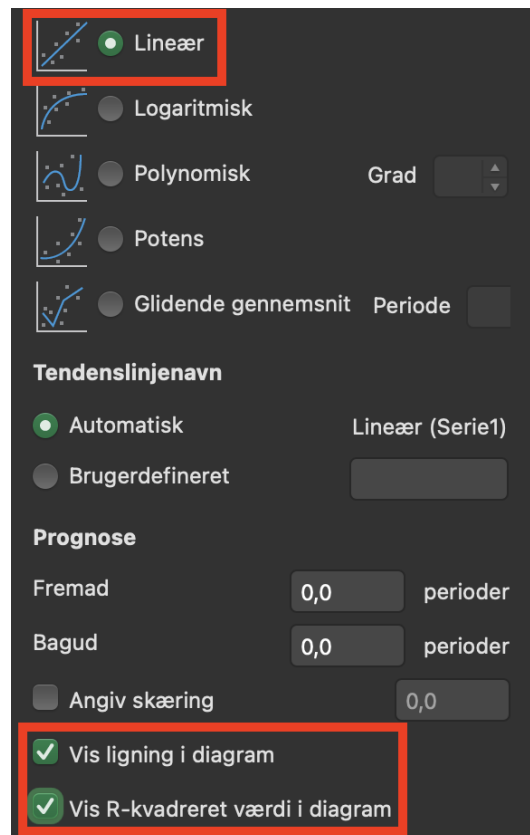
- a) Lav selv xy-plottet ved at følge ovenstående vejledning. Husk at ændre diagramtitlen og tilføj aksetitler. Gem Excelarket, du skal bruge det i næste øvelse.

Lineær regression i Excel

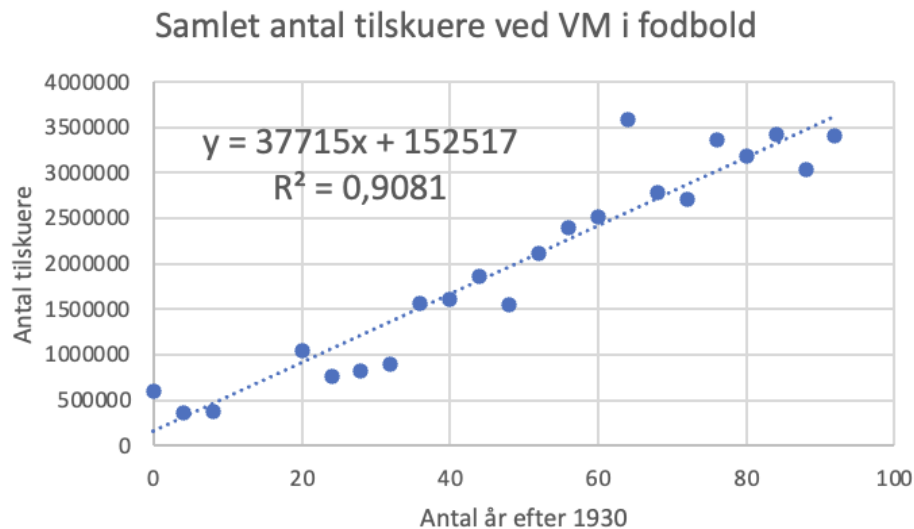
Vi vil nu finde en forskrift for den linje, som passer bedst muligt med punkterne. Vi højreklikker på et af punkterne xy-plottet og tilføjer en *tendenslinje*:



Ude til højre vælger vi "Lineær", "Vis ligning i diagram" og "Vis R-kvadreret værdi i diagram"



Det giver os følgende:



Excel har nu fundet den linje, som passer bedst muligt til punkterne. Vi ser, at punkterne ligger tilfældigt omkring linjen, og det er godt. Er der systematiske afvigelser fra linjen, er der nemlig noget, der tyder på, at vi ikke kan beskrive udviklingen med en lineær funktion. Excel har også givet os forskriften for linjen:

$$y = 37715x + 152517$$

Denne funktion kaldes for en *lineær model* for udviklingen. De 37715 kan fortolkes som den årlige stigning af tilskuere i perioden 1930-2022. Det er klart at den faktiske stigning har været forskellig fra år til år, så de 37715 fungerer som et slags "gennemsnit". De 152517 er tilskuerantallet i år 1930 ifølge modellen. Det faktiske antal tilskuere i 1930 var 590549, som det ses i tabellen, så modellen rammer ret skævt her. I screenshottet ses også at $R^2 = 0,91$. Betydningen af dette vil blive forklaret om lidt.

Eksempel 3.6.1

Vi kan bruge modellen til at forudsige, hvor mange tilskuere der vil være til VM i 2034. Vi regner først, hvor mange år det er efter 1930:

$$2034 - 1930 = 104$$

Vi kan så sætte 104 ind i stedet for x i vores model og få tilskuertallet:

$$y = 37715 \cdot 104 + 152517 = 4074877$$

Så der vil være ca. 4 mio. tilskuere til VM i 2034, hvis tendensen fortsætter.

Øvelse 3.6.2

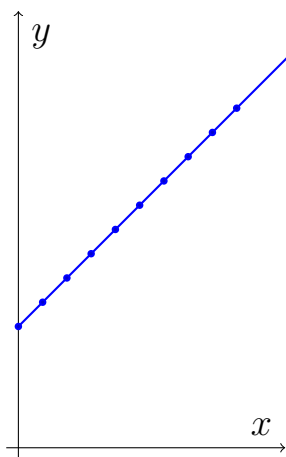
Du skal nu arbejde videre med dit Excel-ark fra sidste øvelse og se, om du kan komme til den samme model som mig.

- Opstil en lineær model for udviklingen i antallet af tilskuere i perioden 1930-2022.
- Bestem den årlige vækst i antallet af tilskuere i perioden.
- Hvor mange tilskuere var der, ifølge modellen, til VM i Italien i 1990? Sammenlign med det faktiske antal.

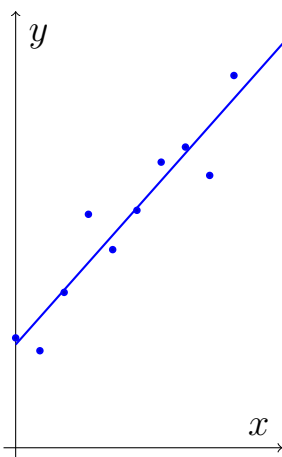
Determinationskoefficient og korrelationskoefficient

Da vi opstillede den lineære model for tilskuerudviklingen, fik vi også at vide, at $R^2 = 0,91$. Tallet R^2 kaldes *determinationskoefficienten* er et mål for, hvor godt modellen beskriver udviklingen. Determinationskoefficienten ligger altid mellem 0 og 1, og den er tæt på 1, når modellen passer godt med udviklingen.

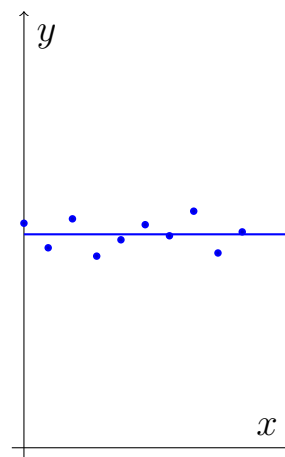
Her er tre eksempler på xy-plot med forskellig R^2 værdi:



$$R^2 = 1$$



$$R^2 = 0,9$$



$$R^2 = 0$$

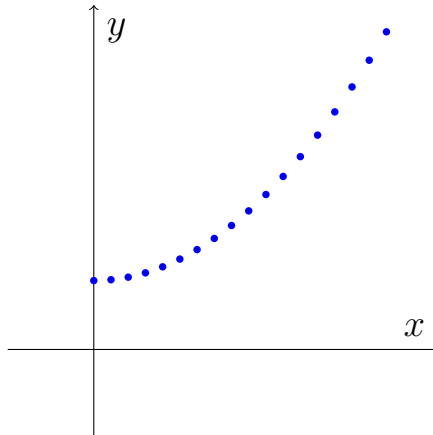
I det første plot er $R^2 = 1$, og det er den kun, når punkterne ligger på regressionslinjen. Det betyder, at modellen giver en fuldstændig beskrivelse af udviklingen. I det andet plot er $R^2 = 0,9$. Her der en klar voksende lineær tendens, men punkterne varierer noget fra linjen. I det sidste plot er $R^2 = 0$, hvilket umiddelbart er overraskende, da punkter ligger ca. ligeså tæt på linjen som i plot nr. 2. Når vi siger, at R^2 viser, hvor godt modellen beskriver udviklingen, mener vi i forhold til en vandret linje. I det sidste plot, kan vi ikke finde en lineær funktion, som beskriver udviklingen bedre end en vandret linje, og derfor er $R^2 = 0$.

Man kunne tro, at hvis bare R^2 er tæt på 1, så har man også en god model for

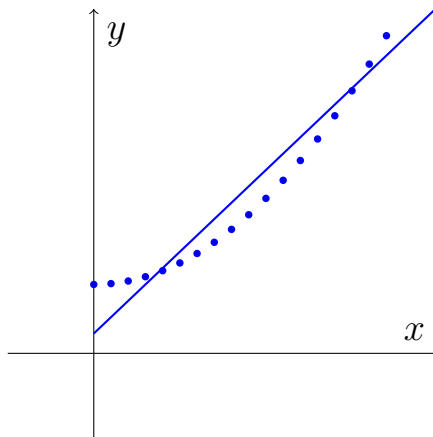
ens data. Men sådan er det ikke nødvendigvis. Det er vigtigt, at punkterne ligger på en tilfældig måde omkring linjen, så det rent faktisk ligner en lineær funktion med nogle tilfældige afvigelser.

Eksempel 3.6.2

Betragt xy-plottet:



Den ligner ikke en linje, men lad os alligevel prøve at lave en lineær model:

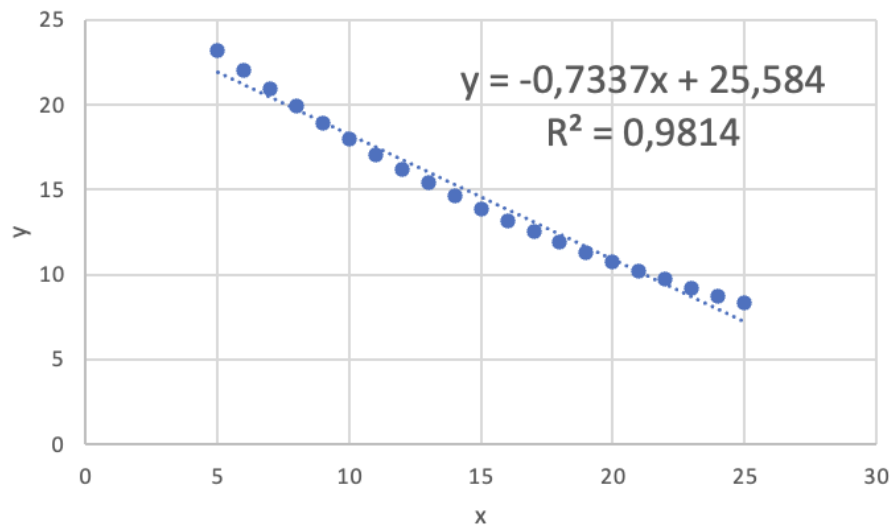


Denne model har $R^2 = 0,93$, hvilket da er rimelig tæt på 1, men vi kan se at punkterne ikke ligger tilfældigt omkring linjen. Først ligger de over, så er der et langt stykke, hvor de ligger under, og til sidst ligger de over igen. Så udviklingen kan ikke beskrives med en lineær model.

I stedet for at angive determinationskoefficienten kan man angive en størrelse som hedder *korrelationskoefficienten*. Den betegnes med r og fås ved at tage kvadratroden af R^2 . Dog skal man sætte et minus på, hvis udviklingen er aftagende.

Øvelse 3.6.3

Betragt den følgende xy-plot lavet i Excel:



- a) Er der tale om en tilnærmelsesvis lineær udvikling?
- b) Bestem korrelationskoefficienten.

Hvis du har tænkt dig at lave ekstraafsnittet, så gør det inden du regner den næste øvelse. I ekstraafsnittet får du nemlig et alternativ til at regne i Excel.

Øvelse 3.6.4

I denne øvelse skal vi se på jordens befolkningstal i perioden 1970-2021.

- a) [Download data her](#) og tilføj en søjle i Excel, som indeholder antallet af år efter 1970.
- b) Opstil et xy-plot, som viser jordens befolkningstal som funktion af antallet af år efter 1970.
- c) Opstil en lineær model for udviklingen i befolkningstal, og vurder om modellen giver en god beskrivelse af data.
- d) Forklar, betydningen af tallene i modellen,
- e) Bestem hvornår vi, ifølge modellen, er 10 mia. mennesker på jorden.

Det er vigtigt at bemærke, at den type modeller, vi kigger på her, har en begrænset levetid. Det kan godt være, at der har været en lineær vækst i jordens befolkning de sidste 50 år, men det betyder ikke at væksten også vil være lineær de næste 50 år. Derfor bør man være forsigtig med at bruge den slags modeller

til at fremskrive udviklinger. Faktisk kan man allerede fornemme et lille dyk i befolkningsvæksten... Spørgsmålet er om det tilfældigt eller en tendens? Det vil de kommende år vise.

Øvelse 3.6.5

Så befolkningstilvæksten er lineær... men hvor længe mon?

a) Bestem jordens befolkning om 10 mia. år.

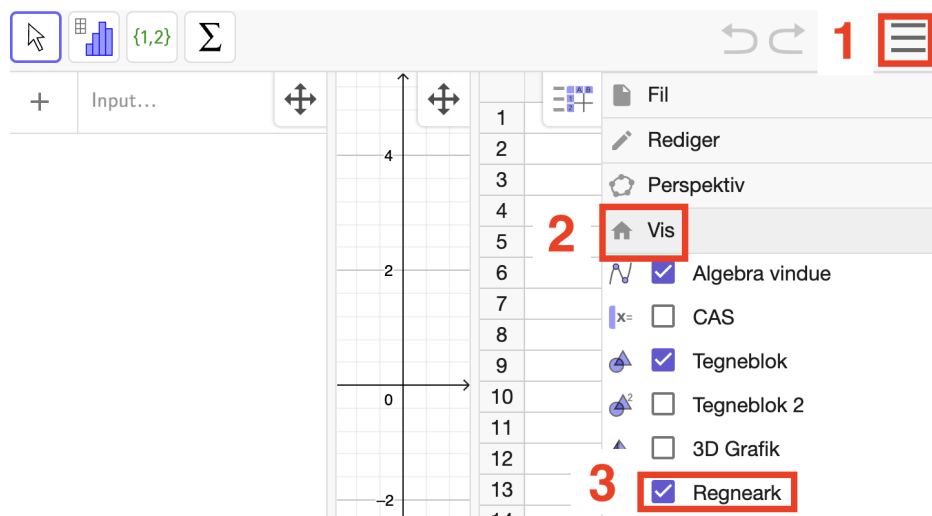
Ekstra

I dette ekstraafsnit skal vi først se på, hvordan man laver lineær regression i GeoGebra. Der er både fordele og ulemper ved GeoGebra, og derfor er det godt at kunne lave regression i både Excel og GeoGebra. Derefter vil vi se på matematikken bag lineær regression.

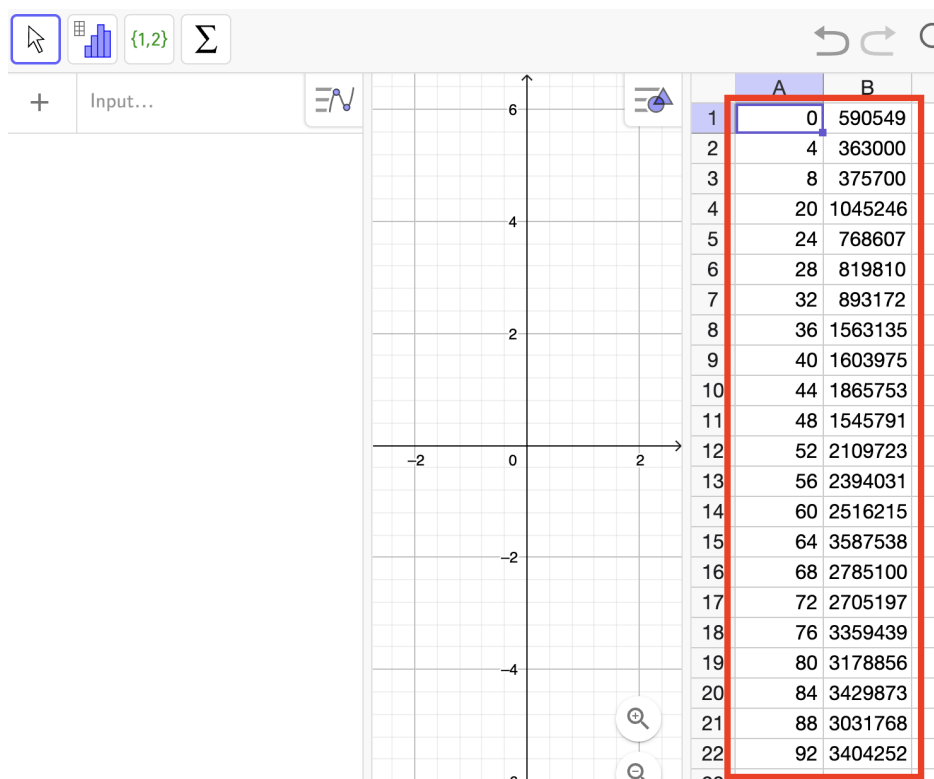
Lineær regression i GeoGebra

Hvis du har problemer med følge guiden, så gør vinduet større. GeoGebra gemmer knapper, hvis vinduet er for småt

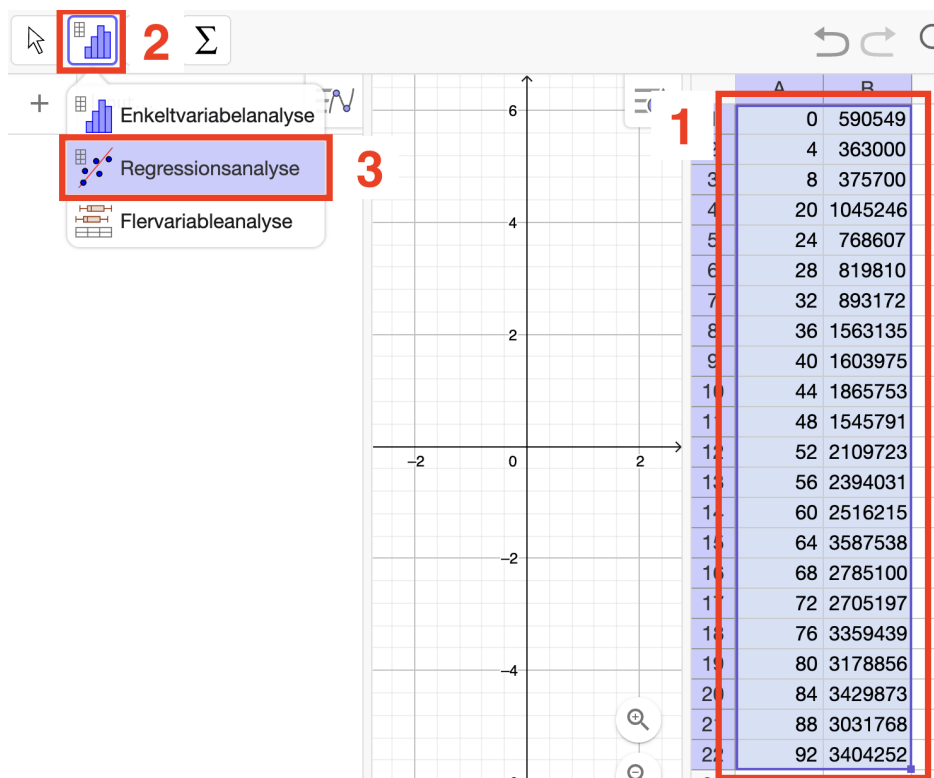
Vi kan lave lineær regression i GeoGebra også. Vi åbner GeoGebra og vælger "Regneark"



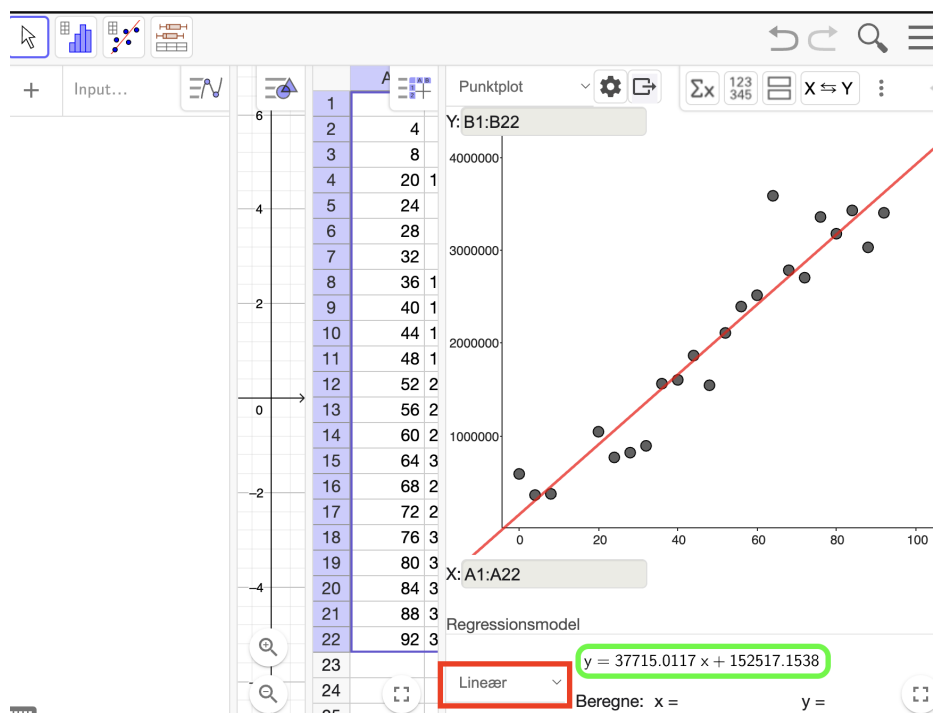
Vi copy-paster nu data ind i regnearket. **Her er det vigtigt at du højreklikker og vælger indsæt.** Trykker du cmd-v (ctrl-v i Windows) virker det ikke:



Vi rammer data ind og vælger "Regressionsanalyse"



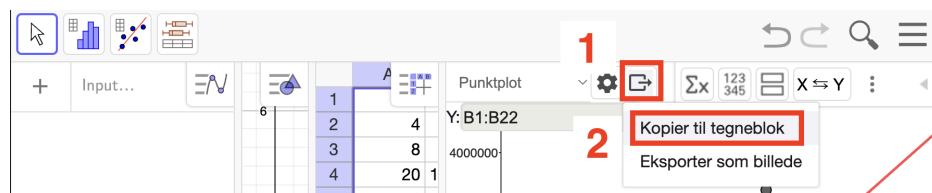
Vi vælger en "Lineær" som Regressionsmodel:



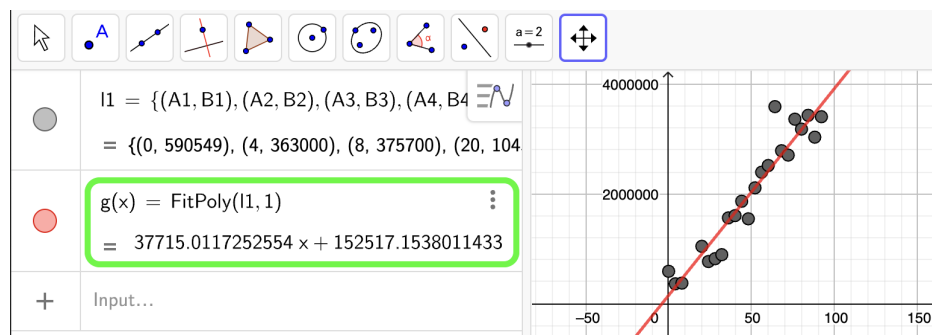
Og vi ser at vores model er:

$$y = 37715x + 152517$$

Men løjerne stopper ikke her. Vi kan få modellen ind i et algebravindue, så vi kan arbejde videre med den. Vælg "Kopier til tegneblok".



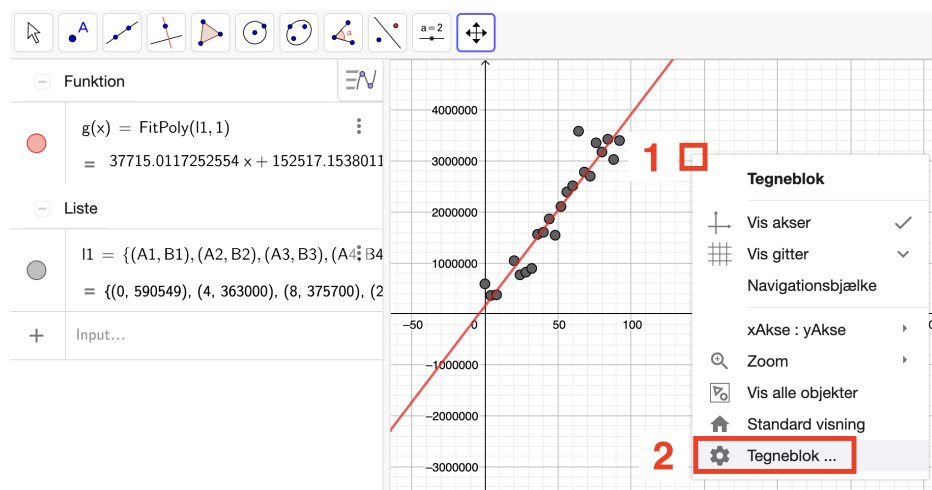
Vi lukker nu nogle vinduer og zoomer på akserne og får:



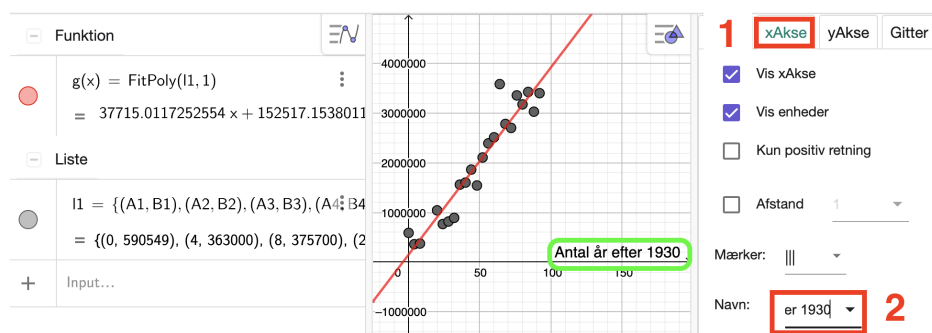
Funktionen $g(x)$ kan vi arbejde med, som enhver anden funktion i GeoGebra.

Vi kan lave et xy-plot som egner sig til præsentation også. Vi skal bare indsætte titler på akserne. Vi højreklikker på et tomt sted i koordinatsystemet og vælger

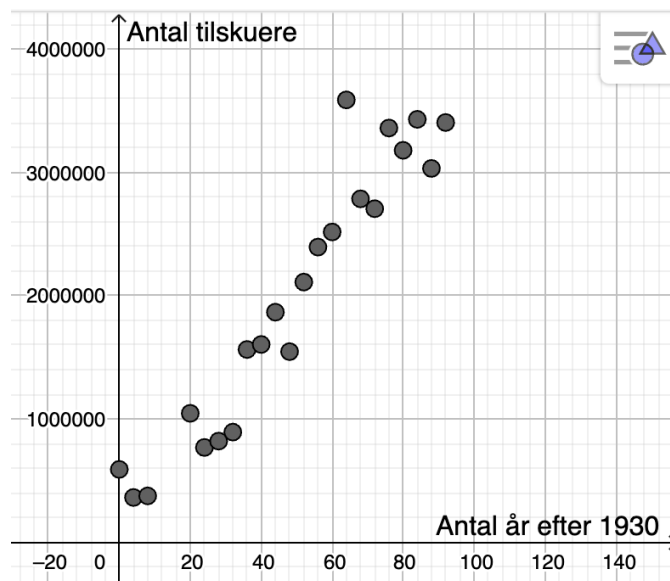
”Tegneblok ...”:



Vi trykker ”xAkse” og skriver ”Antal år efter 1930” ind under ”Navn”:



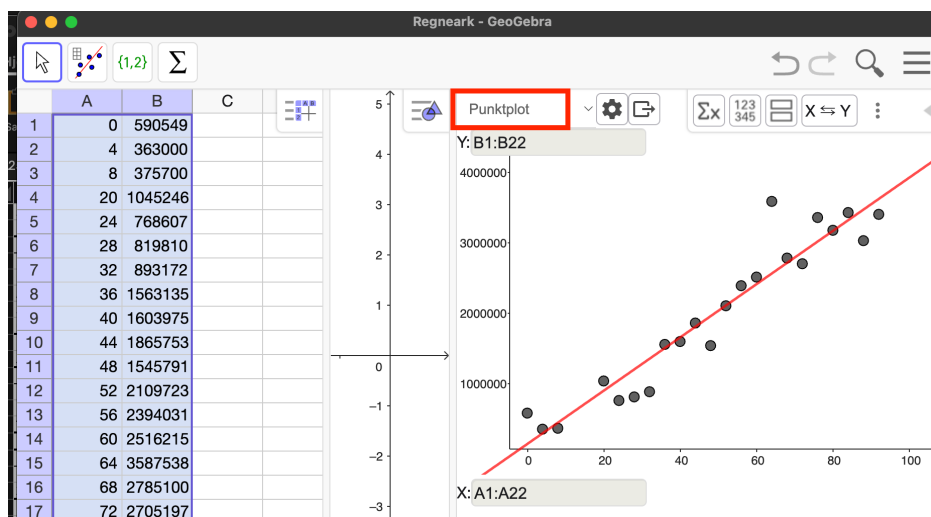
Vi tilføjer en titel på y -aksen på tilsvarende måde. Vi slukker for modellen (klikker på den røde bolle foran $g(x)$) og zoomer lidt så det er pænt:



og der var så det mine damer og herre. Et xy-plot i GeoGebra!

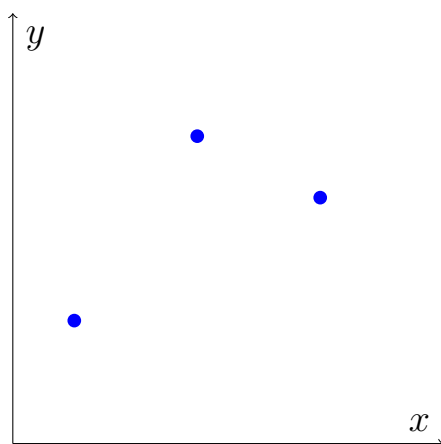
Det er klart at det er hurtigst at lave xy-plot i Excel, men skal man regne videre med modellen er GeoGebra smartere. Det skal dog nævnes at GeoGebra ikke virker med store datasæt (jeg tror vist grænsen er 350 rækker), så hvis du har rigtig mange observationer, skal du bruge Excel.

For elever på den nye ordning (eller elever på A-niveau), kan jeg nævne, at der også kan laves residualplot i GeoGebra. Man laver det ud fra xy-plottet ved at klikke på "Punktplot" og vælge "residualdiagram":

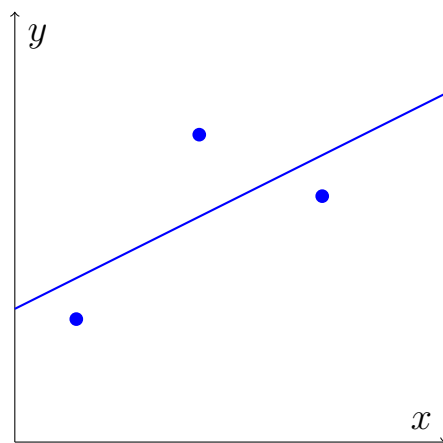


Sådan virker lineær regression

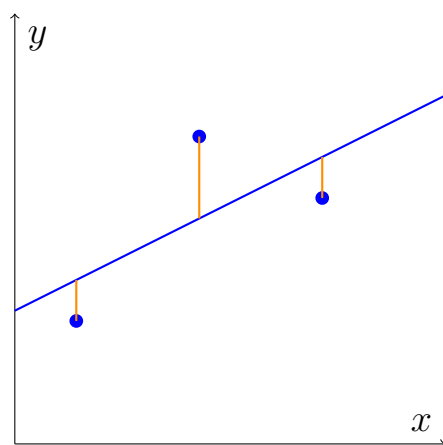
Vi skal nu se, hvordan den lineære model fremkommer når man laver regression i Excel og GeoGebra. Vi tager udgangspunkt i et simpelt xy-plot med kun tre punkter:



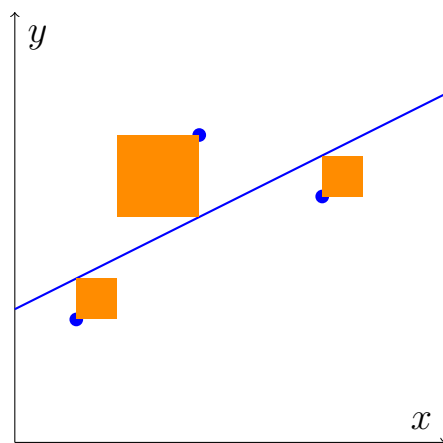
Vi tegner nu (bare så godt vi kan) en lineær funktion der bedst muligt går igennem punkterne. Det er svært, da punkter ikke rigtigt ligger på en linje:



Vi markerer nu den lodrette afstand mellem punkt og linje:



Afstandene repræsenterer fejlen mellem model og data for det pågældende punkt. Man kunne godt tro, at vi nu prøvede at minimere denne afstand. Altså at vi justerede linjen indtil, at den samlede lodrette afstand fra punkterne til linjen var mindst muligt. Men det er ikke helt det vi gør. I stedet tegner vi kvadrater med afstandene som sidelængder:



Det er arealet af disse kvadrater som Excel/GeoGebra minimerer, når vi laver lineær regression. Altså Excel/GeoGebra justerer på linjen indtil, det samlede areal

af kvadraterne ikke kan blive mindre. Vores model er så den linje, som er resultatet af dette. Man kan undrer sig over, hvorfor det er arealerne og ikke afstandene der skal minimeres, men svaret er desværre uden for rækkevidde her på HHX. Faktisk er det tvivlsomt om metoden overhovedet er den optimale i forhold til de konkrete eksempler i dette afsnit, men igen... denne bekymring hører ikke til på HHX. Så hermed en opfordring til at studere statistik på universitetet, så kan du komme og fortælle mig alt, hvad der er galt med dette afsnit.

3.7 Beviser til lineære funktioner

Vi har lært, at en sætning er et særlig vigtigt matematisk resultat. Men hvordan ved man, at en sætning er sand i første omgang? Det ved man, fordi enhver sætning har et "bevis", som garanterer at sætningen er sand. I et bevis tager man udgangspunkt i noget man allerede ved er rigtigt, og så regner man sig frem til sætnings påstand.

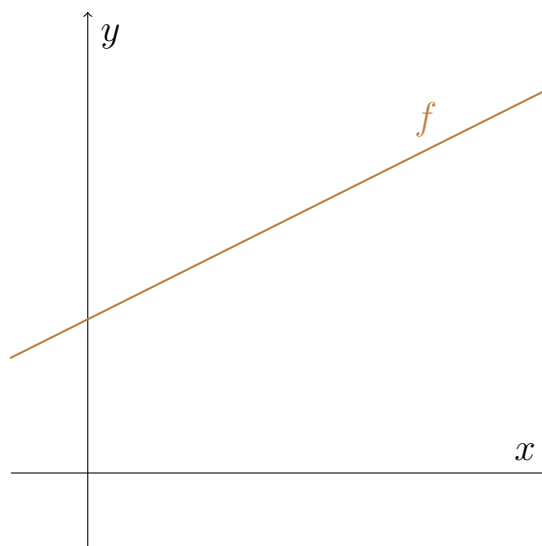
I dette afsnit vil vi bevise to sætninger. Den første sætning indeholder et kendt resultat, selvom vi ikke tidligere har omtalt resultatet som en "sætning".

Sætning 3.7.1

En lineær funktion $f(x) = ax + b$ skærer y -aksen i punktet $(0, b)$, og hver gang x vokser med 1, vokser f med a .

Bevis

Lad f være en lineær funktion.



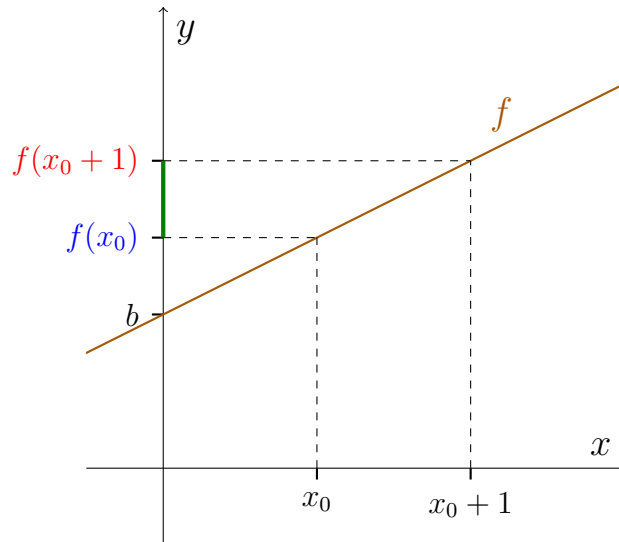
Vi starter med at vise, at f skærer y -aksen i punktet $(0, b)$. Skæringspunkter

med y -aksen har altid førstekoordinaten 0, så vi kan finde y -værdien ved at sætte 0 ind i forskriften:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b.$$

Så den er god nok! Funktionen skærer y -aksen i punktet $(0, b)$:

Vi skal nu tjekke, at funktionen vokser med a , når x vokser med 1. Det skal gælde uanset, hvor vi starter, så vi vælger en vilkårlig x -værdi, som vi kalder x_0 . Lader vi denne værdi vokse med 1, når vi ud til $x_0 + 1$. Funktionen vækst, når x går fra x_0 til $x_0 + 1$, må være det grønne stykke vist her:



Vi bruger forskriften $f(x) = ax + b$ til at regne:

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

og tilsvarende regner vi:

$$\begin{aligned} f(x_0 + 1) &= a(x_0 + 1) + b \\ &= ax_0 + a + b \end{aligned}$$

Vi kan nu regne væksten (det grønne stykke):

$$\begin{aligned} f(x_0 + 1) - f(x_0) &= ax_0 + a + b - (ax_0 + b) \\ &= ax_0 + a + b - ax_0 - b \\ &= a \end{aligned}$$

Så funktionen vokser altså med a , når x vokser med 1.

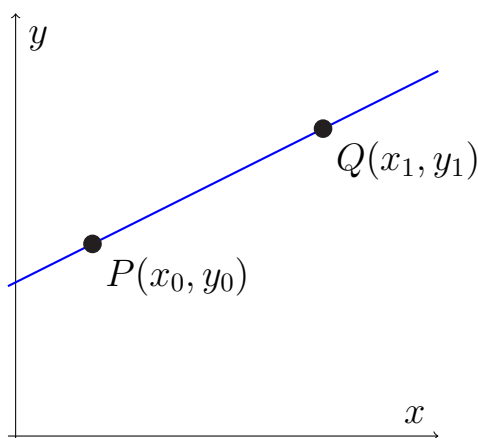
Når man først lærer om beviser, kan det være svært at se, hvor motivationen til de forskellige skridt kommer fra. På HHX skal man ikke lære at lave sine egne

beviser, og derfor er det ikke vigtigt, hvorfor man gør det ene og det andet — det vil ofte være svært at gøre klart. Det vigtige er, at man forstår, **hvad der sker** og, **hvorfor det er korrekt**.

Det næste bevis kræver kendskab til faktorisering, så læs [1.2](#), hvis du ikke allerede har gjort det.

Sætning 3.2.1

Lad $f(x) = ax + b$ være en lineær funktion og antag, at f går igennem punkterne $P(x_0, y_0)$ og $Q(x_1, y_1)$:

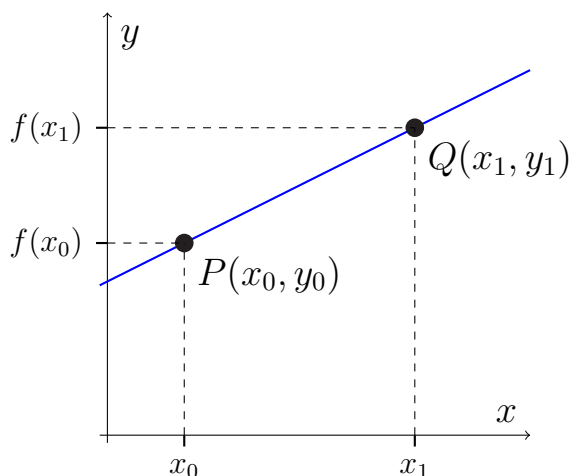


Da er konstanterne a og b givet ved:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{og} \quad b = y_0 - ax_0$$

Bevis

Vi laver først en tegning:



Da f går igennem punkterne P og Q må (se tegning):

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{og} \quad f(x_1) = y_1$$

Vi bruger nu forskriften $f(x) = ax + b$ til at regne $f(x_0)$ og $f(x_1)$:

$$ax_0 + b = y_0 \quad \text{og} \quad ax_1 + b = y_1$$

Vi regner nu $y_1 - y_0$:

$$y_1 - y_0 = ax_1 + b - (ax_0 + b)$$

Vi ophæver parentesen:

$$y_1 - y_0 = ax_1 + b - ax_0 - b$$

og reducerer:

$$y_1 - y_0 = ax_1 - ax_0$$

Vi sætter a ud foran parentesen (vi faktorerer):

$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0)$$

og formlen for a fremkommer ved at dele med $x_1 - x_0$ på begge sider:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Formlen for b er nem at vise. I starten af beviset fandt vi nemlig ud af, at

$$ax_0 + b = y_0$$

Så vi får b ved at trække ax_0 fra på begge sider:

$$b = y_0 - ax_0$$

og det var formlen for b .

3.8 Ekstra til lineære funktioner

Øvelse 3.8.1

Lad f være en aftagende lineær funktion med definitionsmængde $]2; 6]$ og værdimængde $[-2; 8[$

- a) Bestem en forskrift for f

Øvelse 3.8.2

En lineær funktion går igennem punktet $(-2, 1)$ og skærer y -aksen i 3.

- a) Bestem en forskrift for f

Øvelse 3.8.3

En lineær funktion har nulpunkt i $x = 3$ og en hældningskoefficient på $\frac{1}{2}$.

- a) Bestem en forskrift for f

Øvelse 3.8.4

Lad $f(x) = 2x - 3$ og $g(x) = -x + b$.

- a) Bestem b , så førstekoordinaten til skæringspunktet mellem f og g er 4.

Øvelse 3.8.5

Lad $f(x) = -3x + 1$. Grafen for f går igennem punktet $(x_0, 4)$

- a) Bestem x_0 .

Øvelse 3.8.6

I denne opgave skal vi se på et fiktivt skattesystem til indkomstskat. Reglerne skal være:

- De første 100.000 kr. af indtægten beskattes ikke.
- Resten af indtægten beskattes med 60% (uhhhhgg).

Det var det.

- a) En person tjener 80.000 kr. Hvor meget skal der betales i skat?
- b) En person tjener 140.000 kr. Hvor meget skalt der betales i skat?
- c) Opstil en funktion, som beskriver skattebeløbet som funktion af indtægten.

Øvelse 3.8.7

Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) er en enhed for temperatur. Man bruger den i USA, da de elsker skøre enheder derovre. Den er oprindeligt defineret ud fra frysepunktet for en bestemt saltopløsning og "almindelig kropstemperatur", men det glemmer vi lige nu. I stedet vil vi tage udgangspunkt i, at vand fryser ved 32°F og koger ved 212°F . Hvis du ikke allerede ved det, kan jeg oplyse at vand fryser ved 0°C og koger ved 100°C .

- a) Opstil forskriften for en lineær funktion, der kan bruges til at omregne fra Celsius til Fahrenheit.
- b) Opstil forskriften for en lineær funktion, der kan bruges til at omregne fra Fahrenheit til Celsius. Du må gerne bruge lommeregner her.
- c) Jeg har hørt en tommelfingerregel, som siger, at man kan omregne fra Fahrenheit til Celsius ved at "trække 30 fra og dele med 2". Er det korrekt?

Kapitel 4

Polynomier

Polynomier er en type af funktioner, man støder på ofte, og vi vil da også møde dem i flere kapitler fremover. Faktisk har vi allerede set eksempler på polynomier, da lineære funktioner er en slags polynomier.

4.1 Introduktion til polynomier

Ligesom vi startede kapitlet om lineære funktioner med at definere lineære funktioner, vil vi starte dette kapitel med at definere polynomier. Det betyder altså, at vi vil fortælle, hvad vi helt præcist forstår ved et "polynomium":

Definition 4.1.1

Et *polynomium* er en funktion, der har en form som en af funktionerne i skemaet:

Forskrift	Type
$f(x) = a$	Nultegradspolynomium
$f(x) = ax + b$	Førstegradspolynomium
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Andengradspolynomium
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Tredjegradspolynomium
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	Fjerdegradspolynomium
$\vdots$	$\vdots$

Tallene $a, b, c \dots$ kaldes polynomiets koefficienter. Koefficienten a må ikke være nul. Skemaet kan fortsættes, så der findes polynomier af alle grader.

Eksempel 4.1.1

Her er nogle eksempler på polynomier:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4 \quad \text{er et andengradspolynomium}$$

$$f(x) = 4 \quad \text{er et nultegradspolynomium}$$

$$f(x) = x^8 \quad \text{er et ottendegradspolynomium}$$

$$f(x) = -x + 2 \quad \text{er et førstegradspolynomium}$$

Øvelse 4.1.1

Hvilke af disse funktioner er polynomier?

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = x^2$

f) $f(x) = -5$

g) $f(x) = 5x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

h) $f(x) = -x^{250}$

i) $f(x) = x^{3,5} - 2x$

j) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 3,5$

k) $f(x) = \pi$

Øvelse 4.1.2

Bestem koefficienterne a og b for følgende førstegradspolynomier:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x + 1$

c) $f(x) = -2x + 2$

d) $f(x) = -x$

Øvelse 4.1.3

Bestem koefficienterne a , b og c for følgende andengradspolynomier:

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

c) $f(x) = -2x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = 39x^2 - x$

f) $f(x) = -x^2 + 1,3$

Eksempel 4.1.2

Vi vil bestemme graden af polynomiet $f(x) = 2x^7 - 4x^2 + 1$. Vi ser at den højeste eksponent er 7 (eksponenterne er de tal som x 'erne er opløftet i). Det er derfor et syvendegradspolynomium, og polynomiets grad er dermed 7.

Øvelse 4.1.4

Bestem graden af følgende polynomier:

a) $f(x) = 2x^3 + x - 1$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = 7x^8 - x^6 - x^3$

d) $f(x) = 4$

Øvelse 4.1.5

Lineære funktioner er også en slags polynomier.

a) Hvilken slags? Tænk dig godt om.

Øvelse 4.1.6

Bestem $f(0)$ og $f(-2)$ for følgende polynomier:

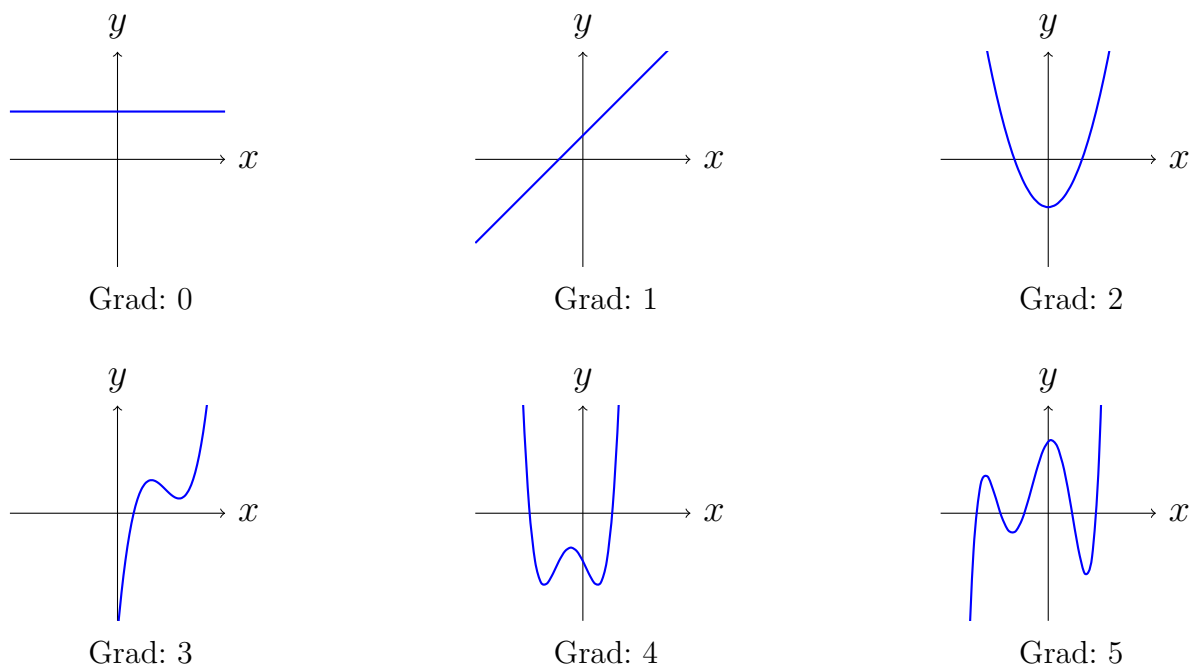
a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = 2,7$

c) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Polynomiers graf

Grafen for et polynomium kan se ud på mange måder alt afhængigt af graden.

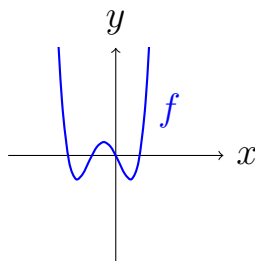


Figur 4.1: Polynomier af forskellig grad

Vi så i øvelse 4.1.5 at polynomier af grad 0 og 1 er lineære funktioner, så det er ingen overraskelse, at graferne for disse er linjer. Når vi går op i grader, ser vi, at der kommer flere nulpunkter og flere ekstrema. Man kan vise, at et polynomium af grad n højst har n nulpunkter og højst $n - 1$ ekstrema.

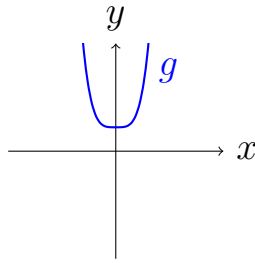
Eksempel 4.1.3

Her er er grafen for fjerdegradspolynomiet $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$:



Vi ser, at der det maksimale antal nulpunkter og ekstrema, nemlig 4 nulpunkter og 3 ekstrema.

Her er er grafen for fjerdegradspolynomiet $g(x) = x^4 + 1$:



Vi ser at f har 1 ekstremum og ingen nulpunkter.

Som eksemplet viser, så siger graden kun noget om, hvor mange nulpunkter og ekstrema der **højst** kan være. Ikke hvor mange der er. Dog kan man vise, at alle polynomier af ulige grad altid har mindst et nulpunkt.

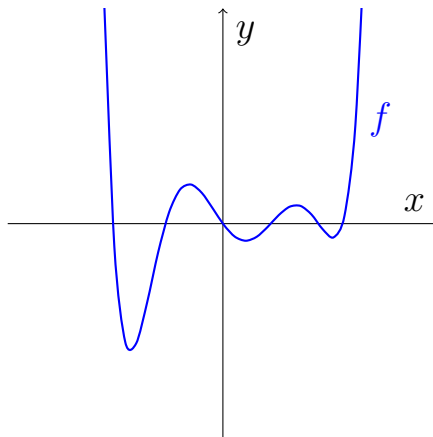
Øvelse 4.1.7

Antag, at vi har et syvendegradspolynomium

- Hvad kan man sige om antallet af nulpunkter?
- Hvad kan man sige om antallet af ekstrema?

Øvelse 4.1.8

Betragt grafen for funktionen f :



- Hvad kan man sige om graden af f ?

Definitions og værdimængde for polynomier

Da man kan sætte alle tal ind i forskriften for et polynomium er definitionsmængden $\mathbb{R}$ (dvs. alle tal). Hvis graden er lige vil værdimængden afhænge af det konkrete polynomium, mens polynomier af ulige grad har $\mathbb{R}$ som værdimængde.

Øvelse 4.1.9

Lad $f(x) = x^7 - 4x^6 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$

a) Bestem $\text{Dm}(f)$ og $\text{Vm}(f)$.

Øvelse 4.1.10

Lad $f(x) = -4$

a) Bestem $\text{Dm}(f)$ og $\text{Vm}(f)$.

Ekstra

I stedet for et skema kan vi lave en samlet definition for polynomier af forskellige grad.

Definition 4.1.2

Et n 'tegradspolynomium er en funktion på formen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

hvor $a_n \neq 0$.

I denne definition hedder koefficienterne altså ikke længere $a, b, c \dots$ men i stedet a_n, a_{n-1}, a_{n-2} . Det er mere teknisk, men smartere.

Eksempel 4.1.4

Lad $f(x) = 2x$. Så er $n = 1$ og koefficienterne er $a_1 = 2$ og $a_0 = 0$.

Øvelse 4.1.11

Bestem, med udgangspunkt i den nye definition, graden og koefficienterne for følgende polynomier.

a) $f(x) = x^2 - 3$

b) $f(x) = 5$

Øvelse 4.1.12

Lad $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1$

- a) Bestem a_{n-1}
- b) Bestem a_{n-2}

Der findes et særligt polynomium, som ikke er omfattet af definitionerne i dette afsnit. Dette polynomium har forskriften $f(x) = 0$ og kaldes *nulpolynomiet*. Man kunne godt tro, at nulpolynomiet er et nultegradspolynomium, men nultegradspolynomiet har forskriften $f(x) = a$, hvor $a \neq 0$, så $f(x) = 0$, kan altså ikke være et nultegradspolynomium (da $a = 0$). Men hvis nulpolynomiet ikke er et nultegradspolynomium, hvilken grad har det så? Svaret er: Ikke nogen. Nulpolynomiet er det eneste polynomium, som ikke har en grad. Der findes dog nogle crazy matematikere, som giver det graden $-\infty$.

Øvelse 4.1.13

Lad $f(x) = 0$.

- a) Er f et polynomium?
- b) Er f et nultegradspolynomium?
- c) Hvilken grad har f ?

4.2 Parabler

Vi har set, at der findes polynomier af alle mulige grader. Nulte og førstegradspolynomier er jo bare lineære funktioner, og dem ved vi allerede en del om, så næste skridt er andengradspolynomier. I dette afsnit skal vi se nærmere på grafen for et andengradspolynomium. Et andengradspolynomium er en funktion på formen

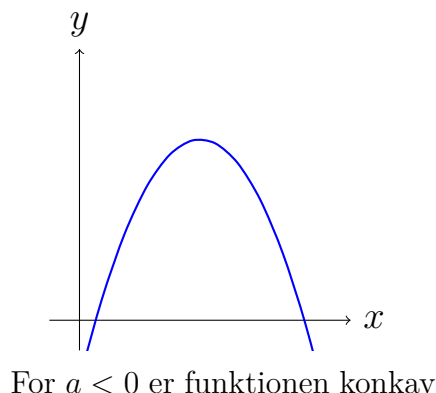
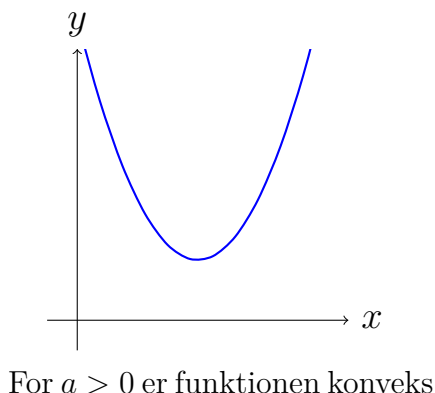
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad \text{hvor } a \neq 0$$

Her betyder $a \neq 0$ at a ikke må være nul.

Grafen for et andengradspolynomium hedder en *parabel*. Parablens udsende og placering afhænger af koefficienterne a , b og c . Koefficienten a bestemmer grafens form, og b og c har betydning for grafens placering.

Betydning af a

Parablen kan se ud på to forskellige måder alt efter værdien af koefficienten a . Hvis $a > 0$ ligner parablen en glad mund, og polynomiet siges at være *konveks*. Hvis $a < 0$ ligner parablen en sur mund og polynomiet kaldes *konkav*:



Det kan være svært at huske, hvad der er konveks og konkav, så her er en huskeregel: Vi kan se, at et konvekst andengradspolynomium har en stigende vækst og derfor er Kon**VÆKST**. Det konkave polynomium ligner en som har slået sig, og er derfor Konk**AV**! Kan man stadig ikke huske, hvad der er, så man sige *glad* og *sur* (sorry Jytte).

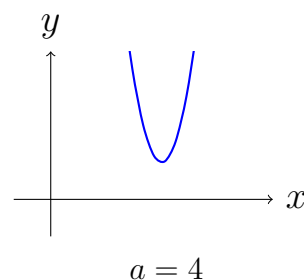
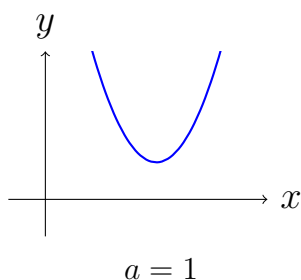
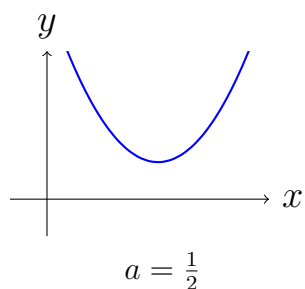
Øvelse 4.2.1

Afgør, om følgende funktioner er konvekse eller konkave. Kan du gøre det både ved at tegne i GeoGebra og ved at betragte forskriften?

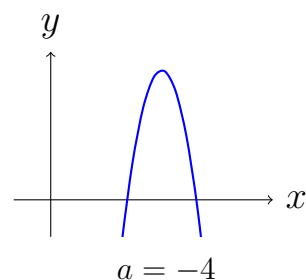
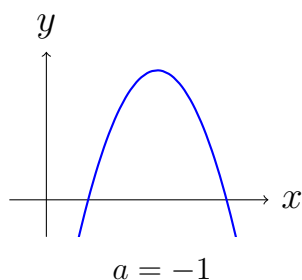
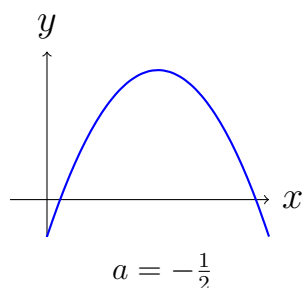
a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = -3x^2 + 4$

Ud over at afgøre om polynomiet er konvekst eller konkavt fortæller a også hvor ”spids” parablen er. Her ses tre polynomier med tre forskellige positive a -værdier:



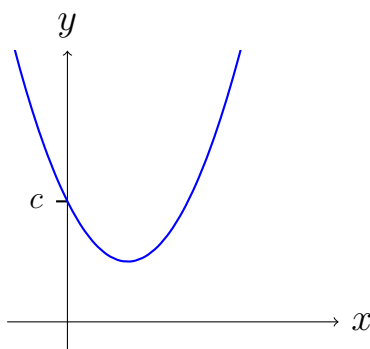
Der gælder tilsvarende for negative a -værdier:



Så jo længere væk a ligger fra nul, jo spidsere bliver parablen.

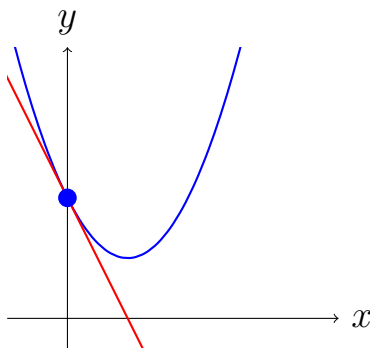
Betydning af c

Parablen skærer y -aksen i c .



Betydning af b

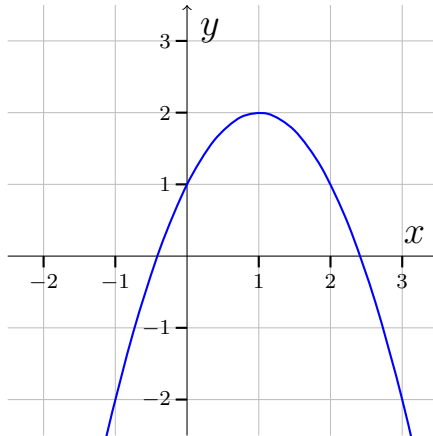
Koefficienten b er den sværeste. For at forklare betydningen, skal vi først tegne en tangent til parablen. En tangent er en linje, som ligger op ad en graf. Vi skal tegne tangenten gennem det punkt, hvor grafen skærer y -aksen. Det ser således ud:



Vi kan se, at tangenten (den røde linje) følger parablen omkring parablens skæringspunkt med y -aksen. Koefficienten b er hældningen på denne tangent.

Eksempel 4.2.1

Betragt grafen for et andengradspolynomium f :

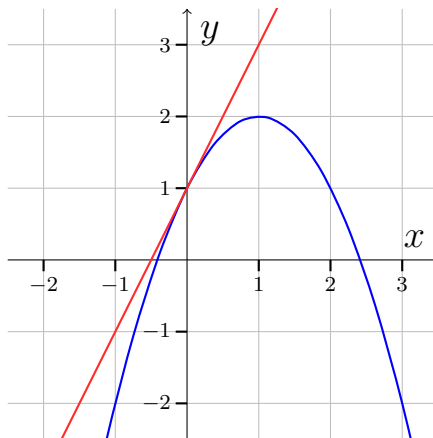


Vi vil gerne udtale os om værdien af a , b og c .

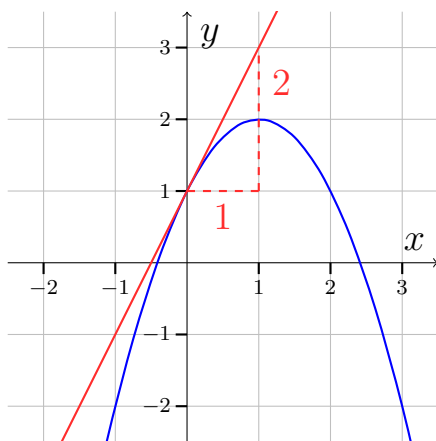
Vi ser at polynomiet er konkavt, så a må være negativ.

Parablen skærer y -aksen i 1, så $c = 1$.

Vi tegner nu en tangent til f , gennem skæringspunktet med y -aksen, for at finde b :



Vi aflæser hældningen på tangenten:

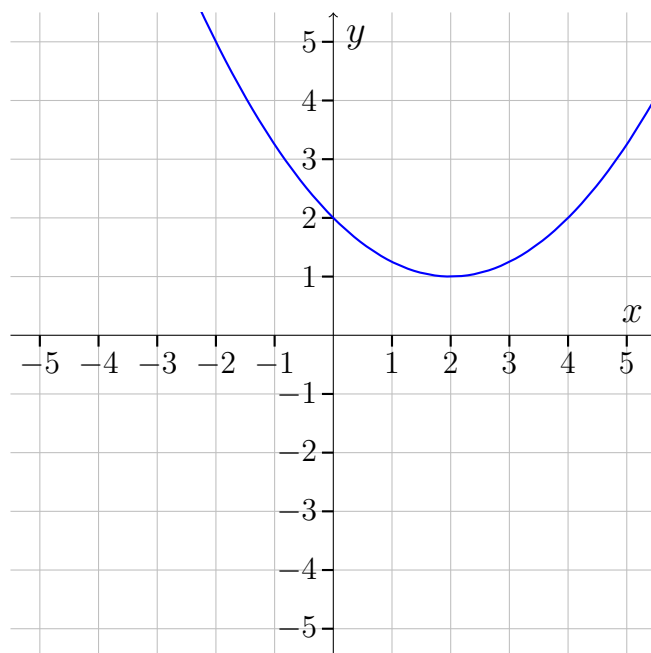


Vi ser, at hældningen på tangenten er 2, så $b = 2$.

Konklusion: $a < 0$, $c = 1$ og $b = 2$.

Øvelse 4.2.2

Betragt grafen for et polynomium f :



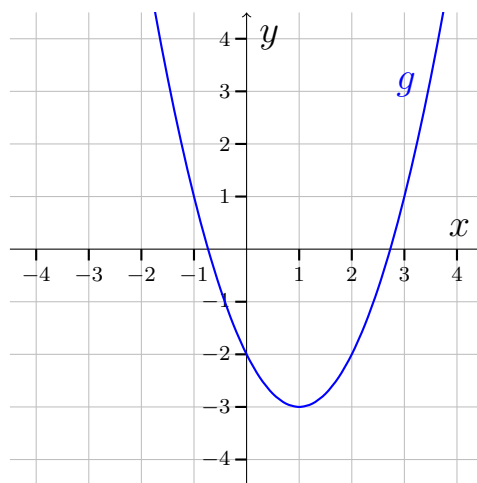
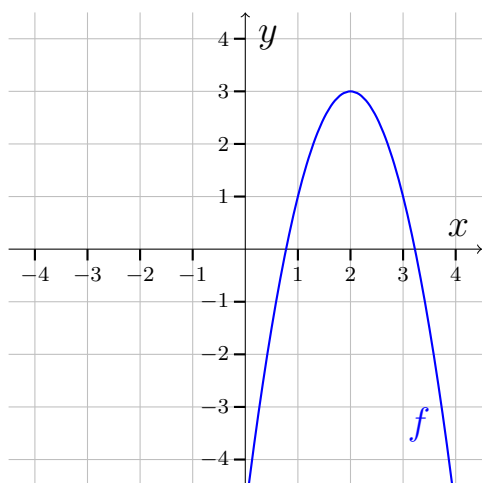
- Bestem fortegnet for a .
- Bestem c .
- Bestem b .

Ekstra

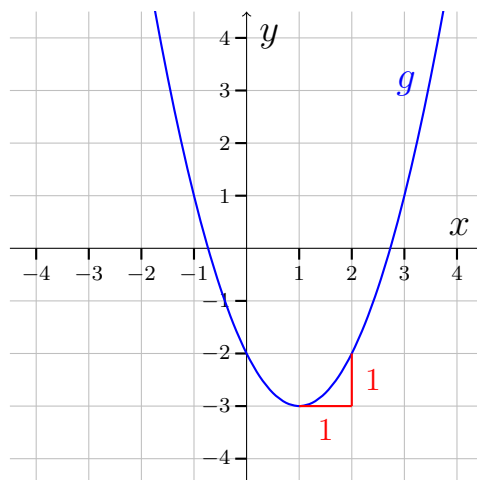
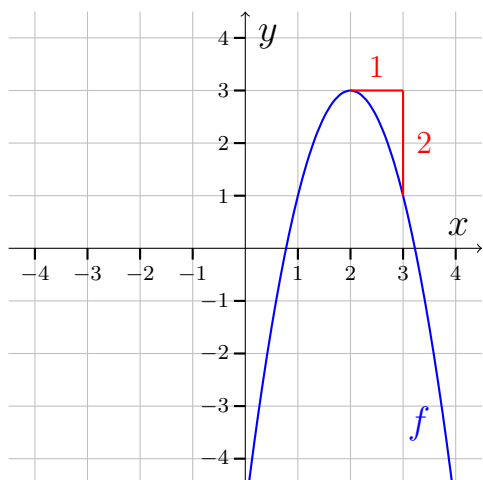
Vi har set, hvordan man kan bestemme b og c ud fra grafen, men ikke hvordan man bestemmer a . Dvs. vi har lært at bestemme fortegnet for a , men ikke selve værdien. Det er dog ikke så svært. Vi finder a ved at aflæse, hvor meget grafen vokser, når vi går en ud ad x -aksen med udgangspunkt i toppunktet.

Eksempel 4.2.2

Betragt graferne for to andengradspolynomier f og g :



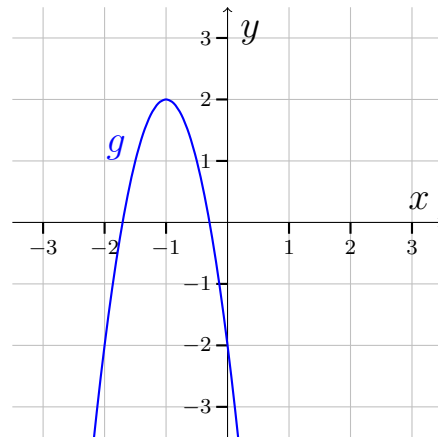
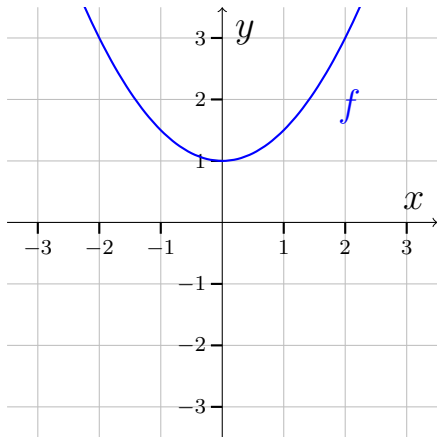
Hvis vi starter i toppunktet og går 1 til højre, ser vi, at første graf falder med 2, og anden graf stiger med 1:



Vi konkludere, at $a = -2$ for det først polynomium, og $a = 1$ for det andet polynomium.

Øvelse 4.2.3

Betragt graferne for to polynomier f og g :

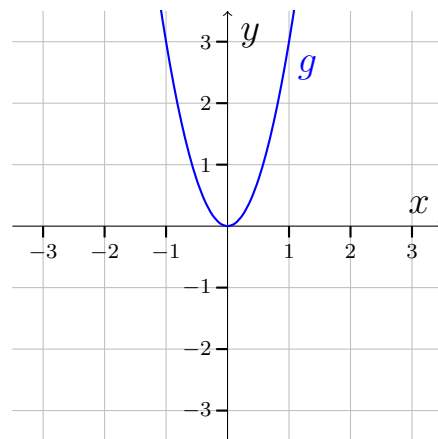
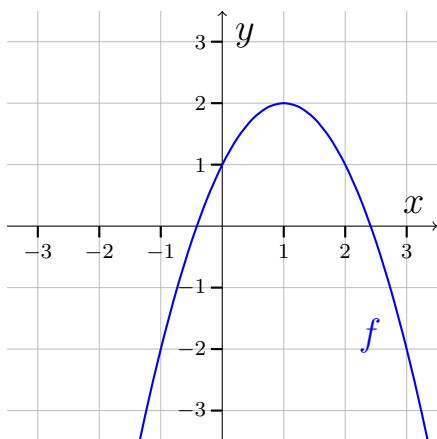


- a) Bestem koefficienten a for f .
- b) Bestem koefficienten a for g .

Vi har nu lært, hvordan man aflæser, a , b og c ud fra grafen, så vi er nu i stand til at bestemme hele forskriften ud fra grafen.

Øvelse 4.2.4

Betragt graferne for to polynomier f og g :



- a) Bestem forskriften for f
- b) Bestem forskriften for g

4.3 Toppunkt og nulpunkter for andengradspolynomier

Vi bliver ved andengradspolynomier, dvs. funktioner på formen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad \text{hvor } a \neq 0$$

I dette afsnit skal vi se, hvordan man beregner forskellige størrelser relateret til andengradspolynomier.

Diskriminant

Diskriminanten er en størrelse, som indgår i nogle formler, vi vil støde på senere.

Definition 4.3.1

For et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ er *diskriminanten* d defineret ved:

$$d = b^2 - 4ac.$$

Eksempel 4.3.1

Vi vil finde diskriminanten for polynomiet $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

Vi aflæser $a = 2$, $b = 3$ og $c = -1$.

Diskriminanten bliver så:

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4ac \\ &= 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) \\ &= 9 + 8 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Altså $d = 17$.

Øvelse 4.3.1

Bestem diskriminanten for følgende polynomier:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

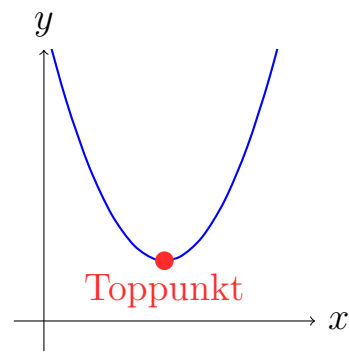
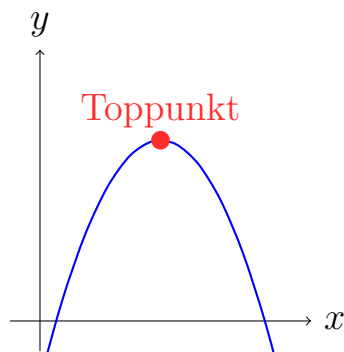
b) $f(x) = x^2 + 2x - 2$

c) $f(x) = -x^2$

d) $f(x) = x^2 - 4$

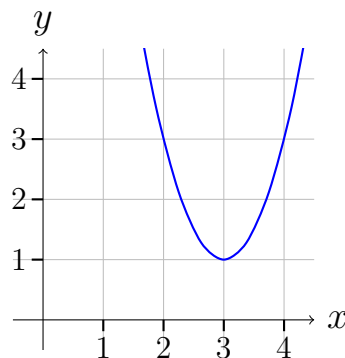
Toppunkt

Et andengradspolynomium har altid et globalt ekstremum og det kaldes *Toppunktet*:



Øvelse 4.3.2

Betragt grafen for et andengradspolynomium f :



a) Aflæs koordinaterne til toppunktet.

Vi kan beregne toppunktet.

Sætning 4.3.1

(Toppunktsformlen)

Toppunktet for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ med diskriminant d , kan bestemmes ved:

$$T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a} \right).$$

Eksempel 4.3.2

Lad $f(x) = -x^2 + 2x - 1$. Vi vil gerne bestemme toppunktet. Vi kan se i sætning 4.3.1, at diskriminanten optræder i formen for toppunktet, så vi bestemmer først diskriminanten.

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4ac \\ &= 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Toppunktet kan så bestemmes:

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a} \right) \\ &= \left(\frac{-2}{2 \cdot (-1)}, \frac{0}{4 \cdot (-1)} \right) \\ &= \left(\frac{-2}{-2}, \frac{0}{-4} \right) \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

Altså er toppunktet $(1, 0)$.

Øvelse 4.3.3

Beregn toppunktet for følgende funktioner

- a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
- b) $f(x) = -x^2 + 2$
- c) $f(x) = 2x^2$

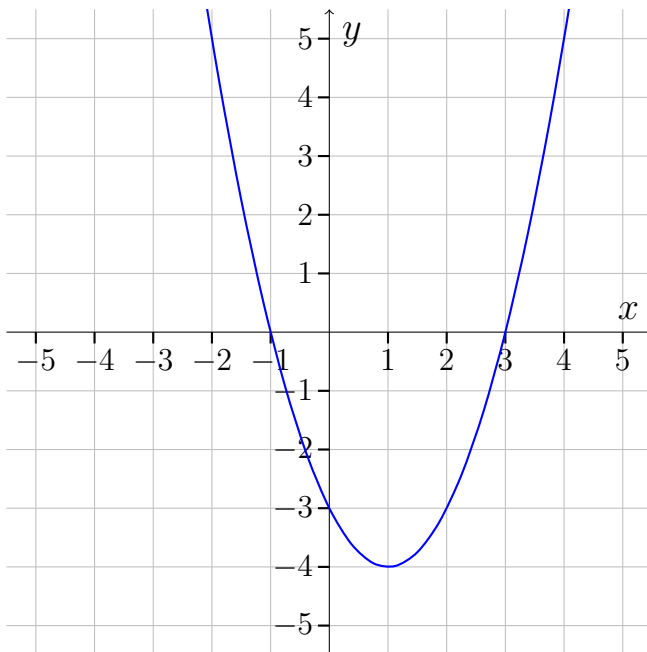
BEMÆRK: Det er kun for andengradspolynomier, vi kalder ekstremum for topunkt. **HUSK DET!**

Nulpunkter for andengradspolynomier

Vi har tidligere lært om nulpunkter. Vi husker, at det er der, hvor funktionen skærer x-aksen.

Øvelse 4.3.4

Betragt grafen for et andengradspolynomium:



a) Aflæs nulpunkterne

Vi husker, at man beregner nulpunkter ved at løse ligningen $f(x) = 0$. Denne ligning kan umiddelbart være lidt svær at løse, når $f(x)$ er et andengradspolynomium, så i stedet har vi følgende sætning til beregne nulpunkterne:

Sætning 4.3.2

(Nulpunktsformler)

For et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ med diskriminant d gælder:

Hvis $d < 0$, så er der ingen nulpunkter.

Hvis $d = 0$, så er der et nulpunkt og det er bestemt ved

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Hvis $d > 0$, så er der to nulpunkter, x_1 og x_2 , og de er bestemt ved

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$$

Ud fra sætningen kan vi se, at diskriminanten fortæller os, hvor mange nulpunkter der er.

Eksempel 4.3.3

Lad $f(x) = -x^2 - 2$. Da er

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4ac \\ &= 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) \\ &= -8. \end{aligned}$$

Derfor har f ifølge sætning 4.3.2 ingen nulpunkter.

Eksempel 4.3.4

Lad $f(x) = 2x^2$. Da er

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4ac \\ &= 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ifølge sætning 2 har f et nulpunkt:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot 2} = \frac{-0}{4} = 0.$$

Vi konkluderer at f har $x = 0$ som sit eneste nulpunkt.

Eksempel 4.3.5

Lad $f(x) = x^2 - 4$. Da er

$$\begin{aligned}d &= b^2 - 4ac \\&= 0^2 - 4 \cdot 1(-4) \\&= 0 + 16 \\&= 16.\end{aligned}$$

Ifølge sætning 4.3.2 er der to nulpunkter og de bestemmes ved

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-0 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

og

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-0 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Altså f har nulpunkterne $x_1 = -2$ og $x_2 = 2$.

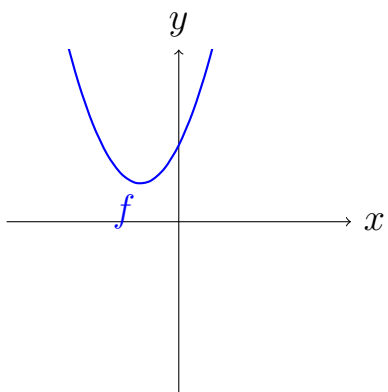
Øvelse 4.3.5

Beregn nulpunkterne for

- a) $f(x) = -x^2$
- b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$
- c) $f(x) = x^2 - 9$
- d) $f(x) = x^2 + x - 2$
- e) $f(x) = -2x^2 + 6x$

Eksempel 4.3.6

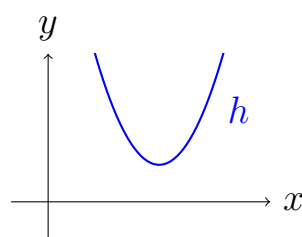
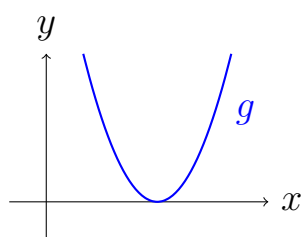
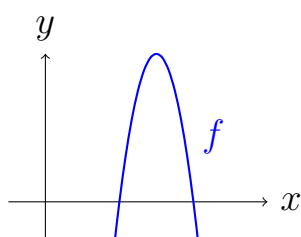
Betragt grafen for et andengradspolynomium f :



Vi kan se, at grafen ikke skærer x -aksen, så f har ingen nulpunkter, og derfor må diskriminanten være mindre end nul.

Øvelse 4.3.6

Betragt graferne for de tre andengradspolynomier: f , g og h .



- Bestem fortegnet for diskriminanten for f .
- Bestem fortegnet for diskriminanten for g .
- Bestem fortegnet for diskriminanten for h .

Ekstra

Sætning 4.3.2 er lidt svær at huske. Men man kan faktisk nøjes med at huske en enkelt formel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Det er nemmest at forklare ved at vise nogle eksempler.

Eksempel 4.3.7

Vi vil bestemme nulpunkter for $f(x) = x^2 + 1$. Diskriminanten bliver $d = -4$

(regn selv efter). Vi kigger på formlen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Vi ser at vi får et problem, hvis vi prøver at tage kvadratroden af d , da man ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal. Det minder os om, at der ikke er nogle nulpunkter, når d er negativ.

Eksempel 4.3.8

Vi vil bestemme nulpunkter for $f(x) = x^2$. Diskriminanten bliver $d = 0$ (regn selv efter). Vi kigger på formlen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Da $d = 0$ bliver formlen til

$$x = \frac{-b}{2a}$$

hvilket svarer til formlen fra sætning 4.3.2, og vi kan regne videre som tidligere.

Eksempel 4.3.9

Vi vil bestemme nulpunkter for $f(x) = x^2 - 1$. Diskriminanten bliver $d = 4$ (regn selv efter). Vi indsætter i formlen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm 2}{2} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

I det sidste skridt har vi regnet udtrykket $\frac{0 \pm 2}{2}$ to gange. En gang med plus og en gang med minus, hvilket giver 1 og -1 .

Øvelse 4.3.7

Lad $f(x) = x^2 + bx + 5$

- a) Hvad skal b være, hvis førstekoordinaten til toppunktet skal være -3 ?

Øvelse 4.3.8

Lad $f(x) = ax^2 + 4x + 2$

- a) Hvad skal a være, hvis f skal have netop 1 nulpunkt?

Vi afslutter afsnittet med en ret svær øvelse. Kun for de klåge.

Øvelse 4.3.9 (Svær)

I sidste afsnit lærte vi, at koefficienten a kan aflæses som det stykke parablen vokser med, når x vokser med 1 med udgangspunkt i toppunktet. I denne øvelse skal du bevise, at det er rigtigt

Lad x_T betegne førstekoordinaten til toppunktet.

- a) Bestem en formel for x_T . Den kan ses direkte af toppunktsformlen.
- b) Bestem $f(x_T)$
- c) Bestem $f(x_T + 1)$
- d) Regn $f(x_T + 1) - f(x_T)$
- e) Argumenter nu for, at a kan aflæses som det stykke parablen vokser med, når x vokser med 1 med udgangspunkt i toppunktet.

4.4 Andengradsligninger

Vi har tidligere lært at løse *førstegradsligninger*. Den gang kaldte vi dem godt nok bare for "ligninger", men det var faktisk førstegradsligninger idet, de kun indeholdte x og ikke noget x^2 , x^3 ,. Vi løste dem ved at samle x 'erne på den ene side og tallene på den anden. Dette kaldes også at *isolere* x .

En ligning som indeholder x^2 og ikke x i nogen højere potens (x^3 , x^4 , osv.) kaldes en *andengradsligning*. Vi skal nu se, hvordan man løser andengradsligninger. Vi starter dog med at vise se, hvordan man **ikke** løser dem.

Eksempel 4.4.1

Lad os se om vi kan bruge den samme metode, vi kender fra førstegradsligninger til andengradsligninger.

Vi prøver med ligningen $x^2 + 4 = -4x$.

Vi trækker 4 fra på begge sider og får

$$x^2 = -4x - 4$$

Vi lægger $4x$ til på begge sider og får

$$x^2 + 4x = -4.$$

Men hvad nu? Nu har vi både noget med x^2 og x , som vi ikke kan samle. Ååhhh, hvad skal vi dog gøre?

Eksemplet viser, at den metode vi kender fra førstegradslikninger ikke er tilstrækkelig til at løse andengradslikninger. I stedet kan vi udnytte nulpunktsformlen (sætning 4.3.2) til at løse dem.

Eksempel 4.4.2

Lad os igen betragte andengradslikningen $x^2 + 4 = -4x$.

Vi omskriver nu likningen så der står nul på den ene side. Det gør vi ved at $4x$ til på begge sider, hvilket giver:

$$x^2 + 4x + 4 = 0.$$

En løsning til denne likning er det samme som et nulpunkt for funktionen $f(x) = x^2 + 4x + 4$, så vi kan altså finde løsningerne vha. nulpunktsformlerne (sætning 4.3.2). Vi finder først diskriminanten:

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da $d = 0$ er der et nulpunkt, og det bestemmes ved

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Vi konkluderer at løsningen til likningen er $x = -2$.

Øvelse 4.4.1

I eksemplet oven over påstod vi, at en løsning til likningen $x^2 + 4x + 4 = 0$ svarer til et nulpunkt for $f(x) = x^2 + 4x + 4$.

a) Forklar hvorfor.

Strategien for at løse en andengradslikning er altså:

1. Omskriv likningen så den har formen $ax^2 + bx + c = 0$

2. Find nulpunkterne for funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nulpunkterne for $f(x)$ er løsning(erne) til ligningen.

Øvelse 4.4.2

Løs følgende ligninger:

a) $2x^2 = -2x + 4$

b) $x + 5 = -x^2$

c) $x^2 - 8x = -16$

Har man to løsninger til en andengradsligning, f.eks. $x_1 = 2$ og $x_2 = 5$, kan man skrive den samlede løsning som

$$x = 2 \vee x = 5.$$

Tegnet $\vee$ betyder ”eller”. Det kan virke fjollet at skrive ”eller”, når de jo begge to er løsninger, men man skriver ”eller”, fordi x ikke have to værdier på en gang.

Øvelse 4.4.3

Antag at en andengradsligning har løsningerne $x_1 = -3$ og $x_2 = 4$

- a) Opskriv løsningerne ved at bruge tegnet ” $\vee$ ” som forklaret lige oven over denne øvelse.

Simple andengradsligninger

Andengradsligninger kræver en løsningsformel, fordi det er svært at isolere x . Men hvis ligningen ikke indeholder noget led med x , kan vi løse den hurtigere.

Eksempel 4.4.3

Vi vil løse ligningen $x^2 + 6 = 10$. Vi isolerer x^2 :

$$x^2 = 4$$

Vi kan finde en løsning til ligningen ved at tage kvadratroden af 4.

$$x = \sqrt{4} = 2$$

Man kunne tro, at vi nu havde løst ligningen, men kvadratroden er lidt en snyder. Mange tror at kvadratroden ophæver ”i anden”, men ligningen $x^2 = 4$ har både en positiv og en negativ løsning, og kvadratroden giver kun den positive

løsning. Den anden løsning finder vi ved at sætte et minus foran kvadratroden:

$$x = -\sqrt{4} = -2$$

Vi opskriver løsningerne med den mindste løsning først $x_1 = -2$ og $x_2 = 2$.

Eksempel 4.4.4

Vi vil løse ligningen $x^2 + 3 = 2$. Vi isolerer x^2 :

$$x^2 = -1$$

Noget i anden er altid positivt (eller nul), så $x^2 = -1$ har kan ikke have nogen løsninger.

Øvelse 4.4.4

Løs ligningerne

- a) $x^2 - 1 = 0$
- b) $x^2 = 9$
- c) $x^2 + 7 = 5$
- d) $x^2 = 0$

Hvis andengradsligningen kun indeholder led med x 'er og x^2 og ikke noget tal-led, kan den også løses hurtigt. Vi skal se hvordan i næste afsnit.

Ekstra

Øvelse 4.4.5

Betragt ligningen $x^2 + 4x + 12 = -2x + k$

- a) Bestem k , så ligningen har netop 1 løsning.

4.5 Nulreglen

Vi har nu set, hvordan man løser første og andengradsligninger, men hvad med ligninger af højere grad? Vi skal se på regel, som i visse tilfælde, kan gøre os i stand til at løse ligninger af højere grad og andre mere avancerede ligninger.

Sætning 4.5.1

(Nulreglen)

Hvis $a \cdot b = 0$, så er $a = 0 \vee b = 0$.

Vi husker at tegnet $\vee$ betyder ”eller”.

Tænker man lidt over det, er nulreglen ikke så mærkelig. Det er klart, at hvis man ganger to tal sammen og resultatet er nul, så må det være fordi mindst et af tallene er nul.

Øvelse 4.5.1

Nulreglen er også kendt som den regel, ingen elever kan huske, og hvis en elev endelig kan huske, at der noget som hedder nulreglen, så husker eleven reglen forkert.

a) Hvad siger nulreglen udtrykt med ord?

Eksempel 4.5.1

Vi vil bestemme løsninger til ligningen $(x - 2)(x + 3) = 0$. Vi kan se at vi har to udtryk ganget sammen (de to parenteser) og derfor kan vi bruge nulreglen. Altså:

$$x - 2 = 0 \vee x + 3 = 0$$

Dette må betyde at ligningen har løsningerne

$$x = 2 \vee x = -3$$

Hvis man er et ordensmenneske kan man stille løsningerne op i rækkefølge:

$$x = -3 \vee x = 2$$

Man kan også opskrive løsningerne som

$$x_1 = -3 \quad \text{og} \quad x_2 = 2$$

Same shit.

Øvelse 4.5.2

Løs vha. nulreglen ligningerne:

a) $(x + 4)(x + 2) = 0$

b) $(x - 2)x = 0$

Nogle gange skal man arbejde lidt, før man kan bruge nulreglen:

Eksempel 4.5.2

Vi vil nu bruge nulreglen til at løse ligningen $x^3 - 4x = 0$. Vi starter med at sætte x ud foran en parentes:

$$x(x^2 - 4) = 0.$$

Dette kaldes også at *faktorisere*. Prøv at gange parentesen ud — kan du se, at det giver den oprindelige ligning?

Nu er ligningen på formen $a \cdot b = 0$, hvor $a = x$ og $b = x^2 - 4$, og dermed kan vi bruge nulreglen. Ifølge nulreglen er

$$x = 0 \vee x^2 - 4 = 0.$$

Vi løser nu ligningen $x^2 - 4 = 0$. Vi har allerede lært at løse den slags ligninger og løsningen er:

$$x = -2 \vee x = 2$$

Vi samler nu løsningerne og får

$$x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2.$$

Øvelse 4.5.3

Løs ligningerne

a) $x^3 + 2x^2 = 0$

b) $x^3 = -2x^2$

Eksempel 4.5.3

Vi vil løse ligningen $x^3 = x^2$. Vi starter med at omforme den, så vi får nul på den ene side af lighedstegnet:

$$x^3 - x^2 = 0.$$

Så faktorerer vi

$$x^2(x - 1).$$

Nulreglen giver os så at

$$x^2 = 0 \vee x - 1 = 0,$$

dvs. vi får løsningerne $x = 0 \vee x = 1$.

Øvelse 4.5.4

Løs følgende ligninger:

a) $x^3 - x^2 - 2x = 0$

b) $x^4 + 3x^3 = 0$

c) $x^2 \cdot \sqrt{x-1} = 0$ (svær)

Øvelse 4.5.5

Løs ligningerne

a) $x^3 - 4x = 3x^2$

b) $2x^3 - 12x^2 = -2x^4$

c) $x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+3} = 0$ (svær)

Ekstra

Et gangestykke hedder også et produkt, og de enkelte størrelser i gangestykket kaldes faktorer. Så nulreglen kan også formuleres som:

Sætning 4.5.2

(Nulreglen)

Hvis et produkt er nul, så er mindst en af faktorerne nul.

Øvelse 4.5.6

Bestem:

a) Produktet af 3 og 7.

b) Faktorerne i regnestykket $2 \cdot 3 \cdot x$

4.6 Fortegn for polynomier

I dette afsnit skal vi se, hvordan man ved beregning laver en fortegnundersøgelse for et polynomium.

Fortegnundersøgelse for polynomier

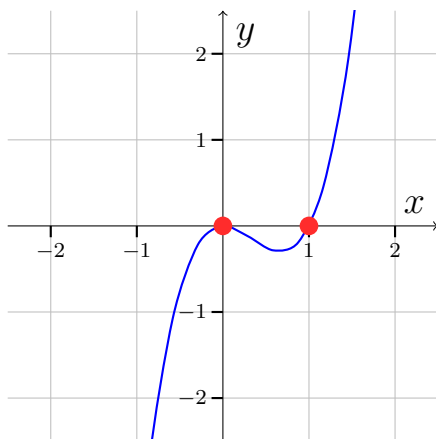
Fortegnsvariationen (resultatet af fortegnundersøgelsen) kan bestemmes ved aflæsning eller ved beregning. Vi starter med at repetere, hvordan man gør ved

aflæsning.

Eksempel 4.6.1

Vi vil nu lave en fortegnssundersøgelse af funktionen $f(x) = 2x^3 - 2x^2$ ved grafisk aflæsning.

Vi tegner grafen for funktionen:



Jeg har markeret nulpunkterne med rødt. Vi kan nu aflæse fortegnsvariationen for f :

$$f(x) < 0 \text{ på }]-\infty, 0[\text{ og }]0, 1[$$

$$f(x) > 0 \text{ på }]1, \infty[$$

$$f(x) = 0 \text{ for } x = 0 \text{ og } x = 1.$$

Øvelse 4.6.1

Bestem ved grafisk aflæsning i GeoGebra en fortegnssundersøgelse for følgende funktioner:

a) $f(x) = 3x + 3$

b) $f(x) = x^4 + 0,5x^3 - x^2 - 0,5x$

Vi skal nu se, hvordan man laver en fortegnssundersøgelse ved beregning.

Eksempel 4.6.2

Lad $f(x) = x^2 - 4$.

Vi vil lave en fortegnssundersøgelse for f ved beregning.

Vi kunne bruge nulpunktsformlen for andengradspolynomier til at finde nul-

punkter, men det er overkill da forskriften er simpel. Vi sætter $f(x) = 0$:

$$x^2 - 4 = 0$$

og isolere x^2 :

$$x^2 = 4$$

Denne ligning har løsningerne $x = -2 \vee x = 2$, hvilket således er nulpunkterne for f .

Vi undersøger nu, hvordan funktionen ser ud omkring nulpunkterne. Vi skal altså finde nogle x -værdier som ligger på hver side og imellem $x = -2$ og $x = 2$. Vi vælger x -værdierne -3 , 0 og 3 og laver et sildeben:

x	-3	-2	0	2	3
$f(x)$	5	0	-4	0	5

Vi er ligeglade med de præcise funktionsværdier — vi er kun interesserede i deres fortegn:

x	-3	-2	0	2	3
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi konkluderer:

$f(x) > 0$ på $] -\infty, -2[$ og $]2, \infty[$

$f(x) < 0$ på $] -2, 2[$

$f(x) = 0$ når $x = -2 \vee x = 2$

Øvelse 4.6.2

Bestem ved beregning fortegnsvariationen for følgende polynomier.

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = 3x + 9$

c) $f(x) = x^2 + 3x - 4$

d) $f(x) = -2x^4 + 6x^3 - 4x^2$ (svær)

Ekstra

Øvelse 4.6.3

I denne øvelse skal du løse uligheden $2x^2 - 4x + 2 > x^2 + 2x - 6$. Jeg hjælper dig.

- Omskriv uligheden så du har nul på højre side.
- Lav en fortegnundersøgelse for polynomiet på venstre side i den omskrevne ulighed.
- Brug resultatet af din fortegnundersøgelse til at løse uligheden.

Øvelse 4.6.4

Betragt uligheden $2x^2 - 4x + 2 \leq x^2 + 2x - 6$ (det er næsten samme ulighed som før).

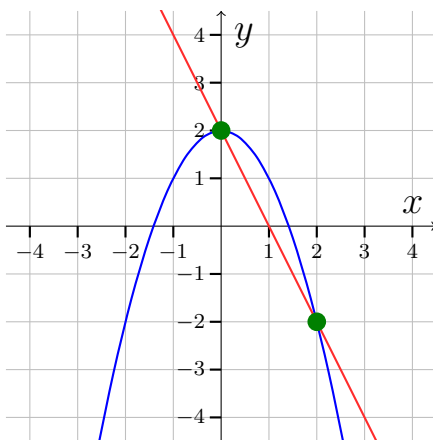
- Løs uligheden

4.7 Skæring mellem polynomier

I dette afsnit skal vi se på, hvordan man beregner skæringspunkter mellem polynomier. Vi starter dog lige med at repetere, hvordan man bestemmer skæringspunkter ved aflæsning.

Eksempel 4.7.1

Lad $f(x) = -x^2 + 2$ og lad $g(x) = -2x + 2$. Vi vil nu bestemme skæringspunktet. Vi tegner graferne og markerer de to skæringspunkter med grøn:



Vi aflæser de to skæringspunkter til at være $(0, 2)$ og $(2, -2)$.

Det er nemt at aflæse skæringspunkterne, men hvis gerne vil respekteres af sin matematiklærer, bør man også kunne beregne dem.

Eksempel 4.7.2

Vi vil nu beregne skæringspunkterne for funktionerne fra eksempel 4.7.1. Det gøres ved at sætte funktionerne lig hinanden og løse den ligning der fremkommer. Vi skal altså løse ligningen:

$$f(x) = g(x)$$

Vi indsætter forskrifterne:

$$-x^2 + 2 = -2x + 2$$

og løser ligningen som en andengradsligning. Først skal vi omforme den, så der står nul på den ene side:

$$-x^2 + 2x = 0$$

Vi finder vi diskriminanten:

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4ac \\ &= 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Vi bestemmer så de to løsninger:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

og

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{0}{-2} = 0$$

Altså er løsningen til ligningen $x_1 = 2$ og $x_2 = 0$.

Nu har vi fundet x -værdierne til de to skæringspunkter. Vi mangler så bare y -værdierne og dem finder vi ved at sætte x -værdierne ind i en af forskrifterne. Vi bestemmer selv, hvilken en forskrift vi bruger. Vi vælger at sætte dem ind i $g(x)$. Vi får den første y -værdi til:

$$g(0) = -2 \cdot 0 + 2 = 2,$$

og den anden y -værdi til

$$g(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2.$$

Vi får altså skæringspunkterne til $(0, 2)$ og $(2, -2)$, hvilket er det samme som vi fik ved aflæsning. Denne gang er vi så bare sikre på, at vi har de helt præcise punkter. Vi er hermed blevet til rigtige matematikere.

Øvelse 4.7.1

Bestem ved beregning skæringspunkterne mellem følgende funktioner:

- a) $f(x) = x^2$ og $g(x) = 4$
- b) $f(x) = x^2 + x - 3$ og $g(x) = x + 1$
- c) $f(x) = 2x + 1$ og $g(x) = -x + 7$
- d) $f(x) = 2$ og $g(x) = x^2 + 3$
- e) $f(x) = x^3 + x^2$ og $g(x) = 2x$ (svær)

4.8 Beviser til polynomier

Nulpunktssætningen for andengradspolynomier (B-niveau version)

Forudsætninger

Dette afsnit kræver kendskab til kvadratsætningen

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Hvis du synes den ser mærkelig ud, så læs afsnit [1.6](#)

Vi vil bevise nulpunktsformlen for andengradspolynomier. Til det bevis har vi brug for følgende regel:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Reglen kaldes også en *kvadratsætning*. Der er tre kvadratsætninger, og reglen er altså en af dem.

Sætning 4.3.2

(Nulpunktsformler)

For et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ med diskriminant d gælder:

Hvis $d < 0$, så er der ingen nulpunkter.

Hvis $d = 0$, så er der et nulpunkt og det er bestemt ved

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Hvis $d > 0$, så er der to nulpunkter, x_1 og x_2 , og de er bestemt ved

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$$

Bevis

Et nulpunkt er en x -værdi hvor $f(x) = 0$. Vi gerne bestemme nulpunkterne for f , så vi skal løse ligningen:

$$f(x) = 0$$

Vi indsætter forskriften for f :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi ganger ligningen med $4a$ på begge sider og får:

$$4aax^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Da $4aax^2 = (2ax)^2$ (tjek det) og $4abx = 2b(2ax)$ (tjek det) kan vi omskrive ligningen til:

$$(2ax)^2 + 2b(2ax) + 4ac = 0$$

Vi sætter nu $F = 2ax$ og får så:

$$F^2 + 2bF + 4ac = 0$$

Vi trækker nu $4ac$ fra på begge sider og lægger b^2 til på begge sider så vi får

$$F^2 + 2bF + b^2 = b^2 - 4ac$$

Vi genkender udtrykket for diskriminanten på højresiden.

$$F^2 + 2bF + b^2 = d$$

Venstresiden kan vha. kvadratsætningen omskrives til $(F + b)^2$, så vi får:

$$(F + b)^2 = d$$

Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsninger, da noget i anden ikke kan være negativt. Dermed har vi vist første del af sætningen.

Hvis $d \geq 0$ så er:

$$F + b = \pm\sqrt{d}$$

Her betyder $\pm$ at både $\sqrt{d}$ og $-\sqrt{d}$ er en mulighed. Vi trækker b fra på begge sider:

$$F = -b \pm \sqrt{d}$$

Hmm hvad var det nu F var? Nåh ja det var jo $2ax$. Det kan vi sætte ind i stedet for F :

$$2ax = -b \pm \sqrt{d}$$

Til slut dividerer vi med $2a$ på begge sider af lighedstegnet:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

og vi er næsten færdige. Ligningen passer allerede med 3. del af sætningen så vi skal bare tjekke, hvad der sker hvis $d = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

hvilket også var påstanden i sætningen.

Nulpunktssætningen for andengradspolynomier (A-niveau version)

Dette bevis kræver kendskab til kvadratkomplettering.

Sætning 4.3.2

(Nulpunktsformler)

For et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ med diskriminant d gælder:

Hvis $d < 0$, så er der ingen nulpunkter.

Hvis $d = 0$, så er der et nulpunkt og det er bestemt ved

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Hvis $d > 0$, så er der to nulpunkter, x_1 og x_2 , og de er bestemt ved

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$$

Bevis

Et nulpunkt er en x -værdi hvor $f(x) = 0$. Vi gerne bestemme nulpunkterne for f , så vi skal løse ligningen:

$$f(x) = 0$$

Vi indsætter forskriften for f :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Vi trækker c på begge sider og deler derefter med a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Vi kvadratkompletterer:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}.$$

Vi regner brøken $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ og lægger den til på begge sider.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Vi forlænger brøken $\frac{c}{a}$ med $4a$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2},$$

og sætter på fælles brøkstreg:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

Vi genkender diskriminanten i tælleren:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2},$$

Nævneren i brøken på højresiden er altid positiv (hvorfor?), og derfor vil brøkens fortegn være bestemt af tælleren d .

Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsninger, da noget i anden ikke kan være negativt. Dermed har vi vist første del af sætningen.

Hvis $d \geq 0$ så er:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{d}{4a^2}}$$

Vi bruger reglen $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ på højresiden trækker $\frac{b}{2a}$ fra på begge sider:

$$x = \pm \frac{\sqrt{d}}{2a} - \frac{b}{2a}.$$

Vi sætter på fælles brøkstreg

$$x = \frac{\pm\sqrt{d} - b}{2a},$$

og bytter rundt på rækkefølgen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}.$$

Så, hvis $d > 0$ har vi altså to nulpunkter:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}.$$

Hvis $d = 0$ har vi:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a},$$

hvilket betyder at f har et enkelt nulpunkt nemlig $x = \frac{-b}{2a}$.

Kapitel 5

Procentregning og indekstal

I dette kapitel skal vi først se på procentregning, som I kender det fra folkeskolen. Derefter vil vi kigge på noget som hedder indekstal som bruges til at beskrive udviklinger. I får brug for procentregningen i det næste kapitel om eksponentielle funktioner, og I får brug for indekstal i de økonomiske fag.

5.1 Procentregning

Procent betyder "hundrededele". Spiser man f.eks. 8% af en kage betyder det altså at hvis kagen er skåret i 100 stykker, har man spist 8 stykker. Har man en pris der stiger med 10% betyder det at hvis vi deler prisen op i 100 dele, skal vi lægge 10 af disse oven i den oprindelige pris osv.

Der findes flere metoder til at regne procentregningsopgaver. Kan man allerede en metode, kan man vælge at holde fast i den og springe direkte til øvelserne i dette afsnit. Dog skal man være opmærksom på, at den metode, man allerede kender, muligvis ikke er tilstrækkelig til at regne alle øvelserne. I det følgende skal vi se på to skemaer, som viser to typer af metoder til at regne procentregningsopgaver. Metoderne vist i det første skema minder om dem, man typisk bliver undervist i i folkeskolen.

Spørgsmål	Svar
Hvad er 10% af 500?	$\frac{500}{100} \cdot 10 = 50$
10% af et tal er 500. Hvor stort er det oprindelige tal?	$\frac{500}{10} \cdot 100 = 5000$
Hvor mange procent udgør 50 ud af 500?	$\frac{50}{500} \cdot 100\% = 10\%$
Læg 10% til 500.	$500 + \frac{10}{100} \cdot 500 = 550$
Træk 10% fra 500.	$500 - \frac{10}{100} \cdot 500 = 450$
Et beløb vokser fra 500 kr. til 600 kr. Hvor mange procent er det vokset?	$\frac{600-500}{500} \cdot 100\% = 20\%$
Et beløb er faldet fra 600 kr. til 500 kr. Hvor mange procent er det faldet?	$\frac{600-500}{600} \cdot 100\% = 16,67\%$
Efter vi har lagt 10% til et beløb har vi 500 kr. Hvad havde vi før vi lagde 10% til?	$\frac{500}{100+10} \cdot 100 = 454,55$
Efter vi har fjernet 10% fra et beløb har vi 500 kr. Hvad havde vi oprindeligt?	$\frac{500}{100-10} \cdot 100 = 555,56$

Skema 1

Metoderne i skema 1 er simple at bruge, da man blot erstatter tallene i eksemplerne med sine egne. Har man en god forståelse af hvad procent betyder, er der dog hurtigere metoder til at udregne procenter. Disse er vist i skema 2:

Spørgsmål	Svar
Hvad er 10% af 500?	$0,1 \cdot 500 = 50$
10% af et tal er 500. Hvor stort er det oprindelige tal?	$\frac{500}{0,1} = 5000$
Hvor mange procent udgør 50 ud af 500?	$\frac{50}{500} = 0,1 = 10\%$
Læg 10% til 500.	$1,1 \cdot 500 = 550$
Træk 10% fra 500.	$500 \cdot 0,9 = 450$
Et beløb vokser fra 500 kr. til 600 kr. Hvor mange procent er det vokset?	$\frac{600}{500} - 1 = 0,2 = 20\%$
Et beløb er faldet fra 600 kr. til 500 kr. Hvor mange procent er det faldet?	$1 - \frac{500}{600} = 0,1667 = 16,67\%$
Efter vi har lagt 10% til et beløb har vi 500 kr. Hvad havde vi før vi lagde 10% til?	$\frac{500}{1,1} = 454,55$
Efter vi har fjernet 10% fra et beløb har vi 500 kr. Hvad havde vi oprindeligt?	$\frac{500}{0,9} = 555,56$

Skema 2

Øvelse 5.1.1

Du skal regne følgende procentregningsopgaver. Du bestemmer selv metoden, men jeg anbefaler metoderne for Skema 2.

- a) En elev drikker 150 ml af en 500 ml Faxe Kondi. Hvor mange procent af sodavanden har eleven drukket?
- b) En elev har 10% fravær i matematik. Der har været 20 matematikmoduler. I hvor mange moduler har eleven været fraværende?
- c) En elev køber en telefon med sin far. De aftaler at eleven skal betal 30% af prisen. Eleven ender med at betale 2700 kr. Hvad kostede telefonen?
- d) En vare koster 200 kr. og stiger derefter med 20%. Hvad koster varen efter prisstigningen.
- e) Momssatsen i England er 20% (i hvert fald på tidspunkt opgaven er skrevet). En vare koster 30 GBP med engelsk moms, hvad koster den uden?
- f) Brøndby IF tilbød i 2013/2014 sæsonkort for 995 kr. Var man aktionær kunne man få det 20% billigere. Hvad kostede et sæsonkort for aktionærer?
- g) En elev køber et par sko til 840 kr. Skoene var sat 30% ned. Hvad var normalprisen?
- h) En elev arbejder i en butik der sælger slik. En kunde køber en pose piratos for 10 kr. som normalt koster 20 kr. Hvor mange procent har kunden fået i rabat?
- i) Priserne på hindbærssnitter stiger fra 10 til 12 kr. Hvor stor er prisstigningen i procent?

Forklaring af metoderne

En ting er at kunne regne procentregningsopgaver, noget andet er at kunne forklare metoderne.

Vi vil nu se på den første metode i skema 1. Det påstås altså at vi kan finde 10% af 500 ved at regne:

$$\frac{500}{100} \cdot 10 = 50.$$

Hvorfor er det mon rigtigt? Jo altså, procent betyder hundrededele, så ved at dividere 500 med 100 finder vi 1 hundrededel. Dem skal vi så have 10 af, og derfor ganger vi med 10. Hermed er den første metode i skema 1 forklaret.

Øvelse 5.1.2

Nu er det din tur til at forklare.

- Forklar så mange af metoderne i skema 1 som du kan.
- Forklar så mange af metoderne i skema 2 som du kan. Du må godt tage udgangspunkt i skema 1.

5.2 Indekstal

Indekstal bruges til at få overblik over en udvikling. De er især nyttige hvis man vil sammenligne udviklinger.

Betragt følgende to tilskuerudviklinger:

Sæson	08/09	9/10	10/11	11 /12	12/13	13/14
Tilskuer gennemsnit	16908	14372	12849	12600	9166	15931

Tilskuerudvikling for Brøndby IF

Sæson	08/09	9/10	10/11	11 /12	12/13	13/14
Tilskuer gennemsnit	7777	7107	7212	7422	5800	8061

Tilskuerudvikling for FCM

Det er svært direkte at sammenligne de to udviklinger. Vi kan se at de begge starter godt, er i krise i 12/13-sæsonen, og slutter godt. Hvem har mon haft den bedste udvikling?

Det finder vi ud af ved at lave indekstal. Man laver indekstal ved først at vælge et basisår. Det er typisk det første år i udviklingen. Basisåret er udgangspunktet for sammenligningen og derfor sætter man værdien til 100 (som i 100%). Derefter udregner man de andre indekstal ved at finde ud af hvor mange procent den pågældende værdi udgør af værdien i basisåret.

Selvom indekstal egentligt er procentværdier, skrives de uden procenttegn.

Eksempel 5.2.1

Vi beregner indekstallet for BIF for 11/12 sæsonen med 08/09 som basisår. Tilskuertallet for 11/12 er 12600 og tilskuertallet for basisåret er 16908. Derfor

kan vi udregne:

$$I = \frac{12600}{16908} = 0,7452 = 75\%.$$

Dvs. indekstallet I er 75. Vi laver et nyt skema:

Sæson	08/09	9/10	10/11	11 /12	12/13	13/14
Indekstal	100			75		

Øvelse 5.2.1

Nu er det din tur.

- a) Regn resten af indekstallene for BIF.

Procentpoint

Kigger vi på indekstallene for tilskuertallene for BIF, kan vi se at fra sæsonen 12/13 til 13/14 er indekstallet vokset med:

$$94 - 54 = 40.$$

Vi siger at indekstallet er vokset med 40 procentpoint. Procentpoint er altså forskellen mellem to indekstal og det er noget andet end den procentvise stigning. Vil vi have væksten i procent skal vi regne:

$$\frac{94 - 54}{54} \cdot 100\% = 74\%.$$

Vi ser at stigningen på 40 procentpoint faktisk er en stigning på 74%.

Øvelse 5.2.2

Her ses indekstallene for FCM:

Sæson	08/09	9/10	10/11	11 /12	12/13	13/14
Indekstal	100	91	93	95	75	104

- a) Hvem vil du sige har haft den bedste tilskuerudvikling i perioden 08/09-13/14?

Øvelse 5.2.3

Se på indekstallene for FCM i sæsonen 12/13 og 13/14.

- a) Med hvor mange procentpoint stiger indekstallet fra 12/13 til 13/14?
- b) Med hvor mange procent stiger indekstallet fra 12/13 til 13/14?

Beregning af værdier ud fra indekstal

Ligesom man kan udregne indekstal ud fra nogle værdier kan man også regne baglæns hvis man har indekstallene, men ikke værdierne. Man skal dog have mindst en værdi før man kan finde resten.

Antag at en vare koster 250 kr. i 2005 som er basisåret og antag at indekstallet for varens pris i 2011 er 130. Vi kan så regne varens pris i 2011 ved at tage 130% af 250:

$$250 \cdot 1,3 = 325.$$

Varens pris i år 2011 var altså 325 kr.

Øvelse 5.2.4

Nedenunder ses tilskuertallene for SønderjyskE:

Sæson	08/09	9/10	10/11	11 /12	12/13	13/14
Tilskuergennemsnit	3420	3419	3283	?	3005	?
Indekstal	100	?	96	96	?	102

- a) Bestem de manglende værdier.

Kapitel 6

Ekspontielle funktioner

Ekspontielle funktioner opstår, når noget vokser eller aftager med en fast procent. Det kunne f.eks. være en konto, som blev tilskrevet en rente. Ofte vil vi dog kigge på situationer, hvor noget vokser/aftager tilnærmelsesvist ekspontielt. Det kunne være en maskine der mister værdi, udbredelse af en sygdom, bakterievækst, osv.

6.1 Introduktion til ekspontielle funktioner

Vi starter selvfølgelig med at definere, hvad en ekspontiel funktion er:

Definition 6.1.1

En *ekspontiel funktion* er en funktion på formen $f(x) = ba^x$, hvor $a > 0$, $a \neq 1$ og $b > 0$.

Tallet a kaldes *grundtallet* eller *fremskrivningsfaktoren* og b kaldes *begyndelsesværdien*.

Øvelse 6.1.1

Mange elever kan ikke finde ud af at udtale ”ekspontiel funktion” korrekt. Det udtales ellers præcist om det staves.

- a) Sig ”ekspontiel funktion” højt 5 gange efter hinanden.

Øvelse 6.1.2

I definition 6.1.1 stod der at $a > 0$, $a \neq 1$ og $b > 0$.

- a) Hvad betyder det?

Øvelse 6.1.3

Bestem a og b i følgende eksponentielle funktioner.

- a) $f(x) = 2 \cdot 5^x$
b) $f(x) = 3000 \cdot 1,02^x$
c) $f(x) = 1,4^x$

Øvelse 6.1.4

Afgør hvilke af følgende funktioner der er eksponentielle funktioner:

- a) $f(x) = 2 \cdot 3^x$
b) $f(x) = 2x^2 + 1$
c) $f(x) = 4 \cdot x^2$
d) $f(x) = 1,3^x$
e) $f(x) = 20 \cdot 1^x$
f) $f(x) = -3 \cdot 6^x$
g) $f(x) = 5 \cdot 1^x$

Øvelse 6.1.5

Lad $f(x) = 5000 \cdot 1,6^x$.

- a) Bestem grundtallet og begyndelsesværdien.
b) Bestem $f(-1)$ og $f(3)$. Bare brug en lommeregner/GeoGebra. Det er svært at gøre i hånden.

Øvelse 6.1.6

Antag at indbyggertallet i en bestemt by kan beskrives med funktionen $f(x) = 10312 \cdot 1,05^x$, hvor x er antal år efter 2020.

- a) Hvor mange indbyggere er der i byen 5 år efter 2020?
- b) Hvor mange indbyggere er der i byen i år 2031?

Den naturlige eksponentialfunktion

Leonhard Euler var en cool matematiker, som levede i tidsrummet 1707-1783. Han regnes som at være en af historiens allerstørste matematikere. Det er vi dog ligeglade med lige nu, og vi skal bare bruge et tal som er opkaldt efter ham, nemlig Eulers tal som bliver betegnet med e og er givet ved:

$$e = 2.71828182845904523536 \dots$$

Eulers tal er, ligesom π , et tal med uendelig mange decimaler uden noget system. Ligesom vi husker $\pi = 3,14$ vil vi også huske $e = 2,72$. Eulers tal optræder mange steder i matematik og naturvidenskab, men her er vi interesserede i det i forbindelse med eksponentielle funktioner.



Leonhard Euler

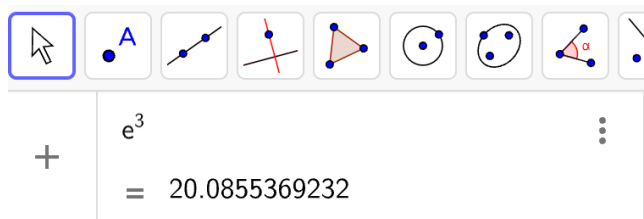
Definition 6.1.2

Den naturlige eksponentialfunktion er givet ved forskriften $f(x) = e^x$.

Eksempel 6.1.1

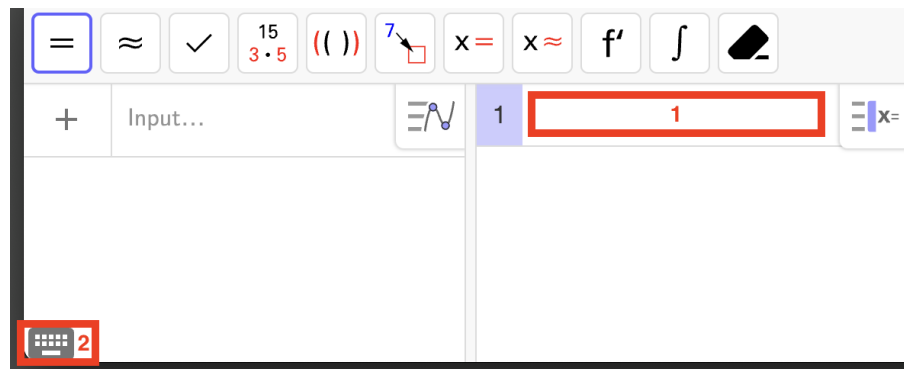
Vi kan beregne e^3 i GeoGebra

Har vi et algebra vindue kan man bare skrive et almindeligt "e":



Skriver man et almindeligt "e" i CAS tror GeoGebra at man mener "en variable som hedder e" i stedet for Eulers tal. Derfor skal man finde Eulers tal på det virtuelle tastatur. Vi klikker først først i et CAS input og så dukker der et lille

tastatur op neders til venstre:



Her finder vi Eulers tal e :



Vi kan nu regne e^3 i CAS-vinduet:



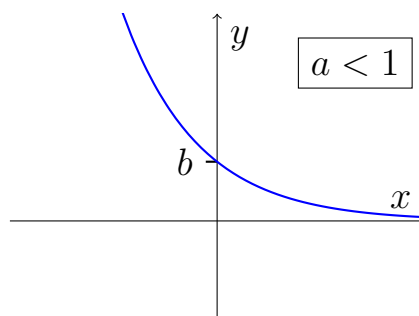
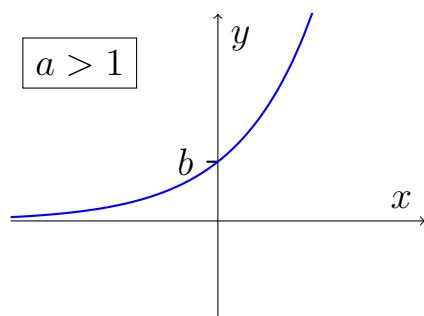
Øvelse 6.1.7

Åben GeoGebra

- Regn e^2 i et Algebravindue.
- Regn e^2 i et CAS-vindue.

Eksponentielle funktioners graf

Grafen for en eksponentiel funktion kan se ud på to måder alt efter værdien af a :



Vi ser at b er der, hvor funktionen skærer y -aksen og at a afgøre om funktionen er voksende eller aftagende. Vi skal se nærmere på betydningen af a i afsnittet om eksponentiel vækst. Som graferne antyder gælder følgende for enhver eksponentiel funktion f :

$$\text{Dm}(f) =]-\infty; \infty[\quad \text{og} \quad \text{Vm}(f) =]0; \infty[$$

Definitions og værdimængden afhænger således ikke af den konkrete forskrift.

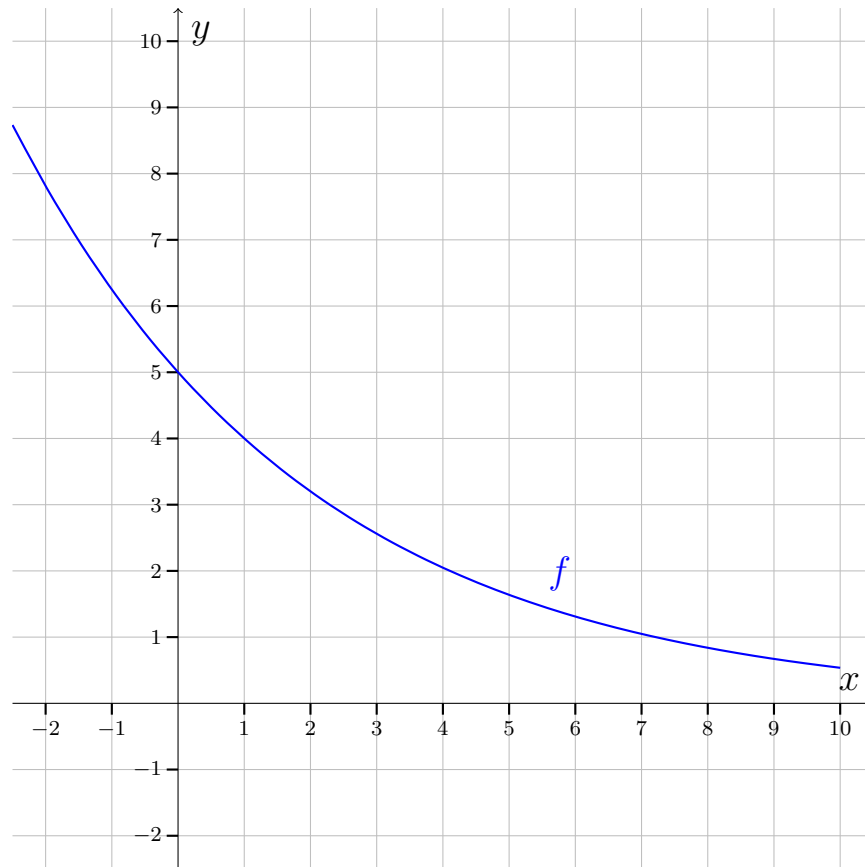
Øvelse 6.1.8

Lad $f(x) = 2 \cdot 4^x$.

- Bestem grundtallet og begyndelsesværdien.
- Bestem $f(0)$ uden at regne – bare ved at betragte forskriften.
- Beregn $f(2)$
- Hvad kan man sige om grafen ud fra forskriften.

Øvelse 6.1.9

Betragt graferne for den eksponentielle funktion $f(x) = ba^x$



- a) Bestem b .
- b) Hvad kan man sige om værdien af a ?
- c) Bestem ved aflæsning $f(4)$.
- d) Løs ved aflæsning $f(x) = 4$.

Bestemmelse af forskriften når vi kender to punkter på grafen

Ligesom ved lineære funktioner kan vi finde forskriften når vi kender to punkter på grafen. Vi har følgende sætning:

Sætning 6.1.1

Hvis grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ går igennem punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1) så kan a og b bestemmes med følgende formler:

$$a = \sqrt[x_1 - x_0]{\frac{y_1}{y_0}} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_0}{a^{x_0}}$$

Det er en forudsætning for at kunne anvende sætningen, at man kan uddrage rødder. Altså at man kan beregne f.eks. $\sqrt[3]{8}$. Metoden til at udregne den slags udtryk afhænger af hvilket computerprogram/lommeregner man bruger. Men er et smart trick. Man kan anvende reglen

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Det virker på alle computere/lommeregnerne.

Eksempel 6.1.2

Vi vil udregne $\sqrt[3]{8}$. Vi taster derfor følgende ind på lommeregneren/Excel:

$$8^{(1/3)}$$

Det giver så 2.

Øvelse 6.1.10

Udregn følgende rødder:

- a) $\sqrt[3]{27}$ (kan du regne den i hovedet?)
- b) $\sqrt[4]{16}$ (kan du regne den i hovedet?)
- c) $\sqrt[5]{10}$ (kræver hjælp fra computer/lommeregner)

Eksempel 6.1.3

Vi vil bestemme forskriften for den eksponentielle funktion gennem punkterne

(1, 2) og (5, 7). Vi finder først a :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[x_1 - x_0]{\frac{y_1}{y_0}} \\ &= \sqrt[5-1]{\frac{7}{2}} \\ &= \sqrt[4]{3,5} \\ &= 1,3679. \end{aligned}$$

Vi finder derefter b :

$$b = \frac{y_0}{a^{x_0}} = \frac{2}{1,3679^1} = 1,46.$$

Til sidst sætter vi a og b ind i den generelle forskrift $f(x) = ba^x$:

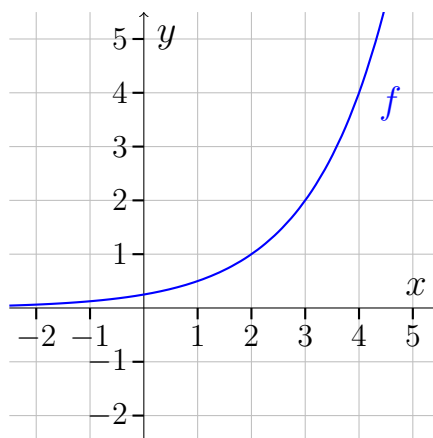
$$f(x) = 1,46 \cdot 1,37^x.$$

Øvelse 6.1.11

- a) Bestem forskriften den eksponentielle funktion som går igennem (3, 5) og (8, 27).

Øvelse 6.1.12

Betragt grafen for en eksponentiel funktion f :



- a) Aflæs to punkter på grafen og bestem en forskrift for f

6.2 Eksponentiel vækst

I indledningen til dette kapitel blev det påstået at eksponentielle funktioner vokser med en fast procent. I den næste øvelse vil vi efterprøve den påstand på en konkret funktion.

Øvelse 6.2.1

Betragt sildebenet for $f(x) = 2 \cdot 1,3^x$:

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	2,6	3,38	4,39

a) Hvor mange procent vokser f med når x vokser med 1?

Som øvelsen bekræftede vokser eksponentielle funktioner med en fast procent når x vokser med 1. Vi skal nu se på, hvordan man nemt finder væksten. Først definerer vi vækstraten:

Definition 6.2.1

Vækstraten r bestemmes ved $r = a - 1$.

Vi finder væksten ved hjælp af følgende sætning:

Sætning 6.2.1

For en eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ med vækstrate $r = a - 1$ gælder at:

Hver gang x vokser med 1 vokser y med: $r \cdot 100\%$.

Funktionen skærer y -aksen i b .

Vækstraten r er altså den procentvise vækst som decimaltal.

Eksempel 6.2.1

Vi bestemmer vækstraten for funktionen $f(x) = 2 \cdot 1,3^x$ fra øvelse 1. Vi har

$$r = a - 1 = 1,3 - 1 = 0,3.$$

Altså er vækstraten $r = 0,3$. Det betyder at funktionen vokser med 30% hver gang x vokser med 1.

Eksempel 6.2.2

Vi bestemmer vækstraten for funktionen $f(x) = 7 \cdot 0,9^x$. Vi har

$$r = a - 1 = 0,9 - 1 = -0,1.$$

Altså er vækstraten $r = -0,1$. At vokse med -10% er det samme som at aftage med 10% . Altså aftager f med 10% hver gang x vokser med 1.

Øvelse 6.2.2

Bestem vækstraten for følgende funktioner. Hvor mange procent vokser de med, når x vokser med 1?

- a) $f(x) = 3 \cdot 1,2^x$
- b) $f(x) = 2000 \cdot 4^x$
- c) $f(x) = 20 \cdot 0,8^x$

Eksempel 6.2.3

En vintage guitar kostede 30.000 kr. i år 2014 og stiger med 5% om året. Vi kan beskrive guitarens værdi med funktionen:

$$f(x) = 30000 \cdot 1,05^x,$$

hvor x er antal år efter 2014 og $f(x)$ er guitarens værdi.

Øvelse 6.2.3

På en fremmet planet var befolkningstallet 1. januar 2014 på 7,15 milliarder og voksede med ca. $1,2\%$ hvert år.

- a) Angiv vækstraten for befolkningstallet.
- b) Opskriv en forskrift for en funktion der beskriver befolkningstallet i milliarder, x år efter år 1. januar 2014.
- c) Hvor mange rumvæsener er der ifølge modellen på planeten 1. januar 2020?
- d) I hvilket årstal kommer vi ifølge modellen første gang over 10 milliarder? Du er nødt til at gøre det grafisk i GeoGebra. Senere vil du lære at gøre det ved beregning.

Øvelse 6.2.4

En dame køber en brugt bil 1. januar 2014. Bilens værdi er givet ved forskriften:

$$f(x) = 200000 \cdot 0,7^x,$$

hvor x er antal år efter 1. januar 2014 og $f(x)$ er bilens værdi i kr.

- a) Hvad kostede bilen, da han købte den?
- b) Hvor mange procent taber bilen i værdi om året?
- c) Hvad er den værd 1. januar 2018?
- d) I hvilket årstal er bilen mindre værd en 5.000 kr?

6.3 Eksponentiel regression i WordMat

OBS: Dette afsnit **kan** springes over, hvis du er på den gamle ordning (startet før 2024). I stedet skal du så læse afsnit 6.4.

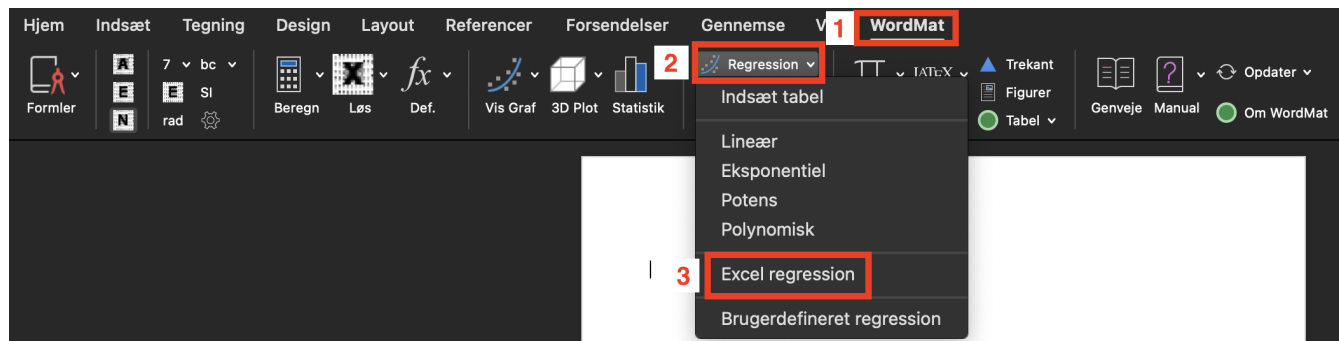
Kan I huske lineær regression? Eksponentiel regression er tilsvarende, men bare med eksponentielle funktioner i stedet for lineære (surprise).

Vi vil nu se på global produktion af plastik i perioden 1950-1969. Data kan [downloades her](#). Vi vil gerne lave en model som tager udgangspunkt i år 1950. Dvs. år 1950 skal være "år 0". Vi laver derfor en ekstra kolonne som viser antallet af år efter år 1950:

	A	B	C
1	År	Antal år efter 1950	produceret plastik i mio. ton.
2	1950	0	2
3	1951	1	2
4	1952	2	2
5	1953	3	3
6	1954	4	3
7	1955	5	4
8	1956	6	5
9	1957	7	5
10	1958	8	6
11	1959	9	7
12	1960	10	8
13	1961	11	9
14	1962	12	11
15	1963	13	13
16	1964	14	15
17	1965	15	17
18	1966	16	20
19	1967	17	23
20	1968	18	27
21	1969	19	32
22			

Vi har regnet den ekstra kolonne ved at trække 1950 fra alle årstallene (jaja, man kunne også bare skrive 0, 1, 2, ..., men det virker kun, fordi der ikke er spring i årstallene).

Vi kan lave eksponentiel regression i WordMat på helt tilsvarende måde som ved lineær regression. Hvis du har WordMat installeret, men har glemt hvordan man finder regressionsarket, så se her:



Hvis ikke du har WordMat installeret, kan du [downloade arket her](#).

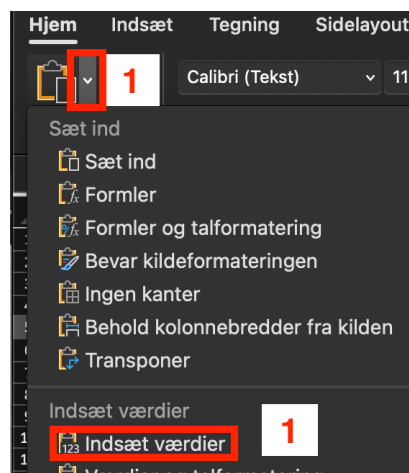
Åben først WordMat-arket og copy-paste data ind:

The screenshot shows the WordMat interface with a data table on the left and a 'Punkter' table on the right. The data table has columns 'År', 'Antal år efter 1950', and 'Produceret plastik i mio. ton.'. The 'Punkter' table has columns 'x' and 'y'. Red boxes labeled '1' and '2' highlight the data being pasted into the 'Punkter' table.

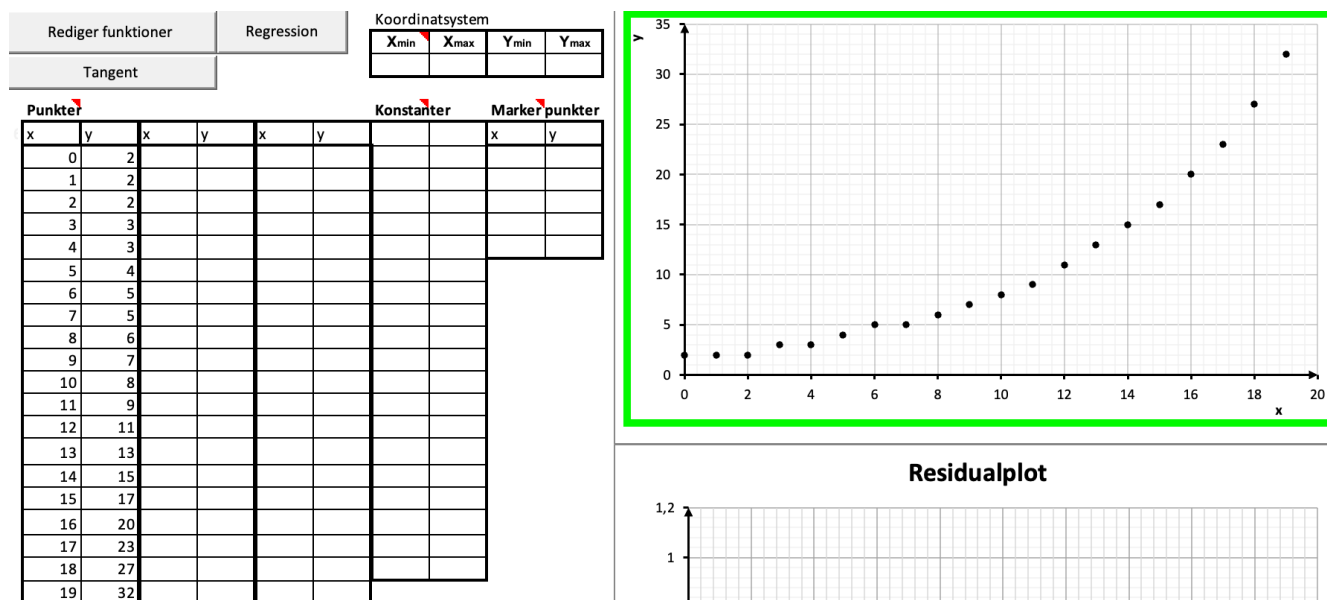
År	Antal år efter 1950	Produceret plastik i mio. ton.
1950	0	2
1951	1	2
1952	2	2
1953	3	3
1954	4	3
1955	5	4
1956	6	5
1957	7	5
1958	8	6
1959	9	7
1960	10	8
1961	11	9
1962	12	11
1963	13	13
1964	14	15
1965	15	17
1966	16	20
1967	17	23
1968	18	27
1969	19	32

Punkter	
x	y
0	2
1	2
2	2
3	3
4	3
5	4
6	5
7	5
8	6
9	7
10	8
11	9
12	11
13	13
14	15
15	17
16	20
17	23
18	27
19	32

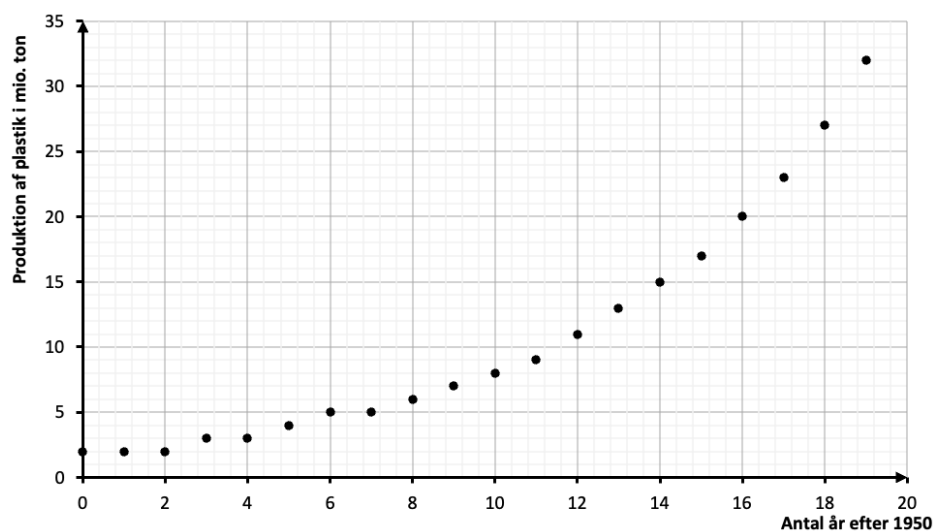
Hvis du har problemer med at copy-paste årstallene over så prøv at du vælge "indsæt værdier" når du paster data:



Vi får nu følgende output:

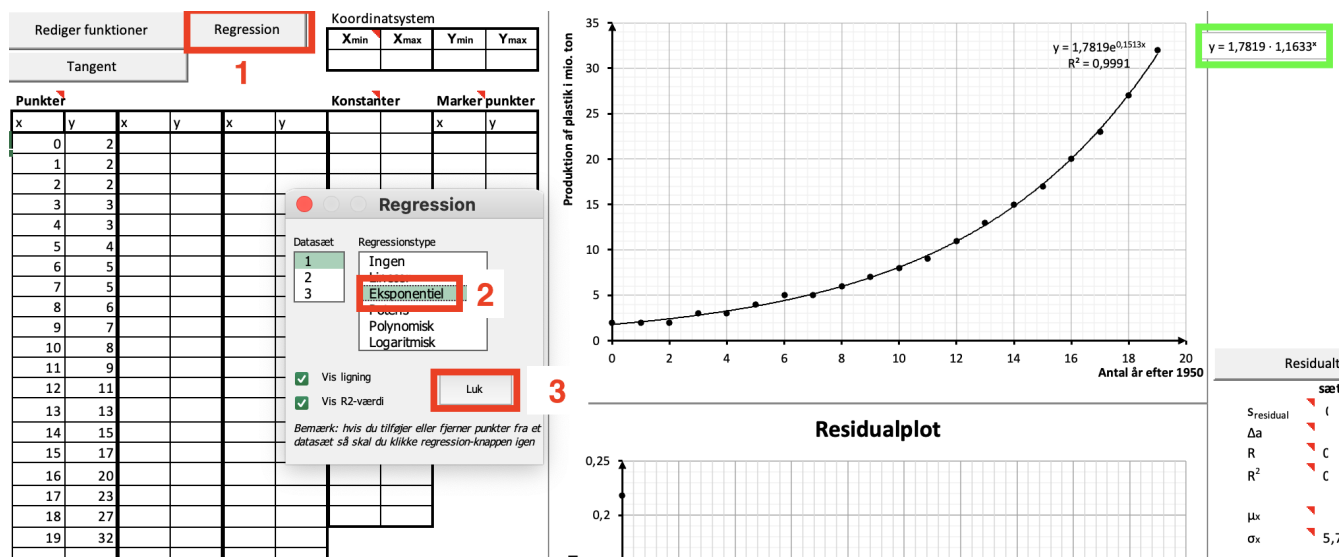


Vi husker, at indholdet I den grønne boks kaldes et for ”xy-plot for udviklingen”. Vi klikker på det lille ”x” og det lille ”y” ved akserne og ændrer aksetitlerne:



Sikke et flot xy-plot!

Vi laver nu en eksponentiel regressionsmodel ved at klikke som vist her:

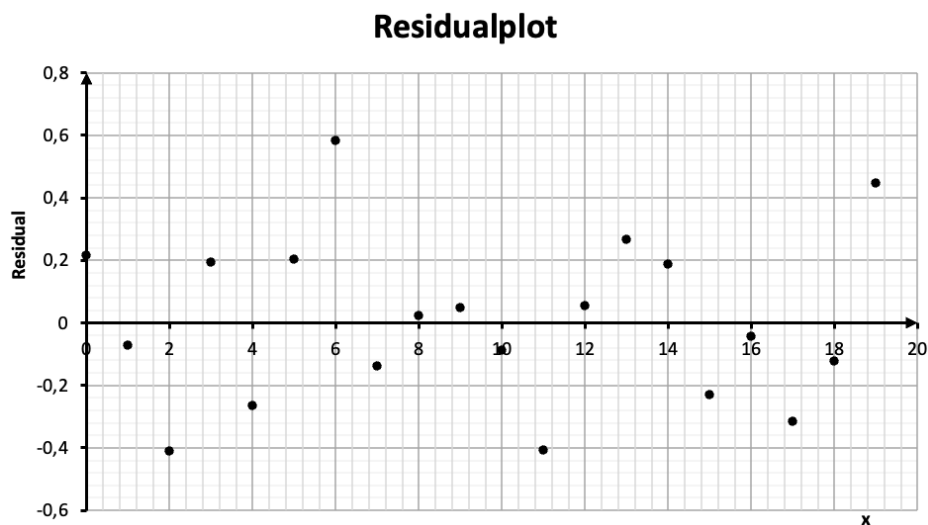


Vi ser i screenshottet, at modellen er:

$$y = 1,7819 \cdot 1,1633^x.$$

Vækstraten for modellen er $1,1633 - 1 \approx 0,16$, hvilket kan fortolkes som, at den globale produktion af plastik er vokset med 16% om året i perioden 1950-1970. De 1,7819 er antal ton produceret plastik i 1950 ifølge modellen. Vi kan se i tabellen, at det rigtige tal er 2 ton produceret plastik i 1950, men modellen er jo et kompromis mellem alle tallene i tabellen, og derfor vil den typisk ramme lidt forkert – det gælder også for startværdien.

WordMat giver os også et residualplot:



Vi ser, at punkterne ligger tilfældigt omkring x-aksen som de helst skal. Når vi laver eksponentiel regression, vil vi ofte se at residualer bliver mere ekstreme jo længere vi kommer hen i udviklingen. Det er dog ikke tilfældet i dette residualplot

og det er ikke noget vi i det hele taget vil bekymre os for her på mathhx.

Øvelse 6.3.1

Færre mennesker lever i dag i fattigdom end tidligere. En af årsagerne er den generelle stigning i velstand, som også kommer de fattige til gode. Men staten er også blevet bedre til at passe på de fattige (måske bortset fra de senere år). I [filen her](#) kan du se andelen af BNP brugt på velfærd i Danmark i perioden 1880-1979.

- a) Lav et xy-plot som viser andelen af BNP brugt på velfærd som funktion af antallet af år efter 1880. Vær opmærksom på at der er nogle år som mangler i tabellen, så der bliver spring i x -værdierne. Husk aksetitler!
- b) Opstil en regressionsmodel som giver andelen som funktion af antallet af år efter 1880.
- c) Hvad er betydning af tallet 0,7611 i regressionsmodellen?
- d) Hvad er betydningen af 1,0333 i regressionsmodellen?
- e) Hvor stor en andel af BNP ville vi have brugt på velfærd i 2022, hvis udviklingen havde fortsat?

Øvelse 6.3.2

Et interessant eksempel på eksponentiel udvikling er Moores lov:

Antallet af transistorer pr. mikroprocessor fordobles hvert andet år.

Dette betyder løst sagt, at vores computere bliver dobbelt så hurtige hvert andet år.

Antallet af transistorer pr. mikroprocessor kan ses [her](#)

- Lav et xy-plot, der viser antallet af transistorer pr. mikroprocessor som funktion af antal år efter 1971. Antallet skal være målt i milliarder.
- Bestem en eksponentiel regressionsmodel for udviklingen. Antallet skal ikke være i milliarder her.
- Bestem R^2 , lav et residualplot og vurder modellen
- Hvor stor en vækst har der været i perioden?
- Hvor mange transistorer vil der være pr. mikrochip i 2030, hvis udviklingen fortsætter?
- Hvornår rammer antallet af transistorer 500 mia? Altså under forudsætning af at udviklingen fortsætter.

6.4 Eksponentiel regression

OBS: Det afsnit er for elever på den gamle ordning (startet før 2024) eller for elever, som ønsker at lære flere metoder til at lave lineær regression. Er man på den nye ordning er afsnittet valgfrit, men planlægger man at afslutte matematik på A-niveau, så anbefaler jeg, at man regner dette afsnit også.

Forudsætninger

Dette afsnit kræver kendskab til lineær regression, så hvis du ikke har styr på det, så se afsnit [3.6](#).

Kan I huske vi tidligere har lært om lineær regression? Eksponentiel regression er tilsvarende, men bare med eksponentielle funktioner i stedet for lineære (surprise).

Vi ser på global produktion af plastik i perioden 1950-1969. Data kan [downloades her](#). Vi vil gerne lave en model som tager udgangspunkt i år 1950. Dvs. år 1950

skal være "år 0". Vi laver derfor en ekstra kolonne som viser antallet af år efter år 1950:

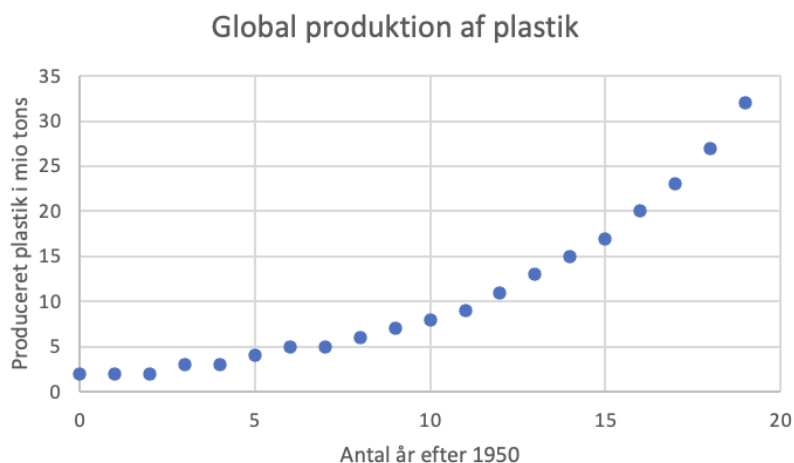
	A	B	C
1	År	Antal år efter 1950	produceret plastik i mio. ton.
2	1950	0	2
3	1951	1	2
4	1952	2	2
5	1953	3	3
6	1954	4	3
7	1955	5	4
8	1956	6	5
9	1957	7	5
10	1958	8	6
11	1959	9	7
12	1960	10	8
13	1961	11	9
14	1962	12	11
15	1963	13	13
16	1964	14	15
17	1965	15	17
18	1966	16	20
19	1967	17	23
20	1968	18	27
21	1969	19	32
22			

Vi har regnet den ekstra kolonne ved at trække 1950 fra alle årstallene (jaja, man kunne også bare skrive 0, 1, 2..., men det virker kun fordi der ikke er spring i årstallene)

Ekspontientiel regression i Excel

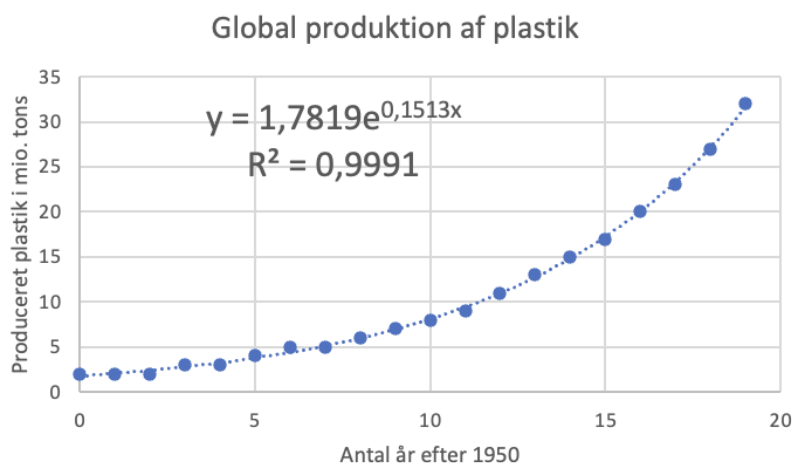
Vi starter med at se på hvordan man gør i Excel.

Vi laver et xy-plot med aksetitler og det hele. Ikke noget nyt her:



Vi ser, at det ser ud som om, at punkterne følger en eksponentiel funktion.

Vi tilføjer nu en tendenslinje. Vi gør ligesom når vi laver lineær regression, bortset fra at vi vælger en eksponentiel model. Husk at sæt flueben i "Vis ligning i diagram" og "Vis R-kvadreret værdi i diagram". Det giver os følgende:



Vi ser at punkterne ligger pænt omkring grafen for modellen, så udviklingen er godt beskrevet med en eksponentiel model. Den høje R^2 bekræfter også dette. Vi ser at Excel giver os forskriften:

$$y = 1,7819e^{0,1513x}$$

Det er noget møg, da vi jo plejer at skrive eksponentielle funktioner som $f(x) = b \cdot a^x$. Heldigvis kan vi nemt omskrive funktionen til den rigtige form. Vi kan direkte bruge de 1,7819 som b -værdi og a kan bestemmes ved

$$a = e^{0,1513} = 1,1633$$

Vi har altså modellen:

$$y = 1,7819 \cdot 1,1633^x.$$

Vækstraten for modellen er $1,1633 - 1 \approx 0,16$, hvilket kan fortolkes som, at den globale produktion af plastik er vokset med 16% om året i perioden 1950-1970. De 1,7819 er antal ton produceret plastik i 1950 ifølge modellen. Vi kan se i tabellen er at det rigtige tal er 2 ton produceret plastik i 1950, men modellen er jo et kompromis mellem alle tallene i tabellen og derfor vil den typisk ramme lidt forkert – det gælder også for startværdien.

I de følgende opgaver bestemmer du selv om du bruger Excel eller GeoGebra (se ekstraafsnit nederst for GeoGebra guide)

Øvelse 6.4.1

Færre mennesker lever i dag i fattigdom end tidligere. En af årsagerne er den generelle stigning i velstand som også kommer de fattige til gode. Men staten er også blevet bedre til at passe på de fattige (måske bortset fra de seneste år). I [filen her](#) kan du se andelen af BNP brugt på velfærd i Danmark i perioden 1880-1979.

- a) Lav et xy-plot som viser andelen af BNP brugt på velfærd som funktion af antallet af år efter 1880. Vær opmærksom på at der er nogle år som mangler i tabellen, så der bliver spring i x -værdierne. Husk titel og aksetitler
- b) Opstil en regressionsmodel som giver andelen som funktion af antallet af år efter 1880.
- c) Hvad er betydning af tallet 0,7611 i regressionsmodellen?
- d) Hvad er betydningen af 1,0333 i regressionsmodellen?
- e) Hvor stor en andel af BNP ville vi have brugt på velfærd i 2022, hvis udviklingen havde fortsat?

Øvelse 6.4.2

Et interessant eksempel på eksponentiel udvikling er Moores lov:

Antallet af transistorer pr. mikroprocessor fordobles hvert andet år.

Dette betyder løst sagt at vores computere bliver dobbelt så hurtige hvert andet år.

Antallet af transistorer pr. mikroprocessor kan ses [her](#)

- a) Lav et xy-plot, der viser antallet af transistorer pr. mikroprocessor som funktion af antal år efter 1971. Antallet skal være målt i milliarder.
- b) Bestem en eksponentiel regressionsmodel for udviklingen. Antallet skal ikke være i milliarder her.
- c) Bestem R^2 .
- d) Er det rigtigt at udviklingen er eksponentiel?
- e) Hvor stor en vækst har der været i perioden?
- f) Hvor mange transistorer vil der være pr. mikrochip i 2030, hvis udviklingen fortsætter?
- g) Hvornår rammer antallet af transistorer 500 mia? Altså under forudsætning af at udviklingen fortsætter.

Ekstra

Eksponentiel regression i GeoGebra

Eksponentiel i GeoGebra fungerer helt som lineær regression. Hvis man vælger modellen "Vækst" i stedet for "Eksponentiel", får man modellen direkte uden at skulle regne noget. Man skal bare vælge modellen

$$\text{Eksponentiel } C \cdot a^x$$

Øvelse 6.4.3

Med udgangspunkt i eksemplet med produktion af plastik som ovenover ([klik her for data](#)) skal du gøre følgende i GeoGebra:

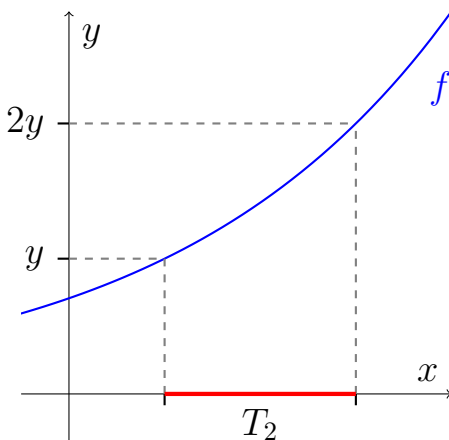
- Lav en regressionsmodel ved at vælge som model.
- Bestem determinationskoefficienten.
- Lav et xy-plot for produktionen af plastik med aksetitler og det hele.
- Lav et residualplot.
- Vurder modellen

6.5 Fordobling og halveringskonstant

Fordoblings og halveringskonstanter er størrelser vi knytter til eksponentielle funktioner som siger noget om deres vækst.

Definition 6.5.1

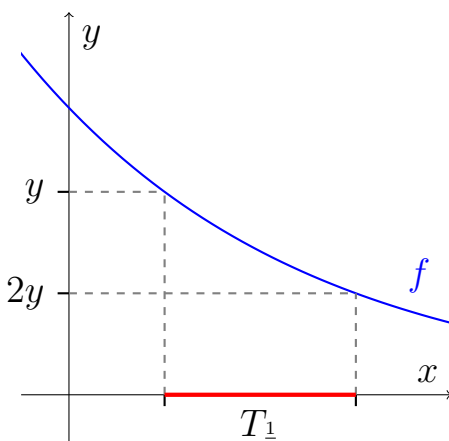
Lad $f(x)$ være en voksende funktion. Fordoblingskonstanten T_2 er længden på **det stykke** vi skal gå ud af x-aksen for at fordoble funktionsværdien:



Halveringskonstanten defineres tilsvarende:

Definition 6.5.2

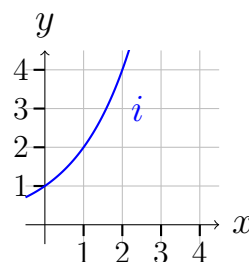
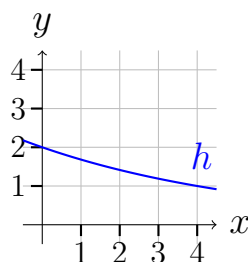
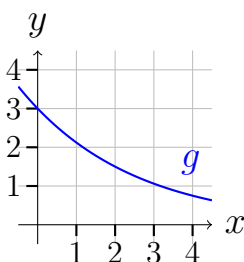
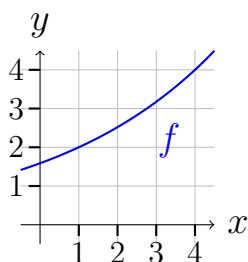
Lad $f(x)$ være en aftagende funktion. Halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}}$ er længden på **det stykke** vi skal gå ud af x-aksen for at halvere funktionsværdien:



Læg mærke til at definitionerne ikke siger noget om hvor vi skal starte. Hvis f.eks. $T_2 = 5$ for en funktion f , så vil funktionen fordobles hver gang x vokser med 5 - uanset hvilken x -værdi vi starter på.

Øvelse 6.5.1

Betragt graferne for de fire eksponentielle funktioner f , g , h og i :



- Funktionerne f og i har en fordoblingskonstant, mens funktionerne g og h har en halveringskonstant. Forklar hvorfor.
- Bestem T_2 for f .
- Bestem $T_{\frac{1}{2}}$ for g .
- Bestem $T_{\frac{1}{2}}$ for h .
- Bestem T_2 for i .

Øvelse 6.5.2

Benjamin vil gerne have du enten aflæser fordoblings eller halveringskonstanten for følgende funktion: $f(x) = 10 \cdot 0,917^x$.

- a) Vil du finde fordoblings eller halveringskonstanten? Argumenter for dit valg.
- b) Bestem den (tegn grafen i GeoGebra)!

Der findes heldigvis formler til beregning af fordoblings og halveringskonstanten. I formlerne indgår der en funktion, vi ikke har lært om endnu, nemlig funktionen $\ln(x)$ (læses "L N til x" eller "L N af x"). Denne funktion kaldes den *naturlige logaritme*, og den skal vi se nærmere på i næste kapitel.

Sætning 6.5.1

For en eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ er fordoblingskonstanten givet ved:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Sætning 6.5.2

For en eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ er halveringskonstanten givet ved:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$$

Vi behøver heldigvis ikke vide noget om logaritmer for at kunne bruge formlerne. Vi indsætter bare vores tal og taster det hele ind i GeoGebra/lommeregner.

Øvelse 6.5.3 (Svær)

Det ses, at fordoblingskonstanten og halveringskonstanten kun afhænger af a og altså ikke af b .

- a) Forklar, hvorfor det ikke er så mærkeligt.

Eksempel 6.5.1

Lad $f(x) = 5 \cdot 0,95^x$. Vi vil nu beregne halveringskonstanten for f :

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0,95)} = 13,51$$

Altså er halveringskonstanten 13,51.

Øvelse 6.5.4

Beregn:

- a) $T_{\frac{1}{2}}$ når $f(x) = 10 \cdot 0,87^x$
- b) T_2 når $f(x) = 70 \cdot 3^x$
- c) T_2 når $f(x) = 30 \cdot 0,75^x$

Øvelse 6.5.5

Vinder vender nu tilbage til øvelsen med Moores lov (øvelse 6.4.2).

- a) Bestem fordoblingskonstanten for udviklingen.
- b) Bekræfter vores udregninger Moores lov?

6.6 Beviser til eksponentielle funktioner

Forudsætninger

I beviserne får du brug for potensregneregler, så hvis du ikke kan huske dem, så se afsnit 1.7

Det er en helt essentiel egenskab ved eksponentielle funktioner, at de vokser med samme procent, hver gang x vokser med samme værdi. Vi har allerede set på en øvelse, hvor vi efterviste at det passede på en konkret funktion, men vi vil nu bevise at det gælder generelt. Vi vil også bevise at b er skæringen med y -aksen. Vi vil altså bevise sætningen:

Sætning 6.2.1

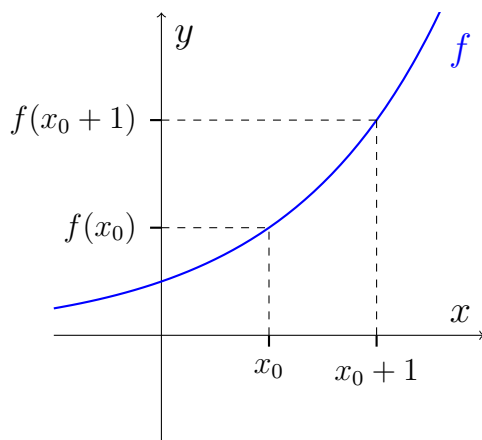
For en eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ med vækstrate $r = a - 1$ gælder at:

Hver gang x vokser med 1 vokser y med: $r \cdot 100\%$.

Funktionen skærer y -aksen i b .

Bevis

Vi skal vise, at når x vokser med 1, vokser y med $r \cdot 100\%$. Så vi vælger en vilkårlig x -værdi x_0 . Lader vi x_0 vokse med 1, kommer vi derfor ud til $x_0 + 1$. De tilhørende funktionsværdier må så være $f(x_0)$ og $f(x_0 + 1)$:



Vi regner den procentvise vækst (som decimaltal) fra $f(x_0)$ til $f(x_0 + 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\text{slut} - \text{start}}{\text{start}} &= \frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} \\ &= \frac{f(x_0 + 1)}{f(x_0)} - \frac{f(x_0)}{f(x_0)} && \text{(Brøken deles op)} \\ &= \frac{f(x_0 + 1)}{f(x_0)} - 1 \\ &= \frac{ba^{x_0+1}}{ba^{x_0}} - 1 && \text{(Forskriften indsættes)} \\ &= \frac{a^{x_0+1}}{a^{x_0}} - 1 && \text{(Der forkortes med } b) \\ &= a^{x_0+1-x_0} - 1 && \text{(Reglen } \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \text{ benyttes)} \\ &= a^1 - 1 && \text{(Da } x_0 + 1 - x_0 = 1) \\ &= a - 1 \end{aligned}$$

Vi kan dermed se, at den procentvise vækst som decimaltal er $a - 1$. Altså må den procentvise vækst være

$$(a - 1) \cdot 100\%.$$

Vi skal nu vise, at b er skæringspunktet på y -aksen. Skæringspunktet med y -aksen har førstekoordinaten 0, så vi kan finde y -værdien ved at sætte 0 ind i

forskriften:

$$\begin{aligned} f(0) &= b \cdot a^0 \\ &= b \cdot 1 && (\text{Da } a^0 = 1) \\ &= b \end{aligned}$$

Så den er god nok! Funktionen skærer y -aksen i $y = b$.

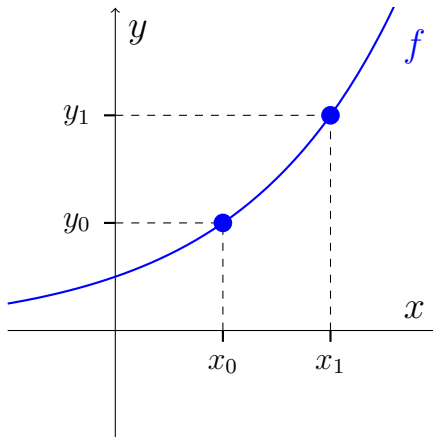
Sætning 6.1.1

Hvis grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ går igennem punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1) så kan a og b bestemmes med følgende formler:

$$a = {}^{x_1-x_0}\sqrt{\frac{y_1}{y_0}} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_0}{a^{x_0}}$$

Bevis

Vi har to punkter (x_0, y_0) og (x_1, y_1) på grafen for den eksponentielle funktion f :



Da f går igennem punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1) må der gælde at

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{og} \quad f(x_1) = y_1$$

Vi indsætter forskriften

$$ba^{x_0} = y_0 \quad \text{og} \quad ba^{x_1} = y_1$$

Vi dividerer de to ligninger. Det er i orden fordi at en ligning jo udtrykker at to ting er ens og derfor er det det samme vi dividerer med på begge sider.

$$\frac{ba^{x_1}}{ba^{x_0}} = \frac{y_1}{y_0}$$

Vi forkorter med b :

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_0}} = \frac{y_1}{y_0}$$

Vi bruger potensregnereglen $\left(\frac{a^p}{a^q}\right) = a^{p-q}$:

$$a^{x_1-x_0} = \frac{y_1}{y_0}$$

Vi uddrager den $x_1 - x_0$ 'te rod:

$$a = \sqrt[x_1-x_0]{\frac{y_1}{y_0}}$$

og vi har hermed vist formelen for a .

Formlen for b er nem at vise. Vi har allerede argumenteret for at

$$ba^{x_0} = y_0.$$

Så vi dividerer bare denne ligning med a^{x_0} på begge sider:

$$b = \frac{y_0}{a^{x_0}}$$

og vi har dermed bevist både formelen for a og formelen for b

Beviset for formlen for fordoblingskonstant

Beviset for formlen for fordoblingskonstant står i afsnit [7.5](#).

Kapitel 7

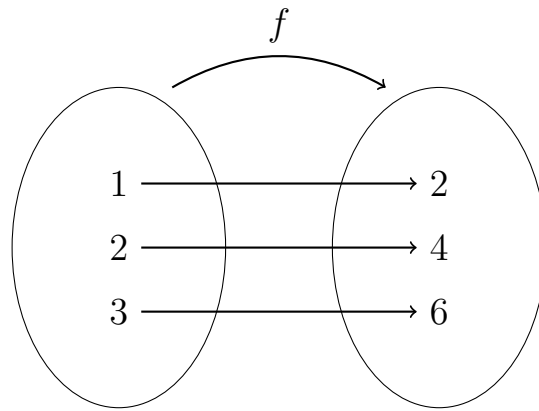
Omvendte funktioner og logaritmer

I sidste kapitel stødte vi på den naturlige logaritme $\ln(x)$. I kapitlet brugte vi $\ln(x)$ til beregne fordblings og halveringskonstanter. Men vi fik ikke rigtig nogen forklaring på, hvad det var for en funktion. Dette skal vi se nærmere på i dette kapitel, hvor vi også vil møde funktionen $\log(x)$, som er en anden slags logaritme-funktion.

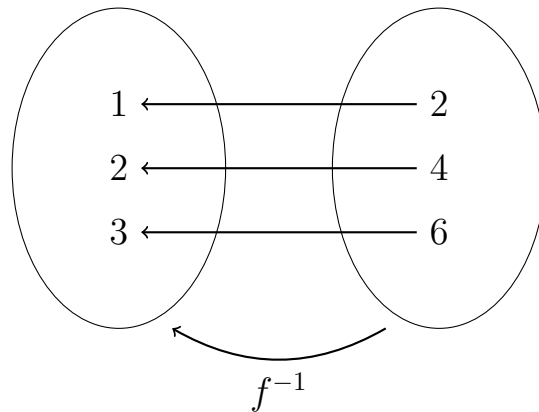
Ud over at optræde i forbindelse med eksponentielle funktioner er logaritmefunktioner også vigtige i sig selv. F.eks. bruges de til at beskrive vores sanser (høre, se, lugte, osv.).

7.1 Omvendte funktioner

Så en funktion er altså et matematisk objekt der knytter y -værdier til x -værdier. Her er funktionen $f(x) = 2x$ illustreret med mængdeboller (og for tre forskellige x -værdier):



F.eks. ser vi, at f knytter y -værdien 2 til x -værdien 1. Den omvendte funktion til f betegnes med f^{-1} , og er den funktion, som laver vores y -værdier om til de x -værdier de kom fra



Vi finder altså den omvendte funktion ved at vende pilene i diagrammet i modsat retning. Det er klart at forskriften for den omvendte funktion må være givet ved $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$. Ganger vi først med to og derefter med en halv, er vi nemlig tilbage hvor vi startede. Bemærk at indholdet i bollen til højre, som før var y -værdier, nu skal betragtes som x -værdier for den omvendte funktion.

Øvelse 7.1.1

Bestem forskriften for den omvendte funktion for følgende funktioner

- a) $f(x) = 5x$
- b) $f(x) = \frac{x}{3}$
- c) $f(x) = x + 7$
- d) $f(x) = x$

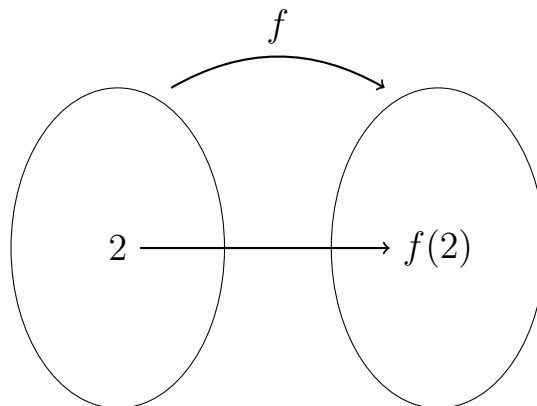
Øvelse 7.1.2

Lad f være en funktion og antag at $f(3) = 7$

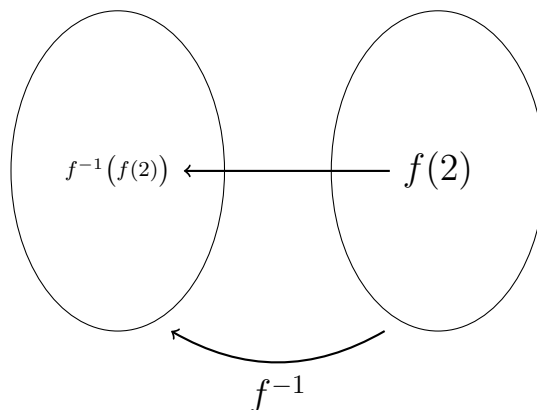
a) Bestem $f^{-1}(7)$

Eksempel 7.1.1

Lad f være en funktion som har en omvendt funktion f^{-1} . Vi vil nu regne $f^{-1}(f(2))$. Vi bruger først f på x -værdien 2:



Nu bruger vi f^{-1} på $f(2)$:



Da f^{-1} er den omvendte funktion til f , må vi være tilbage hvor vi startede og vi kan konkludere at $f^{-1}(f(2)) = 2$

Øvelse 7.1.3

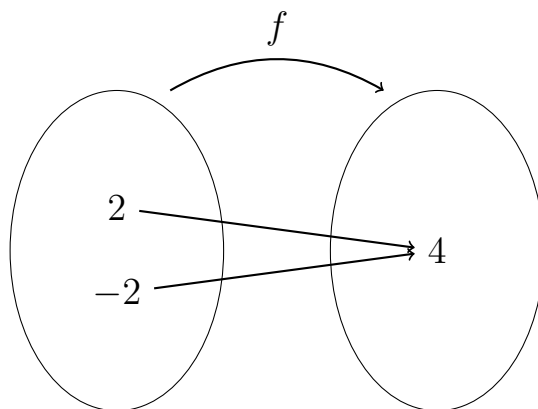
Lad f være en funktion som har en omvendt funktion f^{-1} .

a) Bestem $f^{-1}(f(3))$

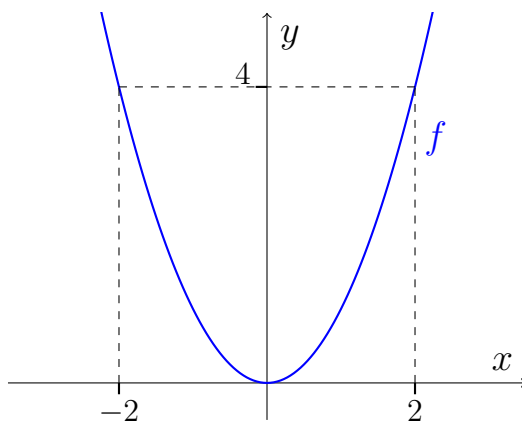
b) Bestem $f(f^{-1}(11))$

Invertible funktioner

Det er ikke alle funktioner som har en omvendt funktion. Kigger på f.eks. på $f(x) = x^2$ får vi et problem:



Vi kan se at både -2 og 2 bliver sendt over i den samme y -værdi, nemlig 4 . Vender vi pilene om, ser vi, at f^{-1} vil knytte to y -værdier (-2 og 2) til samme x -værdi (4), og det er forbudt. En funktion skal have præcis én y -værdi til hver x -værdi. Så $f(x) = x^2$ har ikke nogen omvendt funktion. Vi kan også illustrere problemet på grafen for f :



Vi ser på grafen at der er flere x værdier til hver y -værdi (undtagen i $y = 0$). Som eksempel har jeg markeret y -værdien 4 , hvor vi kan se, at den passer med både $x = -2$ og $x = 2$.

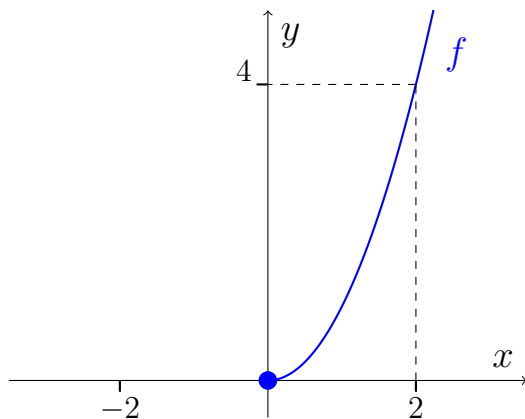
En funktion kaldes *invertibel* hvis den har en omvendt funktion. En funktion er invertibel, hvis der hører netop en x -værdi til hver y -værdi. Dette krav er oplagt opfyldt for funktioner der er voksende eller aftagende i hele deres definitionsområde. Disse funktioner er derfor invertible.

Eksempel 7.1.2

Selvom $f(x) = x^2$ i sig selv ikke er invertibel, så kan vi gøre den invertibel, hvis vi begrænser definitionsmængden til $[0; \infty[$. Altså hvis vi sætter:

$$f(x) = x^2 \quad , \quad x \geq 0$$

Grafen vil så se således ud:



Vi ser at der nu kun er en x -værdi til hver y -værdi. Den omvendte funktion bliver så $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Øvelse 7.1.4

Afgør, hvilke af følgende funktioner som er invertible. Du må gerne tegne dem i GeoGebra.

- a) $f(x) = x^3$
- b) $f(x) = x^3 - 4x^2$
- c) $f(x) = 3$
- d) $f(x) = x + 10$
- e) $f(x) = x^4$
- f) $f(x) = x^4 \quad , \quad x < -1$

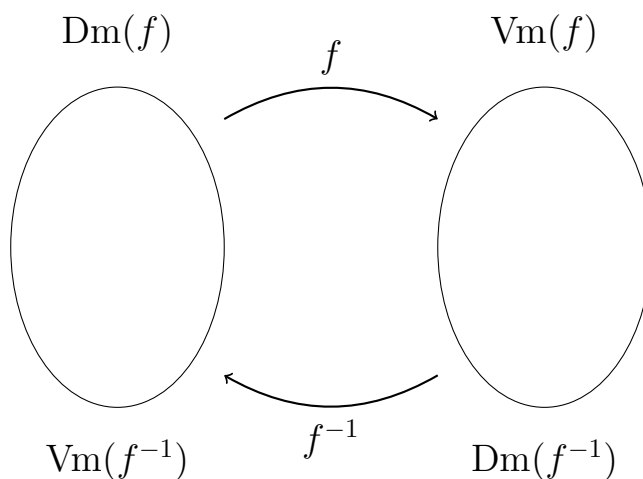
Øvelse 7.1.5

Alle eksponentielle funktioner er invertible.

- a) Forklar hvorfor.

Definitions- og værdimængde for den omvendte funktion

Når man danner den omvendte funktion bliver der byttet rundt på definitions og værdimængde, som vist her:



Altså definitionsmængden for den omvendte funktion bliver den oprindelige funktions værdimængde, og værdimængden for den omvendte funktion bliver den oprindelige funktions definitionsmængde.

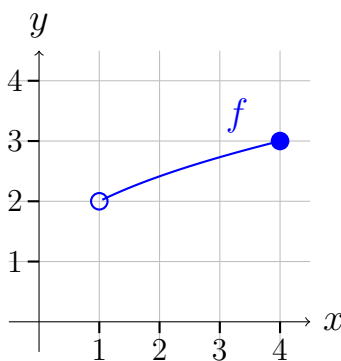
Øvelse 7.1.6

En funktion $f(x)$ har $Dm(f) =]0; \infty[$ og $Vm(f) =]-\infty; \infty[$.

- a) Bestem definitions og værdimængden for den omvendte funktion f^{-1}

Øvelse 7.1.7

Betragt funktionen med grafen:



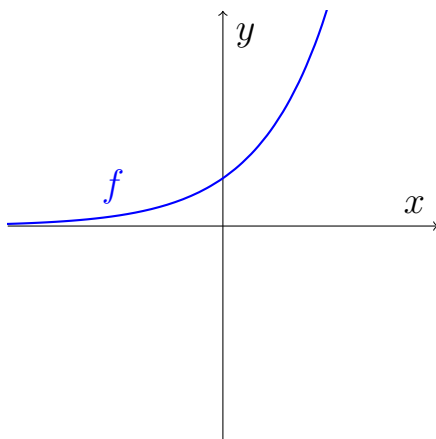
- a) Bestem definitions og værdimængde for den omvendte funktion f^{-1}

Grafen for den omvendte funktion

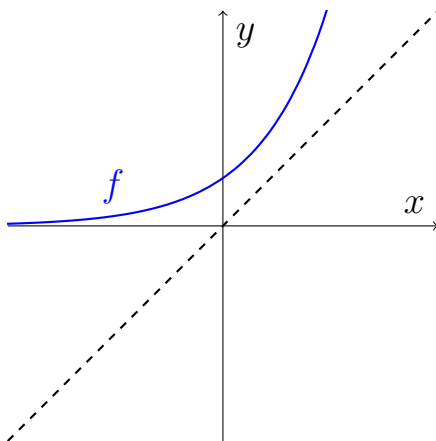
Har man grafen for en funktion f kan man finde grafen for f^{-1} ved at spejle grafen for f i linjen $y = x$.

Eksempel 7.1.3

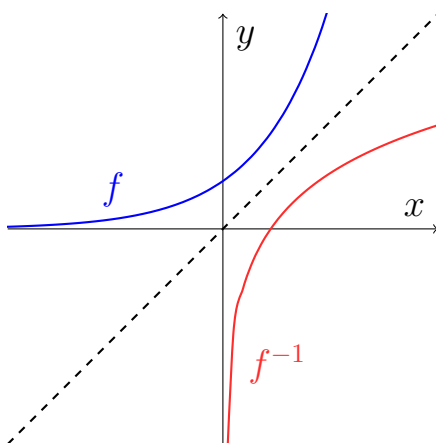
Vi vil bestemme den omvendte funktion for funktionen med grafen:



Vi tegner linjen $y = x$ ind:

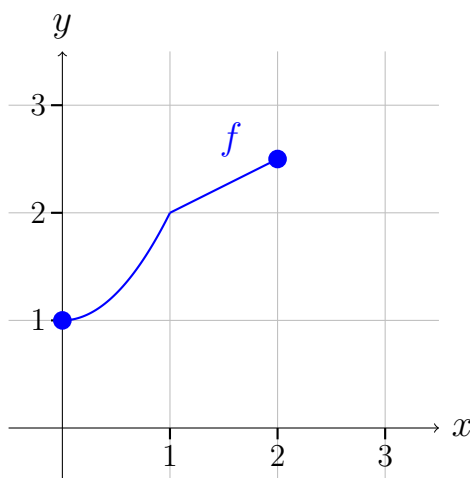


og vi kan spejle grafen for f i den stiplede linje.



Øvelse 7.1.8

Betragt grafen:



- a) Tegn grafen for den omvendte funktion f^{-1} .

Øvelse 7.1.9

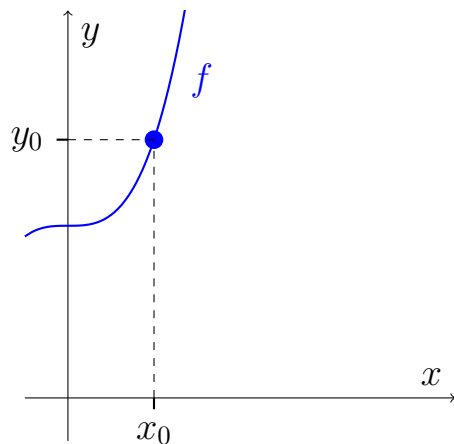
Lad $f(x) = x^3$

- Lav med papir og blyant en skitse af f .
- Gør rede for at f er invertibel.
- Ud fra din skitse af f , lav en skitse af f^{-1} .
- Bestem en forskrift for f^{-1}

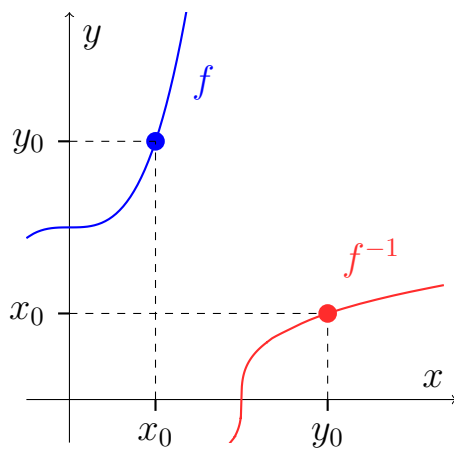
Ekstra

Vi kan godt forklare, hvorfor at den omvendte funktions graf er en spejling af den oprindelige funktions graf. Lad os tage et eksempel. Antag at vi har punkt (x_0, y_0)

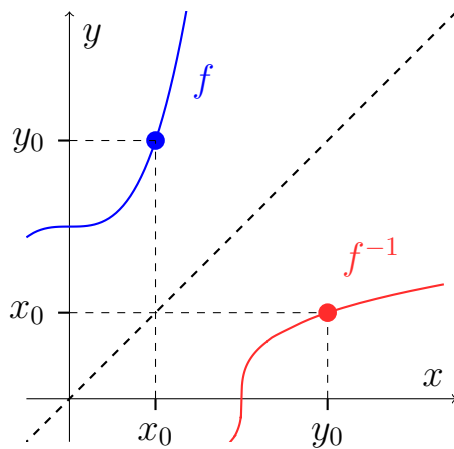
på grafen en funktion f :



Når vi danner den omvendte funktion bliver x -værdierne til y -værdier og omvendt. Så hvis f går igennem (x_0, y_0) vil f^{-1} gå igennem (y_0, x_0) :



Ud fra symmetrien i tegningen er det klart de to punkter ligger spejlet i linjen $y = x$:



7.2 Omvendte funktioner til lineære funktioner

OBS: Dette afsnit **kan** springes over, hvis du er på den gamle ordning (startet før 2024).

En funktion kan opfattes som en regel, som laver x 'er om til y 'er. Den omvendte funktion er så en regel der fører y 'erne tilbage til de x 'er de kom fra. Men det er ikke klart, hvordan man ud fra en givet funktion f kan bestemme den omvendte funktion $f^{-1}(x)$. I dette afsnit skal vi se på omvendte funktioner til lineære funktioner. Først en lille repetitionsøvelse:

Øvelse 7.2.1

Bestem forskriften for den omvendte funktion til følgende funktioner.

a) $f(x) = x + 13$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = 4x$

d) $f(x) = -x$

Lad os prøve en lidt sværere øvelse

Øvelse 7.2.2 (Svær)

Bestem forskriften for den omvendte funktion. Hvis du ikke ved hvordan, så bare kom med dit bedste gæt — du får præsenteret en metode efter øvelsen.

a) $f(x) = 2x + 4$

Vi skal nu se, hvordan man systematisk kan bestemme omvendte funktioner til lineære funktioner. Metoden vises bedst gennem et eksempel

Eksempel 7.2.1

Vi vil bestemme den omvendte funktion til funktionen fra øvelse 7.2.2, altså funktionen med forskriften $f(x) = 2x + 4$.

Den omvendte funktion bruges til at regne x ud fra $f(x)$, så vi isolerer x i

forskriften:

$f(x) = 2x + 4$	Skrifter forskriften op
$f(x) - 4 = 2x$	Trækker 4 fra på begge sider
$\frac{1}{2}f(x) - 2 = x$	Deler med 2 på begge sider
$x = \frac{1}{2}f(x) - 2$	Vi bytter rundt på de to sider

Vi bytter $f(x)$ ud med x og x ud med $f^{-1}(x)$ (forklaring følger efter eksemplet):

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

Vi har nu fundet forskriften for den omvendte funktion.

Vi kan forklare ombytningerne i eksemplet ved at huske, hvordan vi danner den omvendte funktion. Det, der for den oprindelige funktion var funktionsværdier, bliver til x -værdier for den omvendte. Tilsvarende bliver x -værdierne for den oprindelige funktion til funktionsværdier for den omvendte funktion.

Øvelse 7.2.3

Bestem omvendte funktioner for:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

b) $f(x) = -x + 3$

Sælger man en vare, vil der være sammenhæng mellem den pris man sætter på varen og den mængde, der kan afsættes til den givne pris. I de økonomiske fag er der tradition for at putte afsætningen ud af x -aksen og prisen ud af y -aksen — altså at man har prisen som funktion af afsætningen. Det synes vi matematiklærere (nogle af os i hvert fald) er lidt skørt fordi det jo er prisen man bestemmer og afsætningen der afhænger af prisen. Så det ville være naturligt for os at beskrive afsætningen som funktion af prisen og ikke omvendt. Nu hvor vi har lært om omvendte funktioner kan vi dog skifte fra den ene beskrivelse til den anden uden problemer.

Eksempel 7.2.2

Antag at vi afsætter en mængde x til en pris $p(x)$ og at $p(x)$ er givet ved

$$p(x) = -0,1x + 120$$

Vi kan nu bestemme afsætningen som funktion af prisen ved at bestemme den omvendte funktion.

$p(x) = -0,1x + 120$	Skrifter forskriften op
$p(x) - 120 = -0,1x$	Trækker 120 fra på begge sider
$-10p(x) + 1200 = x$	Ganger med -10 på begge sider
$x = -10p(x) + 1200$	Vi bytter rundt på de to sider
$p^{-1}(x) = -10x + 1200$	Skifter variable

Den omvendte funktion beskriver afsætningen som funktion af prisen og derfor vil vi kalde den for A (A for afsætning). Vi får så at:

$$A(x) = -10x + 1200$$

Noice.

Øvelse 7.2.4

Antag at vi til prisen x afsætter en mængde $A(x)$ og at $A(x)$ er givet ved

$$A(x) = -2x + 80$$

- Bestem afsætningen ved en pris på 0.
- Bestem prisen ved en afsætning på 0.
- Bestem en forskrift for prisen p som funktion af afsætningen x .

Øvelse 7.2.5 (Svær)

Ikke alle lineære funktioner er invertible.

- Hvad er det nu ”invertible” betyder?
- Hvad skal der til, før en funktion invertibel?
- Hvilke lineære funktioner ikke invertible?

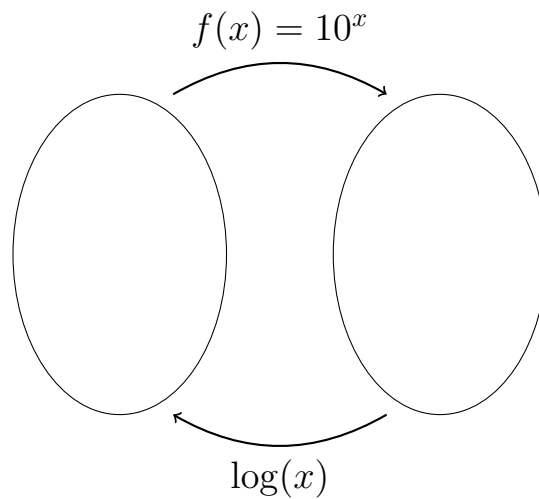
7.3 Logaritmefunktioner

I sidste afsnit så vi, hvordan man beregnede omvendte funktioner til lineære funktioner. Men det er ikke alle slags omvendte funktioner, man kan regne sig frem til. I dette afsnit skal vi møde logaritmefunktioner, som er omvendte funktioner til eksponentialfunktioner. Altså omvendte funktioner til funktioner på formen $f(x) = a^x$. Logaritmefunktioner kan ikke bestemmes ved almindelig ligningsløsning, og vi har derfor brug for en computer/lommeregner til at beregne funktionsværdier for dem. Det er ikke så meget anderledes end, at vi har brug for en computer for at kunne regne f.eks. $\sqrt{7}$.

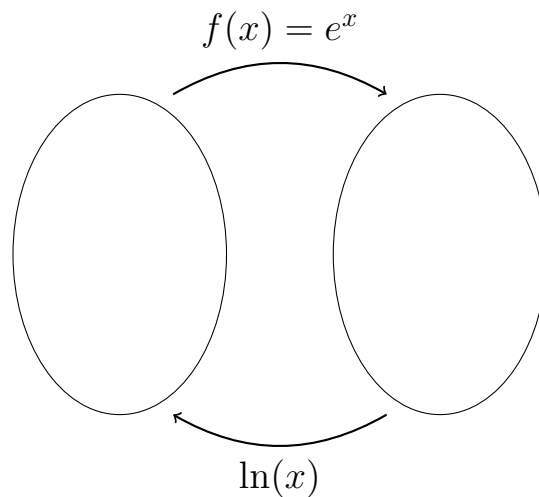
På HHX er vi interesserede i to logaritmefunktioner:

Definition 7.3.1

Titalslogaritmen defineres som den omvendte funktion til $f(x) = 10^x$ og betegnes med $\log(x)$:



Den naturlige logaritmefunktion defineres som den omvendte funktion til $f(x) = e^x$ og betegnes med $\ln(x)$ (det er et "L" ikke et "i"):



Skrivemåden " $\ln(x)$ " udtales "L N til x", "L N af x". Tilsvarende for $\log(x)$.

Øvelse 7.3.1

Sig højt

- a) $\ln(x)$
- b) $\log(x)$

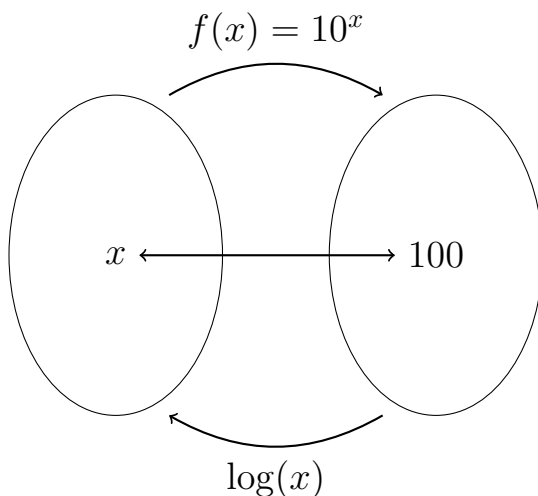
Øvelse 7.3.2

Vi har indført $\log(x)$ og $\ln(x)$ som omvendte funktioner til $f(x) = 10^x$ og $f(x) = e^x$.

- a) Hvordan kan vi være sikker på at $f(x) = 10^x$ og $f(x) = e^x$ overhovedet har omvendte funktioner?

Eksempel 7.3.1

Vi vil bestemme $\log(100)$. Vi husker at $\log(x)$ er den omvendte funktion til funktionen $f(x) = 10^x$. Vi har altså



Hvad mon x kan være? Vi skal have at $10^x = 100$, så x må være 2 . Vi konkluderer, at $\log(100) = 2$.

Øvelse 7.3.3

Bestem ved hoveregning:

- a) $\log(1000)$
- b) $\log(10)$
- c) $\ln(e^3)$
- d) $\ln(e)$
- e) $\ln(1)$
- f) $\log(0,1)$ (svær)

Eksempel 7.3.2

Vi vil regne $e^{\ln(17)}$. Dvs. vi skal finde ud af hvad der sker når vi har 17, bruger $\ln$ og derefter bruger funktionen $f(x) = e^x$. Da $f(x) = e^x$ er den omvendte funktion til $\ln(x)$ må resultatet være 17. Altså

$$e^{\ln(17)} = 17$$

Øvelse 7.3.4

Beregn ved hovedregning:

- a) $e^{\ln(5)}$
- b) $\ln(e^3)$
- c) $\log(10^7)$
- d) $10^{\log(2)}$

Vi kan løse ligninger med logaritmer, hvis bare vi husker, at de er defineret som omvendte funktioner.

Eksempel 7.3.3

Vi vil løse ligningen:

$$2 \cdot \log(x) - 3 = 2$$

Vi lægger 3 til på begge sider:

$$2 \cdot \log(x) = 5$$

og dividere med 2 på begge sider

$$\log(x) = 2,5$$

Vi husker nu $\log(x)$ er omvendt funktion til $f(x) = 10^x$, så vi bruger $f(x) = 10^x$ på begge sider:

$$10^{\log(x)} = 10^{2,5}$$

På venstresiden bliver det bare x og højresiden taster vi i GeoGebra:

$$x = 316,23$$

Øvelse 7.3.5

Løs ligningerne:

a) $2 \log(x) = 6$

b) $\ln(x) = 2$

c) $2 + \ln(x) = 2 \cdot \ln(x) + 1$

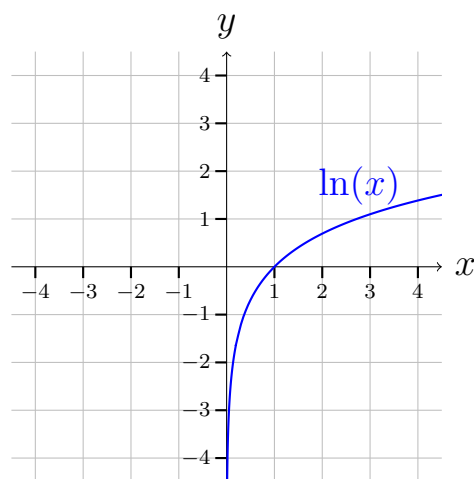
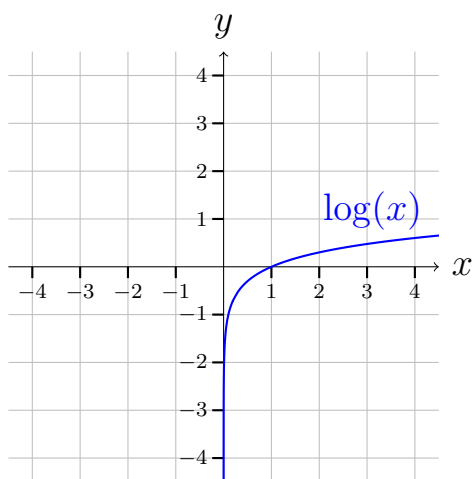
Øvelse 7.3.6

Lad $f(x) = -1$ og $g(x) = \ln(x) + 1$

a) Beregn skæringspunktet mellem f og g .

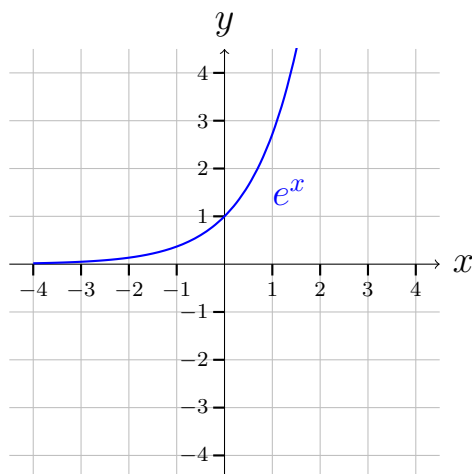
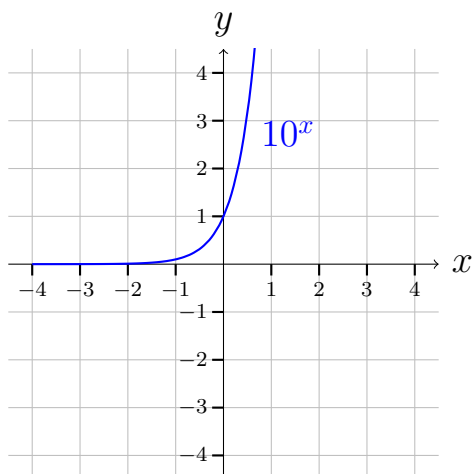
Grafer for logaritmefunktioner

Graferne for $\log(x)$ og $\ln(x)$ ser således ud:



Øvelse 7.3.7

Graferne for $f(x) = 10^x$ og $f(x) = e^x$ ser således ud:



- a) Brug grafen for $f(x) = 10^x$ til at argumentere for grafen for $\log(x)$.
- b) Brug grafen for $f(x) = e^x$ til at argumentere for grafen for $\ln(x)$.

Kigger man på graferne for $\log(x)$ og $\ln(x)$ ser det ud som at definitionsmængden for begge logaritmefunktioner er $]0; \infty[$ og at værdimængden er $] - \infty; \infty[$. Dette er korrekt.

Øvelse 7.3.8

Vi husker at definitionsmængden for eksponentielle funktioner er $] - \infty; \infty[$ og værdimængden er $]0; \infty[$.

- a) Brug definitions og værdimængden for eksponentielle funktioner til at argumentere for definitions og værdimængden for logaritmefunktioner.

Øvelse 7.3.9 (Svær)

Som det fremgår af graferne har både $\log(x)$ og $\ln(x)$ nulpunkt i $x = 1$.

- a) Gør rede for at $\log(x)$ har nulpunkt i $x = 1$
- b) Gør rede for at $\ln(x)$ har nulpunkt i $x = 1$

Ekstra

Der gælder følgende regneregler for logaritmer:

Den naturlige logaritme	Titalslogaritmen
$\ln(1) = 0$	$\log(1) = 0$
$\ln(e) = 1$	$\log(10) = 1$
$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$	$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$	$\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$
$\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$	$\log(a^p) = p \cdot \log(a)$

Øvelse 7.3.10

Regn med hovedregning og regneregler.

- a) $\log(1)$
- b) $\log(10000)$
- c) $\ln(e^{27})$
- d) $\ln(\frac{1}{e})$
- e) $\log(200) - \log(20)$
- f) $\ln(\frac{1}{2}e) + \ln(2e)$

Ud over de viste regneregler gælder der også:

$$\ln(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)} \quad \text{og} \quad \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Vi kan altså finde $\ln(x)$ ved dividere $\log(x)$ med konstanten $\log(e)$. Dvs. $\ln(x)$ er altså den samme funktion som $\log(x)$ bare $\ln(10)$ gange mindre.

Øvelse 7.3.11

Regn i GeoGebra, men uden at bruge titalslogaritmen.

- a) $\log(7)$

7.4 Eksponentielle ligninger

Logaritmefunktioner er interessante af forskellige årsager, men på HHX er vi primært interesseret i dem fordi de kan bruges til at løse eksponentielle ligninger. Dvs. ligninger hvor der indgår eksponentielle funktioner. Her får vi brug for en

logaritmeregneregler:

$$\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$$

Dem, som har lavet ekstraafsnittet i sidste afsnit, har allerede set reglen før. Nåh, men her er et eksempel på hvordan den bruges:

Eksempel 7.4.1

Vi vil løse ligningen:

$$5 \cdot 1,1^x = 6.$$

Vi dividerer med 5 på begge sider:

$$1,1^x = \frac{6}{5},$$

dvs.

$$1,1^x = 1,2.$$

Nu tager vi $\ln$ på begge sider:

$$\ln(1,1^x) = \ln(1,2)$$

og benytter logaritmeregnereglen $\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$:

$$x \ln(1,1) = \ln(1,2).$$

Vi dividerer med $\ln(1,1)$ på begge sider:

$$x = \frac{\ln(1,2)}{\ln(1,1)},$$

hvorefter vi taster højresiden i GeoGebra.

$$x = 1,91.$$

Øvelse 7.4.1

Løs ved beregning ligningerne:

a) $3 \cdot 2^x = 5$

b) $100 = 2 \cdot 3^x$

c) $100 = 7^x$

Øvelse 7.4.2

Lad $f(x) = 4 \cdot 0,5^x$.

a) Løs ligningen $f(x) = 10$

Vi kan også løse ligninger med eksponentielle funktioner på begge sider:

Eksempel 7.4.2

Vi vil løse ligningen:

$$5 \cdot 2^x = 3 \cdot 4^x$$

Vi dividerer med 5 på begge sider:

$$2^x = \frac{3 \cdot 4^x}{5}$$

og rykker 4^x ned bag brøken:

$$2^x = \frac{3}{5} \cdot 4^x$$

Vi dividerer med 4^x på begge sider:

$$\frac{2^x}{4^x} = \frac{3}{5}$$

Vi bruger potensregnereglen $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$:

$$\left(\frac{2}{4}\right)^x = \frac{3}{5}$$

og forkorter

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{5}$$

Vi bruger nu $\ln$ på begge sider:

$$\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

og benytter logaritmeregnereglen $\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$:

$$x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

Vi dividerer nu med $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ på begge sider:

$$x = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Altså:

$$x = 0,74$$

Øvelse 7.4.3

Løs ligningerne

a) $6 \cdot 3^x = 3 \cdot 4^x$

b) $e^x = 3 \cdot 1,1^x$

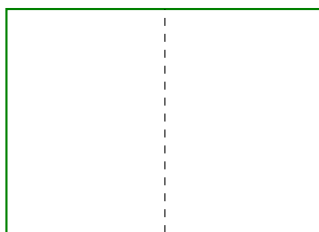
Øvelse 7.4.4

Lad $f(x) = 7 \cdot 2^x$ og $g(x) = 3 \cdot 5^x$.

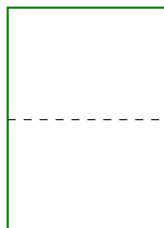
a) Bestem skæringspunktet mellem f og g .

Øvelse 7.4.5 (Svær)

Forestil dig, at du tager et stykke almindeligt a4 papir og folder det midt over:



hvorefter du folder det igen:



og folder det igen:



og sådan bliver du ved indtil det er foldet x gange.

- a) Et stykke papir er 0,0001 meter tykt. Opstil en forskrift for en funktion, som beskriver tykkelsen af papiret som funktion af antal gange det er foldet.
- b) Afstanden til fra Jorden til Månen er ca. 384400000 meter. Hvor mange gange skal vi folde det, før det kan nå hele vejen til månen?

7.5 Beviser til logaritmer

Formel for fordoblings- og halveringskonstant

Vi mødte fordoblingskonstanten i afsnittet om eksponentielle funktioner. Men beviset for formelen kræver at man kan løse eksponentielle ligninger, så derfor er beviser vi formelen her.

Vi vil lave to beviser. Det første er simpelt, men ikke så godt som det andet. Det andet ses i Ekstra-afsnittet. Spring dette bevis over, hvis du har mod på det svære.

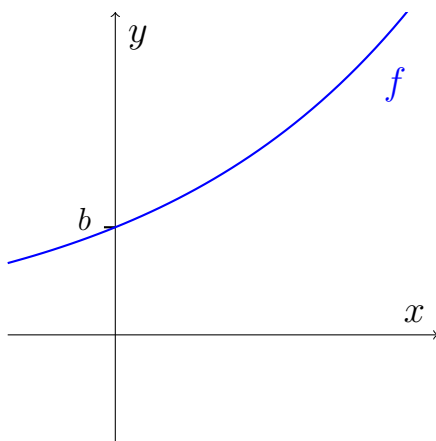
Sætning 6.5.1

For en eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ er fordoblingskonstanten givet ved:

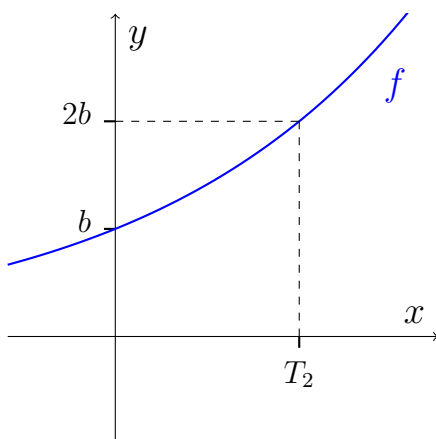
$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Bevis

Grafen for en eksponentiel funktion skærer y -aksen i b :



Fordoblingskonstanten T_2 er længden af det stykke, vi skal gå ud af x -aksen for at fordoble funktionsværdien. Hvis vi starter i $x = 0$ og går ud til T_2 på x -aksen må funktionsværdien i $x = T_2$ altså være det dobbelte af b , nemlig $2b$:



Ifølge tegningen har vi altså:

$$f(T_2) = 2b$$

Vi indsætter forskriften:

$$ba^{T_2} = 2b.$$

Vi deler med b på begge sider:

$$a^{T_2} = 2.$$

Vi tager den naturlige logaritme på begge sider:

$$\ln(a^{T_2}) = \ln(2).$$

Vi bruger reglen $\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$:

$$T_2 \ln(a) = \ln(2).$$

Vi dividerer med $\ln(a)$ på begge sider:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)},$$

og vi har hermed bevist sætning.

Vi har også en formel for halveringskonstanten.

Sætning 6.5.2

For en eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ er halveringskonstanten givet ved:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$$

Øvelse 7.5.1

Man kan bevise formelen for halveringskonstanten på tilsvarende måde som man beviser formelen for fordoblingskonstanten.

a) Bevis formelen for halveringskonstanten.

Logaritmeregneregler

Vi har ikke skrevet logaritmeregnereglerne om som en sætning, men når vi laver beviser, vil vi altid formulere det vi beviser som en sætning. Så her er en sætning omhandlende en logaritmeregneregel.

Sætning 7.5.1

Der gælder følgende logaritmeregneregel:

$$\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$$

Bevis

Da $\ln(x)$ er den omvendte funktion til e^x gælder at:

$$a = e^{\ln(a)}.$$

Vi opløfter i p på begge sider:

$$a^p = (e^{\ln(a)})^p.$$

Vi tager nu den naturlige logaritme på begge sider:

$$\ln(a^p) = \ln\left((e^{\ln(a)})^p\right).$$

Vi benytter reglen $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ på udtrykket $(e^{\ln(a)})^p$:

$$\ln(a^p) = \ln(e^{\ln(a) \cdot p}).$$

Igen benytter vi at $\ln(x)$ er den omvendte funktion til e^x og får højresiden til at være:

$$\ln(a^p) = \ln(a) \cdot p,$$

og det er jo det samme som:

$$\ln(a^p) = p \cdot \ln(a).$$

Ekstra

Den skarpe læser har måske iagttaget et problem i forhold til den måde vi har indført fordoblingskonstanten. Vi har defineret den som det stykke, vi skal gå ud for at fordoble funktionen. Men for næsten alle funktionstyper, vil det stykke afhænge af, hvor vi starter henne. Dvs. der findes ikke noget fast stykke, man kan gå ud for at fordoble funktionsværdien. Det er en særlig egenskab ved eksponentielle funktioner, at de overhovedet har en fordoblingskonstant, og vi har derfor også brug for at bevise, at de har denne egenskab. Vi vil nu formulere og bevise sætningen med formelen for fordoblingskonstanten på en måde, som ikke tager udgangspunkt i, at fordoblingskonstanten findes:

Sætning 7.5.2

En eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ har en fordoblingskonstant T_2 og den er givet ved:

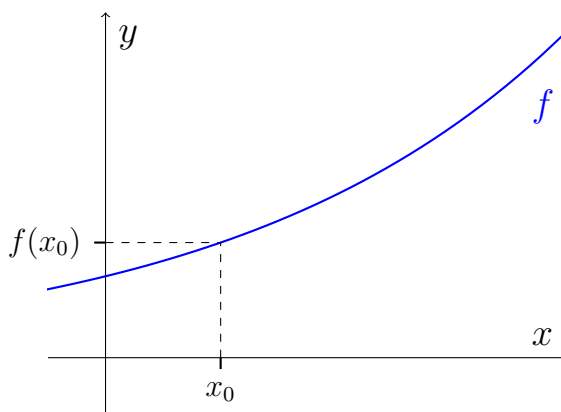
$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}.$$

Bevis

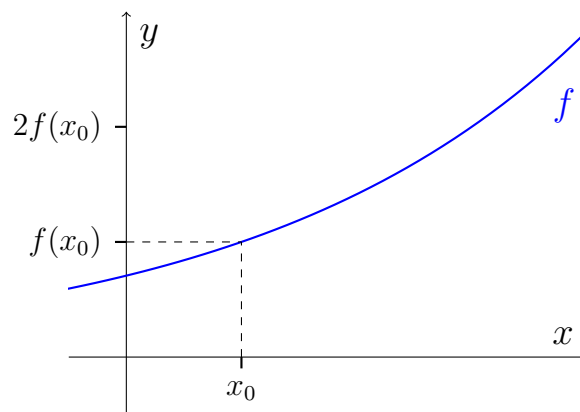
Lad $f(x) = ba^x$ være en eksponentiel funktion. Vi vil gerne vise at funktionen har en fordoblingskonstant T_2 . En fordoblingskonstant er et tal T_2 , som opfylder at

$$f(x + T_2) = 2f(x),$$

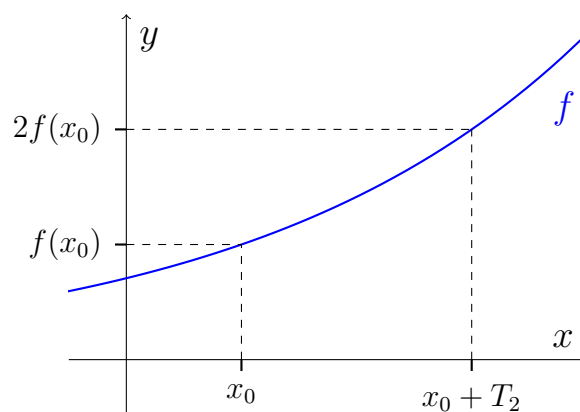
for alle $x \in \text{Dm}(f)$. Læg mærke til at ligningen udtrykker at funktionen bliver dobbelt så stor, når x vokser med T_2 . Vi vælger først en vilkårlig x -værdi som vi kalder x_0 .



Vi går nu op ad y -aksen indtil vi rammer det dobbelte af $f(x_0)$, dvs. $2f(x_0)$:



Vi finder nu den x -værdi som hører til $2f(x_0)$. Stykket mellem x_0 og denne nye x -værdi kalder vi for T_2 , og den nye x -værdi er dermed $x_0 + T_2$:



Vi har altså:

$$f(x_0 + T_2) = 2f(x_0).$$

Vi indsætter forskriften:

$$ba^{x_0+T_2} = 2ba^{x_0}.$$

Vi deler med b på begge sider:

$$a^{x_0+T_2} = 2a^{x_0}.$$

Vi deler med a^{x_0} på begge sider:

$$\frac{a^{x_0+T_2}}{a^{x_0}} = \frac{2a^{x_0}}{a^{x_0}}.$$

Vi bruger potensregnereglen $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ på venstre side og reducerer på højre:

$$a^{T_2} = 2.$$

Vi tager den naturlige logaritme på begge sider:

$$\ln(a^{T_2}) = \ln(2).$$

Vi bruger reglen $\ln(a^x) = x \ln(a)$:

$$T_2 \ln(a) = \ln(2).$$

Vi dividerer med $\ln(a)$ på begge sider:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}.$$

Vi lægger mærke til at T_2 ikke afhænger af, hvilket x_0 vi startede med at vælge. Vi har derfor fundet en konstant T_2 som opfylder at $f(x + T_2) = 2f(x)$ for alle x i definitionsmængden. Altså har vi vist at funktionen har en fordoblingskonstant som er givet ved:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}.$$

Øvelse 7.5.2

Der gælder en tilsvarende sætning for halveringskonstanten.

- Opstil en tilsvarende sætning til halveringsskonstantssætningen, men bare for halveringskonstanten.
- Bevis sætningen.

Kapitel 8

Finansiell regning

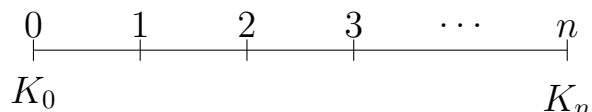
På HHX handler finansiell regning om renter. Først vil vi se på forskjellige måder at spare op og tilbagebetale lån, og derefter skal vi se på forskjellige måder at opføre og sammenligne renter.

8.1 Kapitalfremskrivning

Kapitalfremskrivning handler om at bestemme, hvordan et beløb vokser, når det tilskrives renter. Lad os sige, at vi sætter 100 kr. i banken til en årlig rente på 10% og hæver dem efter 5 år. Vi kan bruge kapitalfremskrivning til at regne ud, hvor mange penge vi hæver efter de 5 år. Vi bruger følgende betegnelser:

K_0	Startkapitalen. Det beløb der skal tilskrives renter. Læg mærke til at det er et "nul" – ikke bogstavet "o", så det læses "K-nul".
n	Antallet af terminer. En termin er en rentetilskrivning. Så n er altså antallet af rentetilskrivninger.
r	Renten pr. termin som decimaltal. Kaldes også rentefoden.
K_n	Slutkapitalen efter de n terminer. Altså det beløb vi har efter n rentetilskrivninger

Her er begreberne illustreret på en tidslinje:



Øverst på linjen har vi terminerne, og nederst ses startkapitalen og slutkapitalen. Til at beregne de forskellige størrelser har vi fremskrivningsformlen:

Sætning 8.1.1

(Fremskrivningsformlen)

For en startkapital K_0 , som bliver tilskrevet en fast rente r over n terminer, gælder der, at størrelsen på slutkapitalen K_n kan beregnes ved:

$$K_n = K_0(1 + r)^n$$

Eksempel 8.1.1

Vi sætter 100 kr. i banken til en årlig rente på 10% og hæver dem efter 5 år. Vi har dermed $K_0 = 100$, $n = 5$, $r = 0,1$, og vi vil bestemme K_5 . Vi bruger fremskrivningsformlen:

$$K_n = K_0(1 + r)^n$$

og sætter vores tal ind:

$$\begin{aligned} K_5 &= 100 \cdot (1 + 0,1)^5 \\ &= 161,05 \end{aligned}$$

Vi kan altså hæve 161 kr. efter 5 år.

Øvelse 8.1.1

Når vi bruger fremskrivningsformlen skal vi huske at omskrive renten til decimaltal.

- a) Omskriv 0,21% til decimaltal

Øvelse 8.1.2

Lille Gysse sætter nu 200 kr. ind på en anden konto. På den konto får hun 3% om året.

- a) Hvad har hun efter 10 år?

Det er ikke altid K_n som er den ubekendte. Det kunne f.eks. være at vi kendte K_n , n og r , og ville finde K_0 . Nedenstående tabel viser formlerne for de forskellige størrelser som indgår i forbindelse med kapitalfremskrivning.

Slutkapital	Startkapital	Rente	Antal terminer
$K_n = K_0(1 + r)^n$	$K_0 = K_n(1 + r)^{-n}$	$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$	$n = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)}$

Formlen $K_0 = K_n(1 + r)^{-n}$ kaldes også *tilbageskrivningsformlen*

Eksempel 8.1.2

For lang tiden siden satte Tigerdyret 100 kr. ind på en konto. Kontoen er blevet tilskrevet en rente på 5% hver termin. Lige nu står der 1146,74 kr. på kontoen. Tigerdyret vil nu regne ud, hvor mange terminer der er gået siden pengene blev sat ind.

$$n = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1 + r)} = \frac{\ln(\frac{1146,74}{100})}{\ln(1 + 0,05)} = 50.$$

Altså er der gået 50 terminer siden pengene blev sat ind.

Hvis man kan, så anbefaler jeg at man undlader at bruge formlerne i tabellen. I stedet kan man isolere den ønskede størrelse i fremskrivningsformlen.

Øvelse 8.1.3

En mand sætter 1000 kr. ind på en konto efter 10 terminer står der 1343,92 kr. på kontoen.

- a) Hvad var rentefoden?

Øvelse 8.1.4

En dame har 23219,38 kr. på en konto. Hun ved at rentefoden er 1% pr. måned og hun ved at hun satte et enkelt beløb ind som stået på kontoen 15 måneder. Hun kan simpelthen bare ikke liiiiiiige huske beløbet!

- a) Hjælp den flinke dame.

Øvelse 8.1.5

En elev fra Niels Brock fik 500 kr. af sin far fordi han havde fået så flotte matematikkarakterer. Eleven satte pengene ind på en konto med en rente på 2% pr. år. Efter et stykke tid havde eleven 585,83 kr. på kontoen.

- a) Hvor mange år havde pengene stået på kontoen?

Øvelse 8.1.6

Der sættes 100 kr. ind på en konto til en rentefod på 7%?

- a) Hvad er beløbet vokset til efter 20 terminer.

Kapitalfremskrivning og lån

Indtil videre har vi kun set på opsparinger. Men det er vigtigt at forstå, at kapitalfremskrivning handler om et beløb, som samler renter. Det behøver ikke at være en opsparing. Det kan ligeså godt være et lån, der ikke bliver betalt tilbage på, så gælden vokser hver termin. Som regel betaler man dog af på sit lån, hvilket vi vil se på i afsnittet om annuitetslån.

Øvelse 8.1.7

En elev skylder 1000 kr. på et quicklån og har ikke mulighed for at betale af på det. Renten er 10% pr. måned.

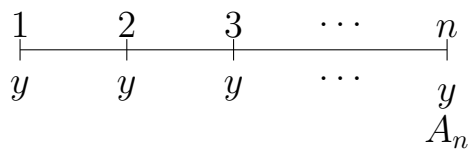
- a) Beregn gældens størrelser efter et år.

8.2 Annuitetsopsparing

Forestil dig, at du hver måned sætter 1.000 kr. ind på en konto, som bliver tilskrevet en fast månedlig rente. En sådan opsparing kaldes en *annuitetsopsparing*. Vi bruger følgende betegnelser:

y	Ydelsen. Det beløb vi indsætter hver termin.
n	Antallet af ydelser.
r	Rentefoden dvs. renten pr. termin som decimaltal
A_n	Slutbeløbet på kontoen efter n ydelser. Kaldes også fremtidsværdien.

På en tidslinje ser det således ud:



Øvelse 8.2.1

I en annuitetsopsparing betegner n antallet af ydelser og altså ikke antallet af terminer som ved en kapitalfremskrivning.

a) Hvor mange terminer er der i en annuitetsopsparing?

Det kunne godt se ud som om, det er lidt besværligt at beregne fremtidsværdien A_n . Alle ydelserne ligger nemlig forskellige steder på tidslinjen, og derfor får de tilskrevet renter et forskelligt antal gange. Den første ydelse man indbetaler får tilskrevet en masse renter, mens det sidste slet ikke får tilskrevet nogle. Heldigvis har vi en formel til hjælp:

Sætning 8.2.1

Fremtidsværdien A_n af en annuitet bestående af n ydelser y ved en rente på r , er givet ved:

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Eksempel 8.2.1

Anais sætter 1000 kr. ind på en konto, hver termin i 10 terminer. Rentefoden er på 1%. Vi vil bruge sætning 8.2.1 til at beregne, hvor mange penge Anais kan hæve efter 10 terminer. Vi skal altså finde A_n når $y = 1000$, $n = 10$ og $r = 0,01$. Vi bruger formelen for fremtidsværdien af en annuitet:

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

og vi sætter vores tal ind

$$\begin{aligned} A_{10} &= 1000 \cdot \frac{(1+0,01)^{10} - 1}{0,01} \\ &= 10462,21 \end{aligned}$$

Anais kan altså hæve 10462,21 kr. efter 10 terminer.

Øvelse 8.2.2

Lille Gysse opretter en konto i banken og sætter 200 kr. ind hver måned. Kontoen bliver tilskrevet en månedlig rente på 0,5%.

- Bestem rentefoden r i decimaltal.
- Beregn hvor mange penge Lille Gysse har på sin konto efter 27 indbetalinger.
- Hvor mange penge har Lille Gysse indbetalt i alt?
- Hvor mange penge har Lille Gysse fået tilskrevet i renter?

Ligesom ved kapitalfremskrivning findes formelen for annuitetsopsparing i flere versioner:

A_n	y	r	n
$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$	$y = \frac{A_n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$	findes ikke	$n = \frac{\ln(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1)}{\ln(1+r)}$

Det ses at der ikke er nogen formel for r . Her er du nødt til at opstille en ligning og bruge GeoGebra til at løse den. Alternativt kan du bruge Excel (se afsnit 8.5).

Eksempel 8.2.2

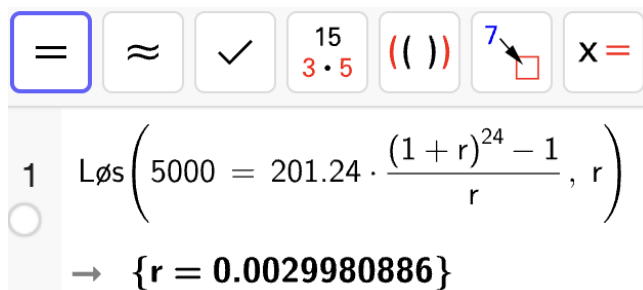
Vi vil bestemme renten for en annuitetsopsparing med $A_n = 5000$, $n = 24$ og $y = 201,24$. Vi tager udgangspunkt i formelen for A_n (vi kunne også have valgt en af de andre formler):

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Indsætter vi de kendte værdier får vi:

$$5000 = 201,24 \cdot \frac{(1+r)^{24} - 1}{r}$$

Vi åbner et CAS-vindue i GeoGebra og bruger kommandoen **Løs**:



The screenshot shows the GeoGebra CAS interface. The top toolbar contains buttons for equals, approximate, check, exponent (15), fraction (3/5), parentheses, root (7), and multiplication (x=). The input field contains the equation $Løs\left(5000 = 201,24 \cdot \frac{(1+r)^{24} - 1}{r}, r\right)$. The output shows the solution $\rightarrow \{r = 0.0029980886\}$.

Som du kan se, har jeg indstillet mit GeoGebra til 10 decimaler (inde i indstillinger). Vi konkluderer at renten er 0,3%.

Øvelse 8.2.3

En elev sparer op til gallafest. Eleven sparer 3.000 kr. op ved at betale 249,86 kr. ind på en konto hver måned i et år.

- a) Hvad er den månedlige rente?

Øvelse 8.2.4

Martins mor har lavet en børneopsparing til Martin. Hun har hver måned sat et hemmeligt beløb ind på kontoen som er blevet tilskrevet en månedlig rente på 0,4%. Efter 216 indbetalinger på Martins 18-års fødselsdag hæver han hele sin børneopsparing. Han modtager 34213,67 kr.

- a) Hvor mange penge satte Martins mor ind hver måned?

Øvelse 8.2.5

Michael indsætter hvert kvartal 500 kr. ind på en konto. Renten er 3% pr. kvartal

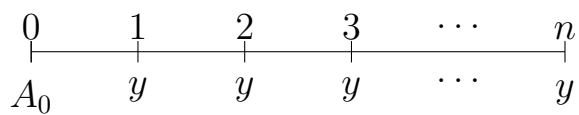
- a) Efter nogle år har Michael 46359,93 kr. på kontoen. Hvor mange indbetalinger har Michael lavet? Hvor mange år er der gået?

8.3 Annuitetslån

Et annuitetslån er et lån som tilbagebetales med faste ydelser med faste mellemrum. På den måde minder det om en annuitetsopsparing - det er bare et lån i stedet for en opsparing. Vi bruger betegnelserne:

y	Ydelsen. Det beløb vi betaler hver termin.
n	Antallet af ydelser.
r	Rentefoden dvs. renten pr. termin som decimaltal.
A_0	Det lånte beløb. Kaldes også hovedstolen eller nutidsværdien.

På en tidslinje:



Øvelse 8.3.1

Ligesom ved annuitetsopsparing betegner n antallet af ydelser.

- a) Hvor mange terminer er der i en annuitetslån med n ydelser?

Der gælder følgende sætning:

Sætning 8.3.1

For et annuitetslån kan nutidsværdien A_0 bestemmes ved:

$$A_0 = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Øvelse 8.3.2

Antag at vi har et annuitetslån med $y = 300$, $n = 5$ og $r = 0,012$.

- a) Bestem nutidsværdien

Øvelse 8.3.3

En dame låner hele købesummen til et hus. Hun afbetaler med 23.163,61 kr., hver måned i 30 år (i alt 360 ydelser). Rentefoden er 0,1%

- a) Hvad kostede huset?

Ligesom ved annuitetsopsparing findes formlen for annuitetslån i flere versioner:

A_0	y	r	n
$A_0 = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$	$y = \frac{A_0 \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}}$	findes ikke	$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{A_0 \cdot r}{y}\right)}{\ln(1 + r)}$

Det ses at der ikke er nogen formel for r . Her er du igen nødt til at opstille en ligning beregne løsningen i GeoGebra (tilsvarende til det vi gjorde for renten i en annuitetsopsparing i eksempel 8.2.2). Du kan også bruge Excel (se afsnit 8.5).

Øvelse 8.3.4

Brøndby IF låner 18 mio kr. af Jan Bech Andersen. Brøndby vælger at afdrage med et annuitetslån over 9 måneder med en månedlig ydelse på 2.532.421,44 kr.

- a) Bestem den månedlige rente.

Øvelse 8.3.5

En mand køber bil til 450.000 kr. Han skal betale bilen af med kvartårslige ydelser over 10 år (40 ydelser) til en kvartårlig rente på 1,5%

- a) Bestem hvor, meget han skal betale tilbage hvert kvartal.

Øvelse 8.3.6

En elev går amok og ødelægger inventaret i sit klasseværelse. Rektor beslutter at eleven skal erstatte det han har ødelagt. Eleven har ødelagt for 35.000 kr. Da eleven ikke har så mange penge må eleven låne pengene af en lånehaj. Eleven skal hver måned betale 771,68 kr. af på lånet. Renten er 2% pr. måned.

- a) Bestem antallet af ydelser.
- b) Bestem hvor, mange år der går før eleven har fået tilbagebetalt lånet.

8.4 Amortisationstabeller og restgæld

I dag skal vi lære om amortisationstabeller. Første skridt er at øve os på at udtale ordet.

Øvelse 8.4.1

- a) Sig højt "a-mor-ti-sa-tions-tabel" 5 gange.

En *amortisationstabel* er en tabel, der viser, hvorledes et lån bliver afdraget. Den kan se ud som følger:

Termin	Primo restgæld	Ydelse	Rente	Afdrag	Ultimo restgæld
1	10000	2500	100	2400	7600
2	7600	2500	76	2424	5176
3	5176	2500	51,76	2448,24	2727,76
4	2727,76	2500	27,28	2472,72	255,04
5	255,04	257,59	2,55	255,04	0

Tabel 8.1: Amortisationstabel for et lån

Her er en forklaring af tabellen:

Termin	Viser hvilken en termin tallene gælder for
Primo restgæld	Den resterende gæld ved indgangen i den pågældende termin. Altså inden ydelsen er betalt. Den første primo restgæld er hovedstolen (lånets størrelse). De følgende primo restgæld findes ved at overføre ultimo restgæld fra sidste termin.
Ydelse	Det beløb som der betales hver termin. Ydelsen er fast i alle terminer undtagen muligvis den sidste. Den sidste ydelse kan bestemmes med: $\text{Ydelse} = \text{Primo restgæld} + \text{Rente}$ Denne formel gælder dog kun for den sidste ydelse!
Rente	Det beløb der betales i rente i den pågældende termin. Renten findes ved: $\text{Rente} = \text{Primo restgæld} \cdot r$ hvor r er rentefoden som decimaltal.
Afdrag	Afdraget er det beløb gælden formindskes med: $\text{Afdrag} = \text{Ydelse} - \text{Rente}$
Ultimo restgæld	Den resterende gæld ved udgangen af den pågældende termin (efter ydelsen er betalt): $\text{Primo restgæld} - \text{Afdrag}$

Sådan laver du (med udgangspunkt i forklaringerne ovenover) en amortisationstabel

1. Åben Excel og indskriv overskrifterne fra tabel 8.1 i den øverste række
2. Skriv 1, 2, 3 ... i cellerne under terminerne.
3. Skriv hovedstolen (lånebeløbet) som Primo restgæld i første termin.
4. Indtast ydelsen. Hvis du ikke har ydelsen så skal du beregne den med formlen for ydelse i et annuitetslån (hvis det altså er et annuitetslån, du har med at gøre selvfølgelig).

5. Beregn renten.
6. Beregn afdraget.
7. Beregn ultimo restgæld.
8. Overfør ultimo restgæld til primo restgæld i næste termin og regn ydelse, rente afdrag og ultimo restgæld.
9. Gentag ovenstående for de følgende terminer indtil du får ultimo restgæld på nul eller en negativ ultimo restgæld.
10. Hvis du har en negativ ultimo restgæld skal du tilpasse ydelsen så restgælden bliver 0.

Øvelse 8.4.2

Antag at vi har et låne med en hovedstol på 150.000 kr., en månedlig ydelse på 19.000 kr og en rentefod på 7%.

- a) Lav en amortisationstabel for lånet.
- b) Hvad er restgælden efter den 4. termin?
- c) Hvor lang tid går der før lånet er betalt tilbage?

Øvelse 8.4.3

En mand optager et annuitetslån på 300.000 kr. Han vil gerne betale det tilbage med månedlige ydelser over 3 år (36 ydelser). Rentefoden er 1,5%.

- a) Bestem ydelsen.
- b) Lav en amortisationstabel.
- c) I din amortisationstabel behøvede du stort set ikke at ændre den sidste ydelse. Hvorfor?

Det er simpel matematik der ligger til grund for amortisationstabellen. Alle de formler vi bruger giver lidt sig selv.

Øvelse 8.4.4

Forklar

- a) formlen for rentebeløbet: $(\text{Primo restgæld}) \cdot r$.
- b) formlen for afdrag: $\text{Ydelse} - \text{Rente}$
- c) formlen for ultimo restgæld: $\text{Primo restgæld} - \text{Afdrag}$
- d) hvorfor at primo restgæld er det samme som ultimo restgæld fra den forrige termin.
- e) formlen for den sidste ydelse: $\text{Ydelse} = \text{Primo restgæld} + \text{Rente}$

Restgæld

Støder man på ordet ”restgæld” i forbindelse med lån, betyder det ultimo restgæld, og den kan man finde i amortisationstabellen. Der findes dog også en formel, så man ikke behøver at regne hele tabellen.

Sætning 8.4.1

Restgælden R_m efter m terminer for et lån med en hovedstol på A_0 , en ydelse på y og en rentefod på r , kan bestemmes med følgende formel:

$$R_m = A_0 \cdot (1 + r)^m - y \frac{(1 + r)^m - 1}{r}$$

Eksempel 8.4.1

Vi vil bestemme restgælden efter 7 terminer for et lån med en hovedstol på 10.000 kr, en ydelse på 1.000 kr. og en rentefod på 2%. Vi bruger formelen:

$$R_m = A_0 \cdot (1 + r)^m - y \frac{(1 + r)^m - 1}{r}$$

Vi indsætter $m = 7$, $A_0 = 10000$ og $r = 0,02$:

$$\begin{aligned} R_7 &= 10000 \cdot (1 + 0,02)^7 - 1000 \frac{(1 + 0,02)^7 - 1}{0,02} \\ &= 4052,57 \end{aligned}$$

Restgælden efter 7 terminer er altså 4052,57 kr.

Øvelse 8.4.5

Lille Sigismund låner 5.000 kr. til sprut og damer. Han betaler lånet tilbage med en ydelse på 100 kr. hver måned. Renten er 1,5% pr. måned.

- a) Bestem vha. sætning 8.4.1 restgælden efter 18 terminer.

8.5 Finansiell regning i Excel

De finansielle størrelser, vi har lært om indtil videre, kan hurtigt regnes i Excel. Dog er der noget fortegnshalløjsa, man skal være opmærksom på. I Excel regnes alle udgående beløb (penge man betaler) negative, mens indgående beløb (penge man modtager) regnes positive. Hvis Excel ikke lige er din kop te kan du vel godt springe dette afsnit over. Bemærk dog, at hvis du skal finde renten i en annuitet, så kræver det GeoGebra eller Excel.

Her er en oversigt over, hvordan man bestemmer de forskellige finansielle størrelser i Excel. Jeg har været flink og skrevet minus på de størrelser som skal indtastes som negative. Nogle af formlerne giver et negativt resultat. Hvis du f.eks. bestemmer K_0 ud fra K_n vil den give dig et negativt tal, fordi du skal **indsætte** K_0 for at kunne **hæve** K_n . Det betyder dog ikke at du skal angive facit med et minus. Det er bare Excel, der prøver at fortælle dig, at det penge du skal af med.

Kapitalfremskrivning

Slutkapital (K_n)	=FV($r; n; 0; -K_0$)
Startkapital (K_0)	=NV($r; n; 0; K_n$)
Rente (r)	=RENTE($n; 0; -K_0; K_n$)
Antal terminer (n)	=NPER($r; 0; -K_0; K_n$)

Annuitetsopsparing

Fremtidsværdi (A_n)	=FV($r; n; -y$)
Ydelse (y)	=YDELSE($r; n; 0; A_n$)
Rente (r)	=RENTE($n; -y; 0; A_n$)
Antal ydelser (n)	=NPER($r; -y; 0; A_n$)

Annuitetslån

Nutidsværdi (hovedstol) (A_0)	$=NV(r;n;-y)$
Ydelse (y)	$=YDELSE(r;n;A_0)$
Rente (r)	$=RENTE(n;-y;A_0)$
Antal ydelser (n)	$=NPER(r;-y;A_0)$

Restgæld

Restgæld efter t terminer (R_t)	$=FV(r;t;-y;A_0)$
---------------------------------------	-------------------

Eksempel 8.5.1

Vi vil bestemme renten for en annuitetsopsparing med $A_n = 5000$, $n = 24$ og $y = 201,24$.

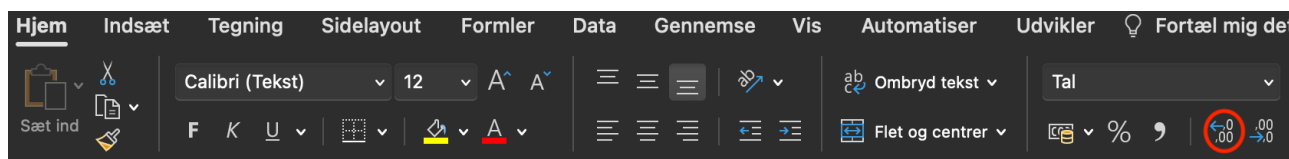
Vi bruger Excel. Vi skriver i en celle:

$=RENTE(24;-201,24;0;5000)$

Læg mærke til minusset foran fremtidsværdien.

Mit Excel viser svaret som 0%:

Jeg trykker på knappen for flere decimaler:



og får svaret 0,30%

Øvelse 8.5.1

Tulle låner 3.000 kr. i banken, som hun betaler tilbage med en månedlig ydelse på 166,25 kr. Rente er 1% pr. måned.

- Bestem antallet af ydelser. Brug Excel.
- Bestem restgælden efter 10 måneder. Brug Excel.

Øvelse 8.5.2

En elev sparer op til gallafest. Eleven sparer 3.000 kr. op ved at betale 249,86 kr. ind på en konto hver måned i et år.

- a) Hvad er den månedlige rente? Brug Excel.

Øvelse 8.5.3

Brøndby IF låner 18 mio kr. af Jan Bech Andersen. Brøndby vælger at afdrage med et annuitetslån over 9 måneder med en månedlig ydelse på 2.532.421,44 kr.

- a) Bestem vha. Excel den månedlige rente.

Ekstra

Vi ser at der i virkeligheden kun er 4 forskellige funktioner, man skal kende i Excel. Når man ved hvad forkortelserne står for, kan man måske regne ud, hvordan man bruger de forskellige funktioner. Det var i hvert fald det jeg selv gjorde, da jeg skulle skrive dette afsnit.

FV	Står for FremtidsVærdi
NV	Står for NutidsVærdi
RENTE	Hvad tror du?
NPER	Number of PERiods, dvs. antal ydelser

Jeg anbefaler at du kigger på Excel-funktionerne igen efter du har læst afsnit 8.7. Så vil du nemlig have et bedre grundlag til at forstå dem. Formlen for restgæld er nok lidt svær at gennemskue, da den kræver en lidt dybere forståelse af restgæld.

Jeg har sat minus på funktionerne i tabellerne så de virker i praksis, men skal man bruge funktionerne formelt korrekt, afhænger placeringen af evt. minus-tegn af konteksten. Sætter man 100 kr. ind på en konto, til en rente på 5% om året, skal man regne beløbet, man kan hæve efter 10 år ved:

$$=FV(0,05;10;0;-100) = 162,89$$

Låner man 100 kr. til en årlig rente på 5%, skal man regne gælden efter 10 år ved:

$$=FV(0,05;10;0;100) = -162,89$$

Læg mærke til forskellen med minus-tegnet på de 100 kr. Ved opsparing skal man **af med** 100 kr., og derfor skal det være minus. Ved lån **modtager** man 100 kr. og derfor er det et positivt beløb. Vi ser også at facit giver noget positivt ved opsparing og negativt ved gæld. Det er igen fordi at vi kan **modtage** 162,89 kr. ved opsparing, mens at vi skal **betale** 162,89 kr. ved gæld.

8.6 Nominel, effektiv og gennemsnitlig rente

Den årlige nominelle rente

I afsnittet om kapitalfremskrivning har vi regnet på situationer, hvor vi kendte rentefoden (renten pr. termin) eller skulle finde rentefoden. Det er dog ikke altid at vi får opgivet rentefoden. Ofte får vi den såkaldte årlige nominelle rente opgivet og får at vide, at der er f.eks. månedlige rentetilskrivninger. Det betyder at vi kan finde rentefoden ved at tage den årlige nominelle rente og dividere den ud på antallet af terminer på et år. Er den årlige nominelle rente på f.eks. 6% p.a. med månedlige rentetilskrivninger, finder vi rentefoden ved:

$$\frac{6\%}{12} = 0,5\%$$

Vi kan se, at der tale om en årlig rente hvis der står "p.a." efter renten. Forkortelse p.a. er en forkortelse for "pro anno" som er latin for "pr. år". I det følgende vil vi gå ud fra at der er tale om den årlige nominelle rente, når vi opgiver en rente efterfulgt af p.a. Nogle gange bruges ordet *pålydende* i stedet for "nominel".

Øvelse 8.6.1

Bestem rentefoden for følgende årlige nominelle renter.

- a) Renten er 12% p.a. med månedlige rentetilskrivninger.
- b) Renten er 12% p.a. med halvårslige rentetilskrivninger.
- c) Renten er 4% p.a. med kvartårslige rentetilskrivninger.

Effektiv rente

Men... er det virkelig det samme at få f.eks. 12% i renter om året som at få 1% om måneden? Vi kan prøve at regne efter. Antag at vi har 100 kr. på en konto. Vi prøver først med en enkelt rentetilskrivning på 12%:

$$K_1 = 100 \cdot (1 + 0,12)^1 = 112.$$

Altså vil vi have 112,00 kr. på kontoen hvis vi kun har en enkelt rentetilskrivning på 12%.

Vi prøver nu med 12 rentetilskrivninger på 1%:

$$K_{12} = 100 \cdot (1 + 0,01)^{12} = 112,68$$

Altså vil vi have 112,68 kr. på kontoen hvis vi har 12 rentetilskrivninger på 1%.

Så hvis vi har en årlig nominel rente på 12% med månedlige rentetilskrivninger, får vi altså mere end 12% tilskrevet om året. Vi får faktisk tilskrevet en rente på 12,68%. Denne rente kaldes den *årlige effektive rente* og den betegnes i . Fænomenet kaldes også "renters rente".

Sætning 8.6.1

Vi finder den årlige effektive rente i (som decimaltal) ud fra rentefoden r ved:

$$i = (1 + r)^n - 1,$$

hvor n er antallet af terminer på et år.

Øvelse 8.6.2

Bestem den effektive rente for følgende nominelle renter. Husk først at finde rentefoden først.

- a) Renten er 4% p.a. med månedlige rentetilskrivninger.
- b) Renten er 24% p.a. med halvårlige rentetilskrivninger.
- c) Renten er 10% p.a. med kvartårlige rentetilskrivninger.

Øvelse 8.6.3

Martin sætter 2.000 kr. i banken. Renten er på 2% p.a. med månedlige rentetilskrivninger.

- a) Bestem, hvor mange penge Martin har på sin konto efter 3 år.
- b) I hvor lang tid skal pengene stå i banken før Martin har 2.200 kr.?
- c) Bestem den årlige effektive rente.

Øvelse 8.6.4

Michael sætter et beløb ind på en tom bankkonto. Kontoen bliver tilskrevet 0,5% i rente hver måned. Efter 2 år står der 1690,74 kr. på kontoen.

- a) Angiv rentefoden.
- b) Bestem den årlige nominelle rente.
- c) Bestem den årlige effektive rente.
- d) Bestem, hvor meget Michael oprindeligt satte ind på sin konto.

Øvelse 8.6.5 (Svær)

En konto tilskrives en årlig effektiv rente på 6,17%. Der er månedlige rentetilskrivninger.

- a) Bestem den årlige nominelle rente.

Gennemsnitlig rente

Forestil dig at du har penge stående på en konto i 3 år. På første år får du 3%, på andet år får du 9% og på tredje år får du 6%. Hvad er mon så den gennemsnitlige rente? Altså hvis vi skulle erstatte de tre forskellige renter med en fast rente, hvad skulle den så være, hvis vi skulle ende med det samme resultat? Umiddelbart skulle man tro, det var 6%, da gennemsnittet af 3, 9 og 6 er 6. Desværre er det lidt mere kompliceret. Man kan finde den gennemsnitlige rente med følgende sætning:

Sætning 8.6.2

Antag at en kapital bliver tilskrevet rentefødderne $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. Den gennemsnitlige rentefod r_g er så givet ved:

$$r_g = \sqrt[n]{(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)} - 1.$$

Eksempel 8.6.1

Vi vil nu regne den gennemsnitlige rente for førstnævnte eksempel. Vi har altså renterne 3%, 9% og 6%, dvs. rentefødderne $r_1 = 0,03$, $r_2 = 0,09$ og $r_3 = 0,06$. Vi bruger 8.6.2:

$$r_g = \sqrt[3]{(1 + 0,03) \cdot (1 + 0,09) \cdot (1 + 0,06)} - 1 = 0,0597 = 5,97\%.$$

Øvelse 8.6.6

Lille Gysse sætter 1.000 kr. i banken. Det første år bliver kontoen tilskrevet en rente på 5%, det efterfølgende år en rente på 11%, derefter en rente på 7%, og til sidst en rente på 1%.

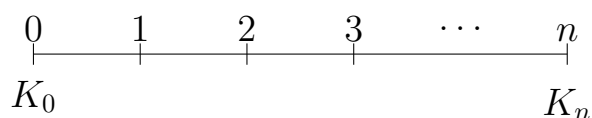
- a) Bestem den gennemsnitlige rente.
- b) Hvor mange penge har Lille Gysse på sin konto efter 4 år.

8.7 Teori for finansiel regning

Vi skal nu se lidt nærmere på nogle af de begreber, vi har arbejdet med i de forgående afsnit. Det vil gøre os i stand til at regne flere typer af opgaver, og vi vil få en bedre forståelse af nogle begreberne. Desuden er indholdet i afsnittet afgørende i forhold til at kunne forstå beviserne hørende til emnet.

Kapitalfremskrivning

Vi husker tidslinjen for kapitalfremskrivning:



Vi husker også at kapitalfremskrivning kan bruges både i forbindelse med opsparing og lån. Vi ser det primært i forbindelse med opsparing, fordi lån jo som regel er noget man betaler af på, hvilket giver os et annuitetslån (der er en ydelse). Men kapitalfremskrivning handler udelukkende om, hvordan et beløb vokser når der bliver tilskrevet rente og en god forståelse af kapitalfremskrivning er grundlaget for en dybere forståelse af annuitetsopsparinger og annuitetslån.

Frem og tilbageskrivning

Regner vi K_n ud fra K_0 , siger vi, at vi har fremskrevet K_0 . Regner vi K_0 ud fra K_n , siger vi, at vi har tilbageskrevet K_n . Når man fremskriver en kapital, så lægger man renter på kapitalen. Tilbageskriver man kapitalen, fjerner man renterne igen, for at nå frem til det oprindelige beløb uden renter. Skriver man et beløb frem, siger man at man har fundet beløbets fremtidsværdi, derfor bliver K_n også kaldt kapitalens fremtidsværdi. Tilsvarende kaldes K_0 for kapitalens nutidsværdi.

Fremskrivningsformlen

Vi skal nu se hvor kapitalfremskrivningsformlen $K_n = K_0(1+r)^n$ kommer fra. Vi starter med at lave en formel for K_1 . Altså K_0 tilskrevet renter en enkelt gang. Vi ved fra procentregning at det gøres ved at gange K_0 med $(1+r)$:

$$K_1 = K_0(1+r)$$

Vi kan nu finde K_2 ved at tilskrive K_1 endnu en rente:

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1(1+r) \\ &= K_0(1+r)(1+r) && (\text{Da } K_1 = K_0(1+r)) \\ &= K_0(1+r)^2 \end{aligned}$$

På tilsvarende måde regner vi K_3 ud fra formlen for K_2 :

$$\begin{aligned} K_3 &= K_2(1+r) \\ &= K_0(1+r)^2(1+r) && (\text{Da } K_2 = K_0(1+r)^2) \\ &= K_0(1+r)^3 \end{aligned}$$

Vi ser mønsteret og konkluderer at

$$K_n = K_0(1+r)^n$$

Alternativt kan vi argumentere for kapitalfremskrivningsformlen med udgangspunkt i eksponentielle funktioner. Eksponentielle funktioner er funktioner, der vokser med en fast procent, og det er jo netop den situation, vi har, når vi tilskriver en fast rente til en kapital. Vi husker forskriften:

$$f(x) = ba^x$$

Vi husker også at b er begyndelsesværdien og a er fremskrivningsfaktoren som kan bestemmes ud fra vækstraten (den procentvise vækst som decimaltal) ved $a = 1+r$. Den eksponentielle funktion kan altså skrives som:

$$f(x) = b(1+r)^x$$

I vores tilfælde er begyndelsesværdien K_0 og funktionsværdien K_n (som har afhænger af n i stedet for x), så vi får den endelige formel:

$$K_n = K_0(1+r)^n$$

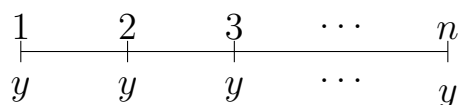
Annuiteter

Annuitetsopsparinger og annuitetslån har det tilfælles, at der betales en fast ydelse. Mere generelt definerer vi en annuitet på følgende måde:

Definition 8.7.1

En annuitet består af en række lige store ydelser betalt med lige store mellemrum.

På en tidslinje ser det så ledes ud:



Øverst ses antallet af ydelser vi har betalt og nederst på linjen ses den faste ydelse y . Ved hver ydelse startes også en ny termin og selvom det ikke nævnes i definitionen vil der altid være en fast rente pr. termin. Denne rente kan bruges til enten at fremskrive eller tilbageskrive de enkelte ydelser.

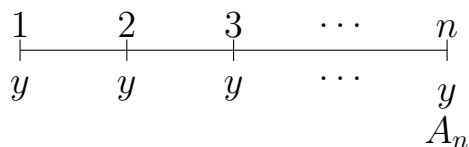
Fremtidsværdien af en annuitet

Vi mødte fremtidsværdien i forbindelse med annuitetsopsparing. Her beskrev fremtidsværdien det samlede beløb vi havde sparet op. Men hvad er det, rent matematisk, vi regner, når vi regner fremtidsværdien? Det kan vi se i følgende definition:

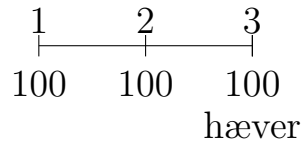
Definition 8.7.2

Fremtidsværdien af en annuitet består af alle ydelserne skrevet frem til sidste termin.

På en tidslinje ligger fremtidsværdien A_n altså til slut som vist her:



Ud fra definitionen er det rimeligt klart at fremtidsværdien af en annuitet kan bruges til at regne resultatet af en opsparing, men lad os gøre det endnu mere klart ved at se på et eksempel. Antag at vi sætter 100 kr. ind på en konto i 3 terminer i træk til en rente på 10% og hæver dem umiddelbart efter den sidste indbetaling. Vi har altså tidslinjen:



Vi kan finde det beløb vi hæver ved at kigge på hvor meget hver enkelt ydelse er vokset til. Den første ydelse når at trække renter to gange, inden vi hæver pengene ved sidste termin, og skal derfor fremskrives to gange:

$$\text{Bidrag fra den første ydelse: } 100 \cdot (1 + 0,1)^2 = 121$$

Den næste ydelse når at trække renter én gang og skal derfor fremskrive én gang.

$$\text{Bidrag fra den anden ydelse: } 100 \cdot (1 + 0,1)^1 = 110$$

Den sidste ydelse når slet ikke at trække nogle renter:

$$\text{Bidrag fra den sidste ydelse: } 100$$

Den samlede opsparing er summen af bidragene:

$$\text{Samlet opsparing: } 121 + 110 + 100 = 331$$

Vi ser, at den samlede opsparing (331 kr.) kan findes som summen af ydelserne fremskrevet til sidste termin, hvilket var definitionen på fremtidsværdien A_n . Vi tjekker om resultatet passer med formlen:

$$A_n = y \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Vi indsætter $y = 100$, $n = 3$ og $r = 0,1$:

$$\begin{aligned} A_3 &= 100 \cdot \frac{(1 + 0,1)^3 - 1}{0,1} \\ &= 331 \end{aligned}$$

Det passer hurra!

Nutidsværdien af en annuitet

Definition 8.7.3

Nutidsværdien af en annuitet består af alle ydelserne tilbageskrevet til terminen før den første ydelse.

På en tidslinje ser det således ude:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\
 | & | & | & | & & | \\
 A_0 & y & y & y & \cdots & y
 \end{array}$$

Nutidsværdien er lidt sværere at forstå, men så svær er den heller ikke. Lad os se på et eksempel hvor vi betaler et ukendt lån tilbage. Lad os sige at vi betaler lånet tilbage over tre indbetalinger på 100 kr. og at renten på lånet er 10% Tidslinjen ser således ud:

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 2 & 3 \\
 | & | & | & | \\
 \text{Lån} & 100 & 100 & 100
 \end{array}$$

Hvor meget har vi mon lånt? Igen kan vi analysere problemet ved at betragte hver ydelse for sig. Hver ydelse består af et lånebeløb og et rentebeløb. Vi starter med den første ydelse som altså betales tilbage 1 termin efter lånets optagelse. Derfor når lånebeløbet fra den første ydelse at få tilskrevet renter én gang. Lånebeløbet kan derfor findes ved at tilbageskrive ydelsen en enkelt gang:

$$\text{Bidrag fra den første ydelse} = 100 \cdot (1 + 0,1)^{-1} = 90,9091$$

Den næste ydelse vi betaler skal tilbageskrives to gange for at finde selve lånebeløbet hørende den ydelse:

$$\text{Bidrag fra den anden ydelse} = 100 \cdot (1 + 0,1)^{-2} = 82,6446$$

Den sidste ydelse skal tilbageskrives tre gange:

$$\text{Bidrag fra den sidste ydelse} = 100 \cdot (1 + 0,1)^{-3} = 75,1315$$

Vi finder nu det samlede lånebeløb:

$$\text{Samlet lånebeløb} = 90,9091 + 82,6446 + 75,1315 = 248,69$$

Vi ser at altså at vi har lånt 248,69 kr. Vi tjekker med formlen:

$$A_0 = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Vi indsætter $y = 100$, $n = 3$ og $r = 0,1$:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 100 \cdot \frac{1 - (1 + 0,1)^{-3}}{0,1} \\
 &= 248,69
 \end{aligned}$$

Det passer hurra!

Atypiske opgaver

Når vi tænker på kapitalfremskrivning og fremtidsværdien af en annuitet, så tænker vi på opsparing. Når vi tænker på nutidsværdien af en annuitet, tænker vi på lån. Men som skrevet tidligere behøver det ikke at være sådan.

Eksempel 8.7.1

En mand har en pensionsopsparing på en million kr., som han får udbetalt over 10 år (120 ydelser). Renten er på 6% p.a. Vi vil gerne finde ud af hvor stor ydelser er. Vi starter med at finde rentefoden:

$$\frac{6\%}{12} = 0,5\% = 0,005.$$

Vi ved at vi har en annuitet, fordi der er en fast ydelse. Men er det mon formlerne for fremtidsværdi eller nutidsværdi, vi skal have fat i? Ved at sammenligne med tidslinjerne kan vi se, at det nok er nutidsværdien, vi har. Han starter nemlig med at have en million, som han får udbetalt i de terminer, der ligger efter. Vi skal altså bruge formlen for ydelser ud fra nutidsværdien, rentefoden og antallet af ydelser:

$$y = \frac{A_0 \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}} = \frac{1000000 \cdot 0,005}{1 - (1 + 0,005)^{-120}} = 11102,05.$$

Altså får manden udbetalt 11102,05 kr. hver måned.

Ovenstående eksempel viser at vi altså godt kan risikere at skulle bruge formlerne for nutidsværdi i forbindelse med en opsparing. Måske synes du, at argumentet med tidslinjerne er lidt tyndt. I princippet bør vi overveje om situationen svarer til definitionen af nutidsværdi eller fremtidsværdi. I eksemplet har manden penge stående som trækker renter. Han kan derfor få mere end sin million udbetalt. Får at få udbetalt sine 11102,05 kr., behøver han blot at have indsat et beløb som nu er vokset til 11102,05 kr. Hans million skal derfor svarer til alle ydelserne skrevet tilbage til start, altså nutidsværdien af annuiteten.

Øvelse 8.7.1

Gleager opretter en konto i en bank. Renten er på 3% p.a. og rentetilskrivningerne er månedlige.

- a) Bestem rentefoden.
- b) Gleager sætter nu 100 kr. ind på sin konto hver måned i 10 år (120 ydelser). Hvor mange penge har Gleager efter de 10 år?
- c) Gleager har nu ikke råd til at sætte flere penge ind, så han lader pengene stå på kontoen i 5 år. Hvor mange penge har han så?
- d) Gleager er nu totalt på røven. Han vælger derfor at få udbetalt 100 kr. hver måned. Bestem, hvor mange ydelser hans opsparing rækker til.
- e) Hvor lang tid går der, før Gleager ikke har flere penge?

Øvelse 8.7.2

En studerende kan ikke få økonomien til at hænge sammen, så han tager et studielån, hvor han får udbetalt 5.000 kr. hver måned. Renten er på 0,5% om måneden.

- a) Hvor meget skylder han efter 2 år (24 ydelser)?

8.8 Beviser til finansiel regning

Beviser til kapitalfremskrivning

Beviserne her er så nemme, at jeg har lavet dem som øvelser. I kan dog se de fulde beviser i facit, hvis I ikke kan finde ud af dem.

Øvelse 8.8.1

Formlen for renten i en kapitalfremskrivning ser således ud:

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

- a) Bevis formelen ved at isolere r i fremskrivningsformlen.

Øvelse 8.8.2

Formlen $K_0 = K_n(1+r)^{-n}$ kaldes også "tilbageskrivningsformlen".

- a) Bevis tilbageskrivningsformlen med udgangspunkt i fremskrivningsformlen.

VINK: Gang fremskrivningsformlen med $(1+r)^{-n}$ på begge sider og brug en passende potensregneregul.

Øvelse 8.8.3

Formlen for antallet af terminer i en kapitalfremskrivning ser således ud:

$$n = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)}.$$

- a) Bevis formelen.

Beviser til annuitetsregning

Fremtidsværdien af en annuitet (B-niveau-version)

Her på mathhx er der to beviser for fremskrivningsformlen. Det første og mest simple bevis er tænkt til B-niveau, mens det andet bevis er tænkt til A-niveau. Man kan dog lave begge beviser på begge niveauer.

Sætning 8.2.1

Fremtidsværdien A_n af en annuitet bestående af n ydelser y ved en rente på r , er givet ved:

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bevis

Fremtidsværdien A_n betyder summen af alle ydelserne skrevet frem til det tidspunkt, hvor den sidste ydelse ligger. Dvs:

$$A_n = y + y(1+r) + y(1+r)^2 + \cdots + y(1+r)^{n-1}$$

Vi sætter $a = 1+r$:

$$A_n = y + ya + ya^2 + \cdots + ya^{n-1}$$

Vi sætter y ud foran parentesen:

$$A_n = y(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})$$

Vi ganger med $a - 1$, hvorefter vi dividerer med $a - 1$ (så vi har ikke ændret værdien af udtrykket).

$$A_n = \frac{y(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})(a - 1)}{a - 1}$$

Vi sætter y ned foran brøken og ganger parenteserne ud i brøkes tæller:

$$A_n = y \frac{a + a^2 + \cdots + a^n - 1 - a - a^2 - \cdots - a^{n-1}}{a - 1}$$

Vi reducerer:

$$A_n = y \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Vi husker at $a = 1 + r$:

$$\begin{aligned} A_n &= y \frac{(1 + r)^n - 1}{1 + r - 1} \\ &= y \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \end{aligned}$$

Fremtidsværdien af en annuitet (A-niveau-version)

Vi skal nu se et lidt sværere bevis. Normalt vil man fortrække at lave et simpelt bevis frem for et svært. Hvorfor gøre noget sværere end det behøver at være? Det spørgsmål vil jeg svare på efter jeg har lavet det ”svære bevis”, som består af to dele. Først starter vi med en definition:

Definition 8.8.1

En geometrisk række er et udtryk på formen

$$a + ar + ar^2 + ar^3 \cdots$$

hvor a og r er reelle tal.

Så en geometrisk række er altså en uendelig sum af tal. I vores tilfælde er vi dog kun interesseret en del af denne sum. Mere specifik har vi brug for summen af de n første led:

Sætning 8.8.1

Summen $s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ af de n første led i en geometrisk række kan beregnes ved:

$$s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Bevis

Vi starter med summen

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

Nu ganger vi med r på begge sider

$$r \cdot s_n = r(a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1})$$

og ganger parenteser ud:

$$r \cdot s_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

Vi har nu et udtryk for s_n og et udtryk for $r \cdot s_n$. Vi trækker $r \cdot s_n$ fra s_n

$$s_n - r \cdot s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} - (ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n)$$

Vi hæver nu parenteser:

$$s_n - r \cdot s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} - ar - ar^2 - ar^3 - \dots - ar^n$$

Vi ser at de fleste led går ud på højresiden. Tilbage har vi:

$$s_n - r \cdot s_n = a - ar^n$$

Vi faktorerer nu med s_n på venstresiden og med a på højresiden:

$$s_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

og dividerer med $1 - r$ på begge sider:

$$s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Vi kan nu bevise formelen for fremtidsværdien:

Sætning 8.2.1

Fremtidsværdien A_n af en annuitet bestående af n ydelser y ved en rente på r , er givet ved:

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bevis

Fremtidsværdien A_n betyder summen af alle ydelserne skrevet frem til det tidspunkt, hvor det sidste ydelse ligger. Dvs:

$$A_n = y + y(1+r) + y(1+r)^2 + \cdots + y(1+r)^{n-1}$$

Vi ser at A_n er en geometrisk række. I følge sætning 8.8.1 kan A_n derfor skrives som

$$A_n = y \frac{1 - (1+r)^n}{1 - (1+r)}$$

Vi reducerer

$$A_n = y \frac{1 - (1+r)^n}{-r}$$

Vi forlænger nu brøken med -1 .

$$\begin{aligned} A_n &= y \frac{-1(1 - (1+r)^n)}{-1(-r)} \\ &= y \frac{-1 + (1+r)^n}{r} \\ &= y \frac{(1+r)^n - 1}{r} \end{aligned}$$

Så hvorfor dette bevis? Fordi vi står med et stærkere resultat. Vi har selvfølgelig bevist fremskrivningsformlen, men vi har også fået introduceret geometriske rækker og vist en generel sætning, som kan bruge i andre sammenhænge også. Og så meget sværere var det heller ikke, vel?

Nutidsværdi af en annuitet

I det følgende bevis får vi brug noget ekstra forståelse i forhold til kapitalfremskrivning. Lad os sige, at vi skal tilbageskrive en kapital med 5 terminer. Hvis vi har lyst, så kan vi i stedet fremskrive kapitalen med 10 terminer efterfulgt af en tilbageskrivning på 15 terminer. Det vil give det samme. Man kan nemlig tænke på frem og tilbageskrivninger som at de flytter kapitalen frem og tilbage på

tidslinjen. Hvis vi først går 10 terminer frem og så 15 terminer tilbage svarer det selvfølgelig til at gå 5 terminer tilbage alt i alt.

Sætning 8.3.1

For et annuitetslån kan nutidsværdien A_0 bestemmes ved:

$$A_0 = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Bevis

Nutidsværdien A_0 er defineret som summen af alle ydelserne skrevet tilbage til terminen før den første termin. Vi vil lave den tilbageskrivning på en snedig måde. Først skriver vi alle ydelserne frem til sidste termin. Det giver os A_n som vi allerede har en formel for. Fordi alle ydelserne nu ligger samlet på sidste termin, kan vi finde A_0 ved skrive dem tilbage med tilbageskrivningsformlen $K_0 = K_n(1 + r)^{-n}$. Altså:

$$A_0 = A_n \cdot (1 + r)^{-n}$$

Vi indsætter formelen for A_n

$$A_0 = y \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \cdot (1 + r)^{-n}$$

Vi ganger $(1 + r)^{-n}$ op i tælleren

$$A_0 = y \frac{((1 + r)^n - 1) \cdot (1 + r)^{-n}}{r}$$

og ganger parentesens i tælleren ud

$$A_0 = y \frac{(1 + r)^n \cdot (1 + r)^{-n} - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Vi har $(1 + r)^n \cdot (1 + r)^{-n} = (1 + r)^{n-n} = (1 + r)^0 = 1$, så

$$A_0 = y \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

hvilket var det vi skulle vise.

Gennemsnitlig og effektiv rente

Sætning 8.6.2

Antag at en kapital bliver tilskrevet rentefødderne $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. Den gennemsnitlige rentefod r_g er så givet ved:

$$r_g = \sqrt[n]{(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)} - 1.$$

Bevis

Antag vi har en kapital K der bliver tilskrevet rentefødderne $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. Vi leder nu efter en rentefod som tilskrevet n gange til K giver samme resultat:

$$K \cdot (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n) = K \cdot (1 + r_g)^n$$

Vi dividerer med K på begge sider:

$$(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n) = (1 + r_g)^n$$

Vi tager den n 'te rod på begge sider:

$$\sqrt[n]{(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)} = 1 + r_g$$

Vi trækker 1 fra på begge sider:

$$\sqrt[n]{(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)} - 1 = r_g$$

og vi har vist sætningen.

Øvelse 8.8.4

Betragt sætningen:

Sætning 8.6.1

Vi finder den årlige effektive rente i (som decimaltal) ud fra rentefoden r ved:

$$i = (1 + r)^n - 1,$$

hvor n er antallet af terminer på et år.

- a) Bevis sætningen. Du kan lade dig inspirere af beviset for gennemsnitlig rente.

Kapitel 9

Lineær programmering

Ud fra navnet ”lineær programmering” kunne man tro, at emnet handler om at skrive computerkode omhandlende lineære funktioner. Det gør det dog ikke. I stedet handler det om at løse en bestemt type af problemer. Et sådan problem kunne være:

En tøjproducent producerer trøjer og bukser.

Producenten har 120 m^2 bomuld og 130 m^2 polyester på lager.

Der går $1,5 \text{ m}^2$ bomuld og $0,5 \text{ m}^2$ polyester til en trøje.

Der går 1 m^2 bomuld og 2 m^2 polyester til et par bukser.

Dækningsbidraget er 300 kr. for en trøje og 400 kr. for et par bukser.

Hvor mange trøjer og hvor mange bukser skal der produceres få det størst mulige samlede dækningsbidrag? Hvad bliver det maksimale dækningsbidrag?

I næste afsnit vil jeg introducere lineær programmering med udgangspunkt i dette problem.

9.1 Lineær programmering med hjørneinspektion

Lineær programmering handler om at løse en bestemt type af opgaver. Det kan gøres med forskellige teknikker, og i dette afsnit skal vi se på den mest simple: *lineær programmering ved hjørneinspektion*. Selvom det er den mest simple metode, er den stadig relativt kompliceret, og derfor vil vi i første omgang fokusere på **hvordan** man gør, og så kommer der forklaringer og detaljer i senere afsnit. Vi vil vise metoden med udgangspunkt i opgaven:

En tøjproducent producerer trøjer og bukser.

Producenten har 120 m^2 bomuld og 130 m^2 polyester på lager.

Der går $1,5 \text{ m}^2$ bomuld og $0,5 \text{ m}^2$ polyester til en trøje.

Der går 1 m^2 bomuld og 2 m^2 polyester til et par bukser.

Dækningsbidraget er 300 kr. for en trøje og 400 kr. for et par bukser.

Hvor mange trøjer og hvor mange bukser skal der produceres få det størst mulige samlede dækningsbidrag? Hvad bliver det maksimale dækningsbidrag?

Opstilling af skema

Opgaven kan virke lidt forvirrende, og derfor er første skridt at skrive informationerne op i et skema, som er nemt at overskue.

	Trøjer	Bukser	Til rådighed
Bomuld	$1,5 \text{ m}^2$	1 m^2	120 m^2
Polyester	$0,5 \text{ m}^2$	2 m^2	130 m^2
Dækningsbidrag	300 kr.	400 kr.	

Kriteriefunktionen

Vi skal optimere dækningsbidraget, og derfor starter vi med at bestemme en forskrift for dækningsbidraget. Dækningsbidraget afhænger af antallet af producerede trøjer og antallet af producerede bukser, og derfor sætter vi:

x = Antal producerede trøjer

y = Antal producerede bukser

Dækningsbidraget for en trøje er 300 kr. og dækningsbidraget for et par bukser er 400 kr., så hvis vi producerer x trøjer og y par bukser, må dækningsbidraget være givet ved funktionen

$$f(x, y) = 300x + 400y$$

Denne funktion kaldes også *kriteriefunktionen*. Generelt er kriteriefunktion den funktion, vi gerne vil optimere. I denne opgave er kriteriefunktionen en funktion som udtrykker dækningsbidraget, men i andre sammenhænge kunne udtrykke andre ting som f.eks. omkostninger eller tidsforbrug.

Polygonområde

Det er klart at jo flere trøjer og bukser vi producerer, jo mere tjener vi. Men da vi har begrænsede mængder af bomuld og polyester vil det være begrænset, hvor meget vi kan producere af hver.

Producerer vi x trøjer og y par bukser vil vi bruge $1,5 \cdot x + 1 \cdot y$ kvadratmeter bomuld (se skemaet). Da vi kun har 120 m^2 bomuld til rådighed, skal x og y altså opfylde uligheden:

$$1,5x + y \leq 120$$

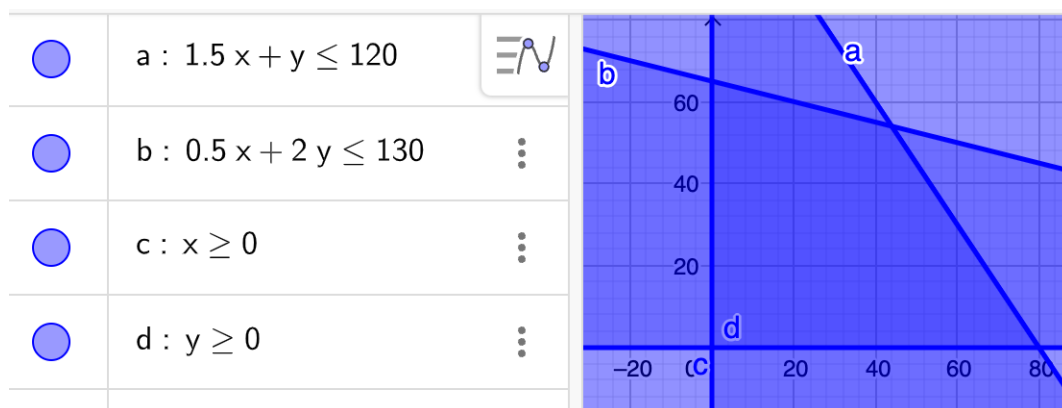
For polyester må der gælde:

$$0,5x + 2y \leq 130$$

Da vi ikke kan producere et negativt antal trøjer eller bukser har vi:

$$x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0$$

Disse uligheder kan vi skrive ind i et algebravindue i GeoGebra og det vil give os:

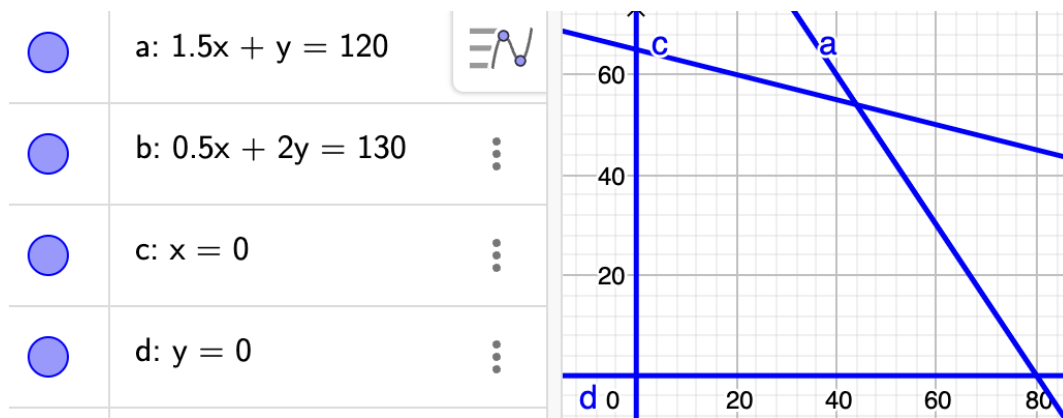


Det mørkeste område kaldes *polygonområdet*, og det viser, hvad der er muligt at producere. F.eks. ligger punktet $(40, 20)$ i polygonområdet, og det betyder at vi har nok stof til at producere 40 trøjer og 20 bukser, hvis vi vil det.

Bestemmelse af det optimale punkt

Vi har nu identificeret det optimale punkt i polygonområdet. I lineær programmering ligger det optimale punkt altid i et hjørne. Derfor starter vi med at finde hjørnepunkterne i polygonområdet.

Vi starter med at ændre ulighedstegnene til lighedstegn:



Vi kan nu finde hjørnepunkterne med skæringsværktøjet i GeoGebra. Det giver punkterne:

$$(0, 0) \quad (0, 65) \quad (44, 54) \quad (80, 0)$$

Vi regner nu funktionsværdien i hvert punkt. Dvs. vi indsætter punkterne i kriteriefunktionen som jo havde forskriften $f(x, y) = 300x + 400y$:

$$f(0, 0) = 300 \cdot 0 + 400 \cdot 0 = 0$$

$$f(0, 65) = 300 \cdot 0 + 400 \cdot 65 = 26000$$

$$f(44, 54) = 300 \cdot 44 + 400 \cdot 54 = 34800$$

$$f(80, 0) = 300 \cdot 80 + 400 \cdot 0 = 24000$$

Vi ser at den højeste funktionsværdi er 34800 i punktet $(44, 54)$. Det betyder at vi skal producere 44 trøjer og 54 bukser for at få det maksimale dækningsbidrag som er på 34800 kr.

Øvelse 9.1.1

En virksomhed producerer to produkter: Produkt A og PRODUKT B.

Til PRODUKT A skal der bruges 2 arbejdstimer og 5 kg råmateriale, mens PRODUKT B kræver 4 arbejdstimer og 1 kg råmateriale.

Virksomheden har 100 arbejdstimer til rådighed og 70 kg råmateriale.

Dækningsbidraget for PRODUKT A er 10 kr. pr. stk. mens dækningsbidraget for PRODUKT B er 8 kr. pr. stk.

Virksomheden vil gerne optimere dækningsbidraget.

- Opstil et skema som viser informationerne på en overskuelig måde.
- Definer x og y (dvs. bestem, hvad de skal betegne).
- Opskriv en forskrift for kriteriefunktionen.
- Tegn polygonområdet i GeoGebra.
- Bestem, hvor mange PRODUKT A og hvor mange PRODUKT B virksomheden skal lave, og bestem det maksimale dækningsbidrag. Det forventes, at du bruger skæringsværktøjet (eller en anden eksakt metode) til at finde hjørnepunkterne. Det er ikke nok at aflæse.

Øvelse 9.1.2

Vi bliver ved virksomheden fra sidste øvelse.

- Hvad bliver den optimale produktion og det tilhørende dækningsbidrag, hvis nu dækningsbidraget for PRODUKT A pludselig stiger til 20 kr. pr. stk.?
- Hvad bliver den optimale produktion og det tilhørende dækningsbidrag, hvis nu dækningsbidraget for PRODUKT A stiger videre til 60 kr. pr. stk.?

Ligesom vi kan bruge lineær programmering til at maksimere en funktion, kan vi også bruge det til at minimere en funktion.

Eksempel 9.1.1

Vi vil minimere funktionen $f(x, y) = 3x + 2y$ underlagt betingelserne:

$$2x + y \geq 10$$

$$x + y \geq 8$$

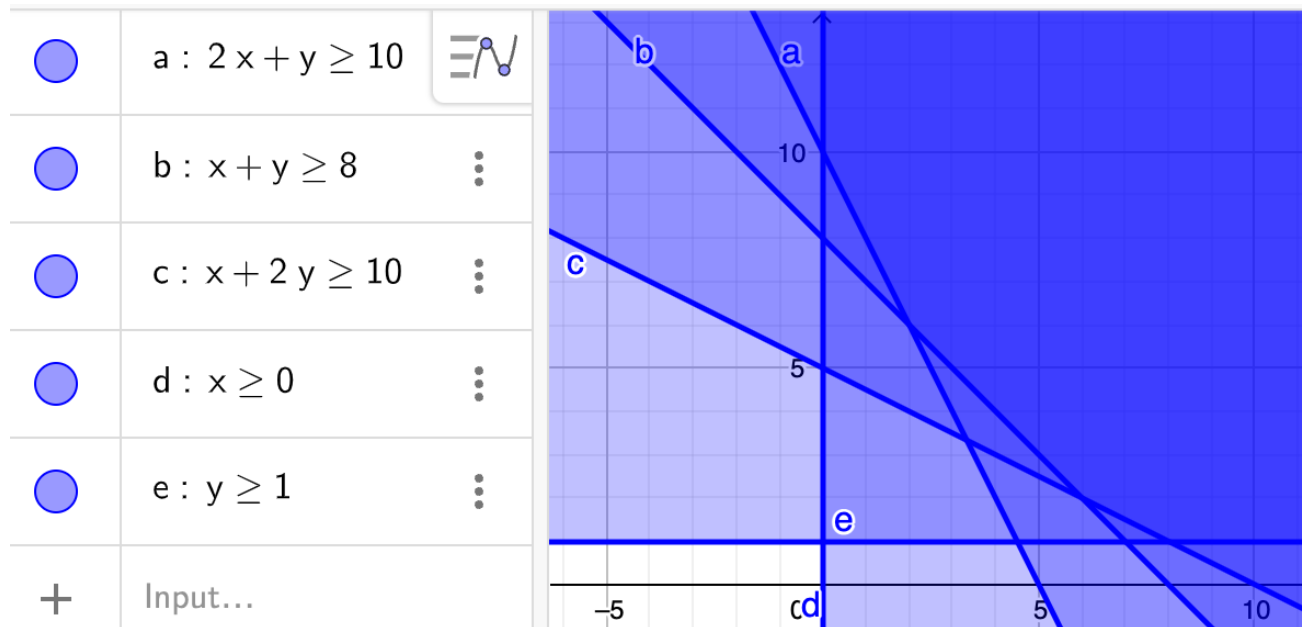
$$x + 2y \geq 10$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 1$$

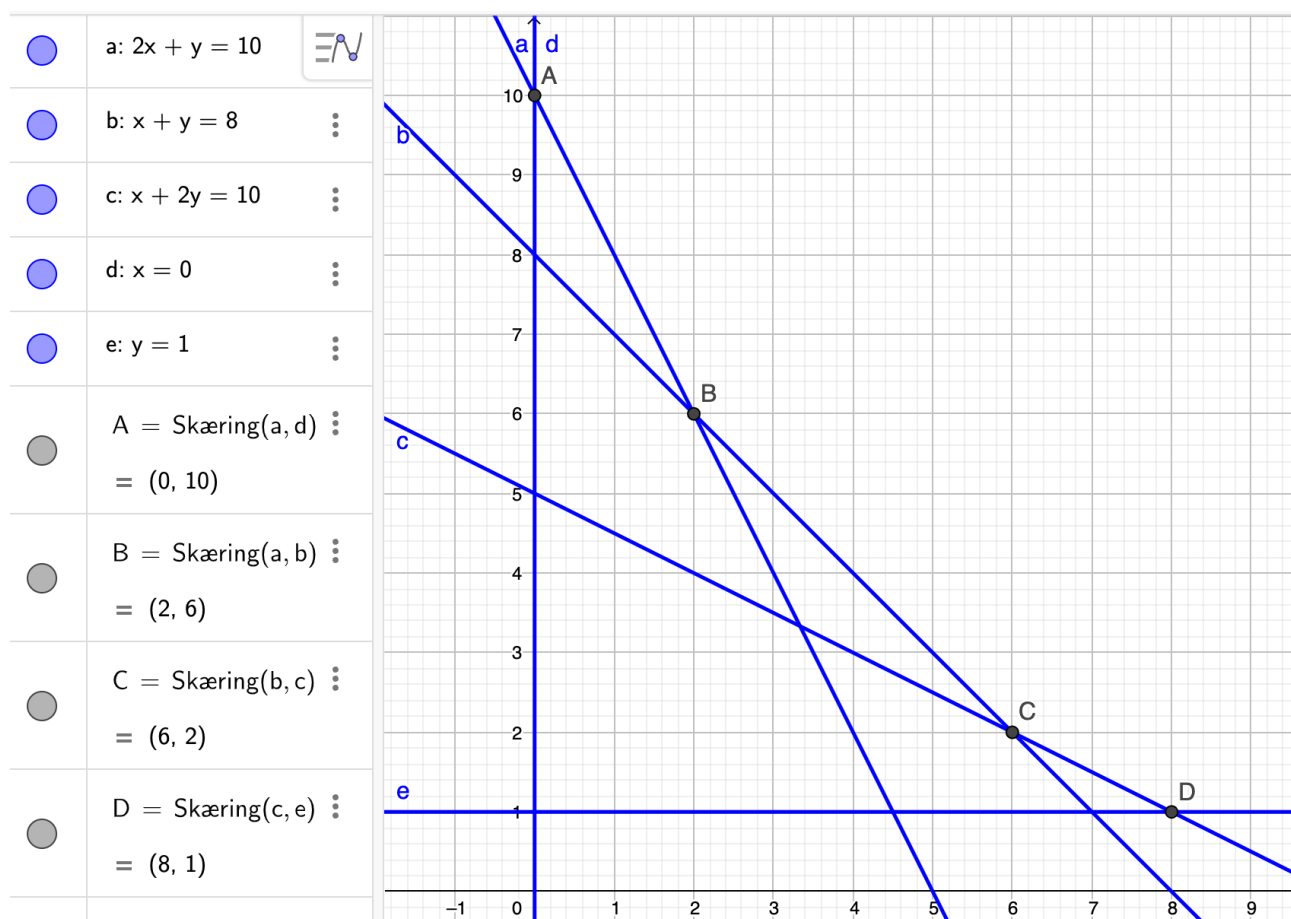
Læg mærke til at vi har " $\geq$ " i stedet for " $\leq$ " i begrænsningerne. Det er fordi det er en minimeringsopgave. Her har vi minimumskrav i stedet for begrænsede ressourcer.

Vi tegner polygonområdet i GeoGebra:



Igen er polygonområdet det mørkeste område, så det er området øverst til højre. Denne gang er polygonområdet altså uendeligt stort. Sådan vil det typisk være i minimeringsopgaver.

Opgaven løses er helt tilsvarende til maksimering. Vi laver ulighederne om til ligninger og finder skæringspunkterne med skæringsværktøjet.



Jeg tester nu hjørnepunkterne:

$$f(0, 10) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 10 = 20$$

$$f(2, 6) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18$$

$$f(6, 2) = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 22$$

$$f(8, 1) = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = 25$$

Den mindste funktionsværdi er 18 og det sker i punktet (2, 6). Vi konkluderer at funktionen har minimum i (2, 6) og minimumsværdien er 18.

Øvelse 9.1.3

En elev vil sælge slikposer i kantinen. Hun reklamerer med:

Billige slikposer. Kom og køb. Du får miniskumbananer og/eller piratos. Mindst 20 stykker slik i hver pose. Mindst 120g i posen!

En miniskumbanan vejer 9 gram og en piratos vejer 4 gram.

Eleven kan indkøbe miniskumbananer til 2 kr. pr. stk. og piratos til 50 øre pr. stk.

Eleven vil gerne minimere sine omkostninger.

- Lav et skema med oplysningerne i opgaven.
- Definer x og y .
- Opskriv en funktion som udtrykker elevens omkostninger pr. slikpose.
- Tegn polygonområdet.
- Bestem, hvad eleven skal putte i poserne og bestem den samlede udgift pr. pose.
- Pludselig stiger prisen på piratos til 1,5 kr. stk.. Hvad skal hun nu putte i poserne for at minimere sine udgifter.

9.2 Lineær programmering med niveaulinjer

I stedet for at regne alle punkterne i polygonområdet, kan vi bruge noget som hedder *niveaulinjer* til at finde det mest optimale punkt. Vi vil nu regne de samme eksempler/øvelser som i sidste afsnit, men bare med niveaulinjer som en del af metoden.

En tøjproducent producerer trøjer og bukser.

Producenten har 120 m^2 bomuld og 130 m^2 polyester på lager.

Der går $1,5 \text{ m}^2$ bomuld og $0,5 \text{ m}^2$ polyester til en trøje.

Der går 1 m^2 bomuld og 2 m^2 polyester til et par bukser.

Dækningsbidraget er 300 kr. for en trøje og 400 kr. for et par bukser.

Hvor mange trøjer og hvor mange bukser skal der produceres få det størst mulige samlede dækningsbidrag? Hvad bliver det maksimale dækningsbidrag?

Opstilling af skema

Ingen ændringer her:

	Trøjer	Bukser	Til rådighed
Bomuld	1,5 m ²	1 m ²	120 m ²
Polyester	0,5 m ²	2 m ²	130 m ²
Dækningsbidrag	300 kr.	400 kr.	

Kriteriefunktionen

Heller ingen ændringer her. Vi sætter altså

x = Antal producerede trøjer

y = Antal producerede bukser

Dækningsbidraget må dermed være givet ved:

$$f(x, y) = 300x + 400y$$

Polygonområde

Igen ingen ændringer. Ud fra skemaet ses at

$$1,5x + y \leq 120$$

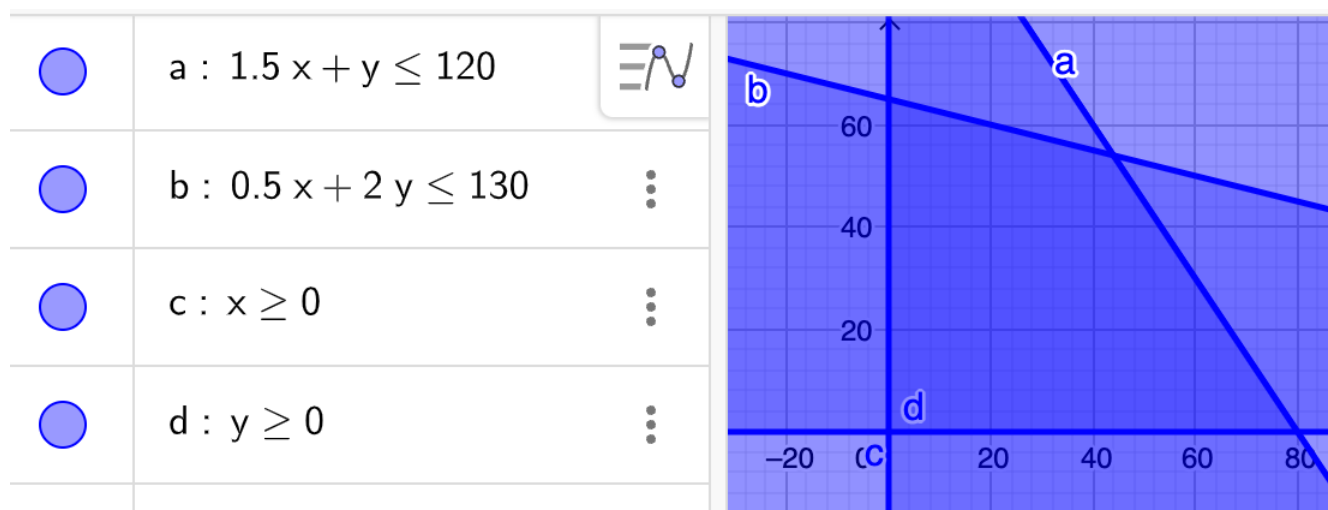
For polyester må der gælde:

$$0,5x + 2y \leq 130$$

Da vi ikke kan producere et negativt antal trøjer eller bukser har vi:

$$x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0$$

Disse uligheder kan vi skrive ind i et algebravindue i GeoGebra og det vil give os:



Det mørkeblå er polygonområdet.

Niveaulinjer

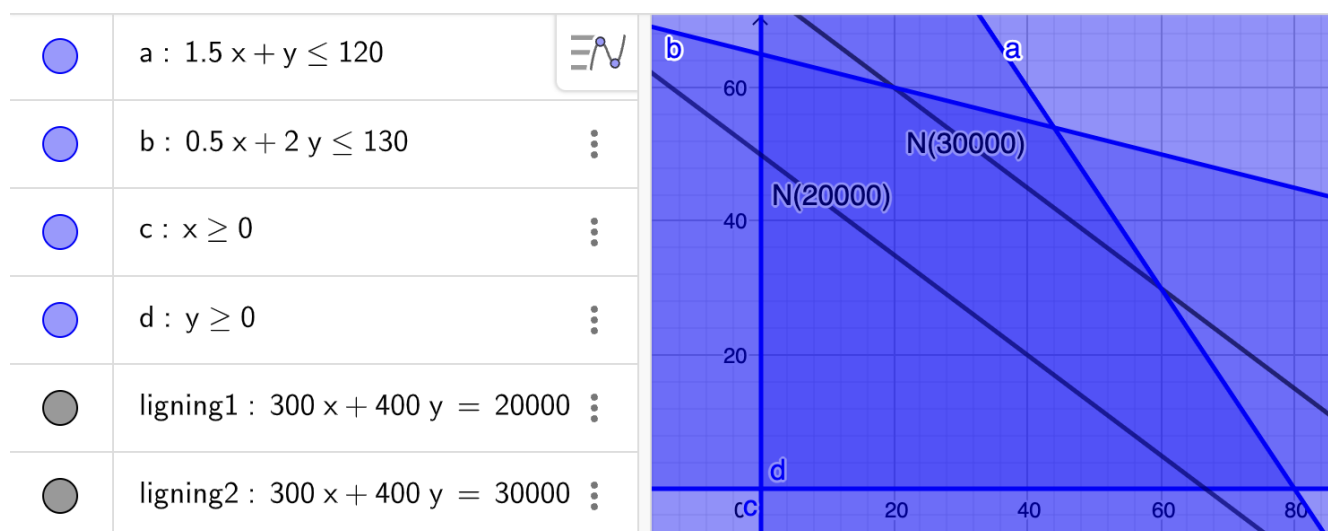
Nu kommer det nye. I stedet for at teste alle hjørnepunkterne i polygonområdet, vil vi starte med at identificere det optimale punkt. Det gør vi ved hjælp af det, som hedder *niveaulinjer*. En niveaulinje $N(t)$ (læses "n t") er en linje givet ved ligningen:

$$f(x, y) = t$$

Vi skal nu tegne to niveaulinjer i GeoGebra. Vi vælger (forklaring følger senere) $N(20000)$ og $N(30000)$. For at finde dem skal vi altså sætte $f(x, y) = 20000$ og $f(x, y) = 30000$. Det giver:

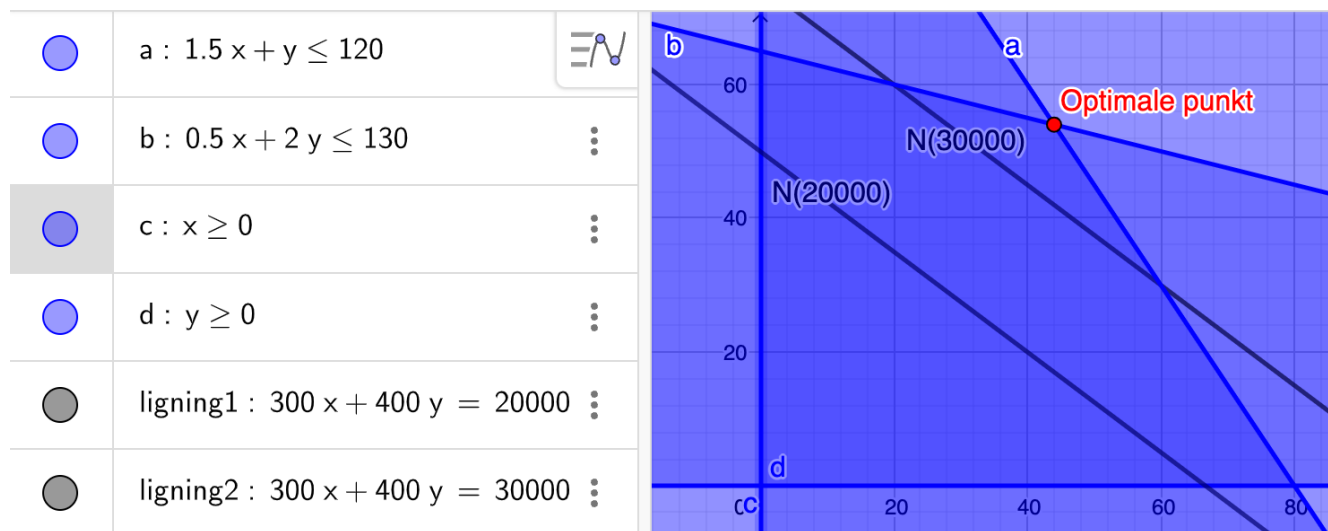
$$300x + 400y = 20000 \quad \text{og} \quad 300x + 400y = 30000.$$

Vi taster disse to ligninger ind i GeoGebra (jeg har været inde og navngive linjerne, det sker ikke af sig selv):



De to linjer udtrykker to forskellige dækningsbidrag. Alle de punkter på $N(20000)$ svarer til et dækningsbidrag på 20000 kr. og punkterne på $N(30000)$ svarer til et dækningsbidrag på 30000 kr.

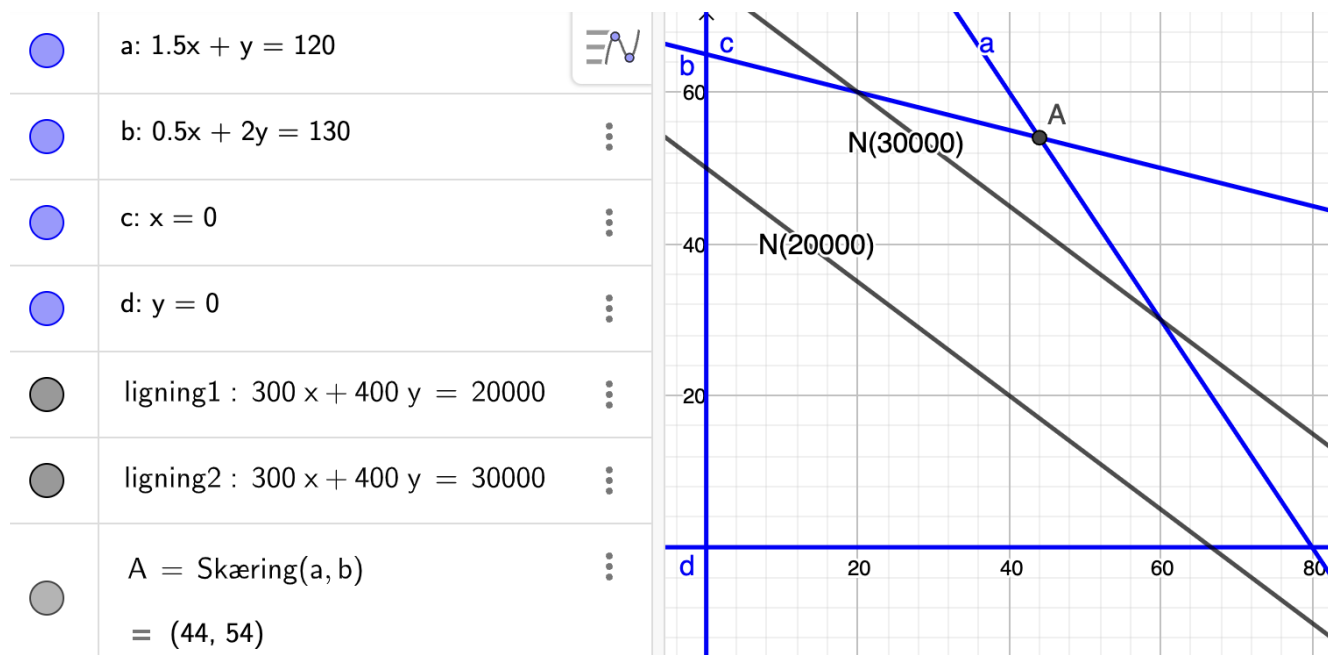
Vi ser at $N(30000)$ fås ved at parallelforskyde $N(20000)$ skråt op til højre. Vi får altså et højere dækningsbidrag (hvilket er det vi ønsker) når vi parallelforsker skråt op til højre. Vi forestiller os nu at vi bliver ved med at forskyde $N(20000)$ skråt op til højre. På et tidspunkt kommer linjen helt fri af polygonområdet. Det sidste punkt den slipper inden den forlader polygonområdet er det optimale punkt. Det er klart, at der må være tale om dette her hjørnepunkt i polygonområdet:



Hvis du undrer dig over, hvor jeg fik 20000 og 30000 fra, så er svaret, at jeg prøvede mig frem, indtil jeg fandt to linjer, som lå pænt (adskilt) i polygonområdet.

Bestemmelse af det optimale punkt

Nu skal vi bare bestemme koordinaterne til det punkt, vi har fundet. Det gør vi ved at ændre ulighedstegnene til lighedstegn, og bruge skæringsværktøjet på det punkt, vi har identificeret:



Vi ser at skæringspunktet er (44, 54). Det betyder, at vi skal producere 44 trøjer og 54 bukser for at få det maksimale dækningsbidrag. Det maksimale dækningsbidrag finder vi ved at sætte punktet ind i f :

$$f(44, 54) = 300 \cdot 44 + 400 \cdot 54 = 34800$$

Vi konkluderer, at det optimale dækningsbidrag er 34800 kr.

Metoden virker måske lidt mere abstrakt end hjørneinspektion, men niveaulinjer er en essentiel del af lineær programmering som det forventes, at man har styr på. Man kan altså ikke vælge at sige ”Jeg holder mig til hjørneinspektion”. Derudover er en god forståelse af niveaulinjer en forudsætning for at kunne mestre følsomhedsanalyse (Mat-A) og kvadratisk programmering (Mat-A).

Øvelse 9.2.1

En virksomhed producerer to produkter: Produkt A og PRODUKT B.

Til PRODUKT A skal der bruges 2 arbejdstimer og 5 kg råmateriale, mens PRODUKT B kræver 4 arbejdstimer og 1 kg råmateriale.

Virksomheden har 100 arbejdstimer til rådighed og 70 kg råmateriale.

Dækningsbidraget for PRODUKT A er 10 kr. pr. enhed mens dækningsbidraget for PRODUKT B er 8 kr. pr. enhed.

Virksomheden vil gerne optimere dækningsbidraget.

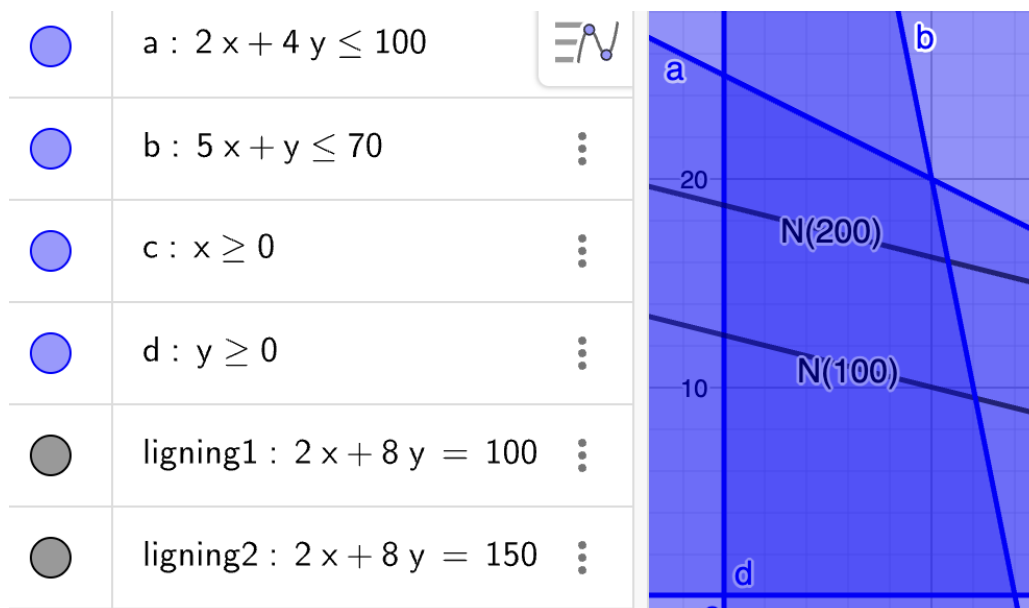
- Lav skema for oplysningerne, definer x og y , opskriv en forskrift for kriteriefunktionen og tegn polygonområdet i GeoGebra. Det er samme opgave som fra sidste afsnit, så du kan bruge det du lavede der, hvis du stadig har det.
- Tegn to passende niveaulinjer. Dvs. du skal prøve dig lidt frem indtil du finder nogle niveaulinjer som ligger pænt i polygonområdet.
- Bestem i hvilken retning dækningsbidraget vokser.
- Identificer det optimale punkt (du skal ikke beregne det endnu). Argumenter for dit resultat.
- Regn koordinaterne til det punkt du har identificeret som det optimale. Brug f.eks. skæringsværktøjet. Det er ikke nok at aflæse.
- Bestem, hvor mange PRODUKT A og hvor mange PRODUKT B virksomheden skal lave, og beregn det maksimale dækningsbidrag.

Eksempel 9.2.1

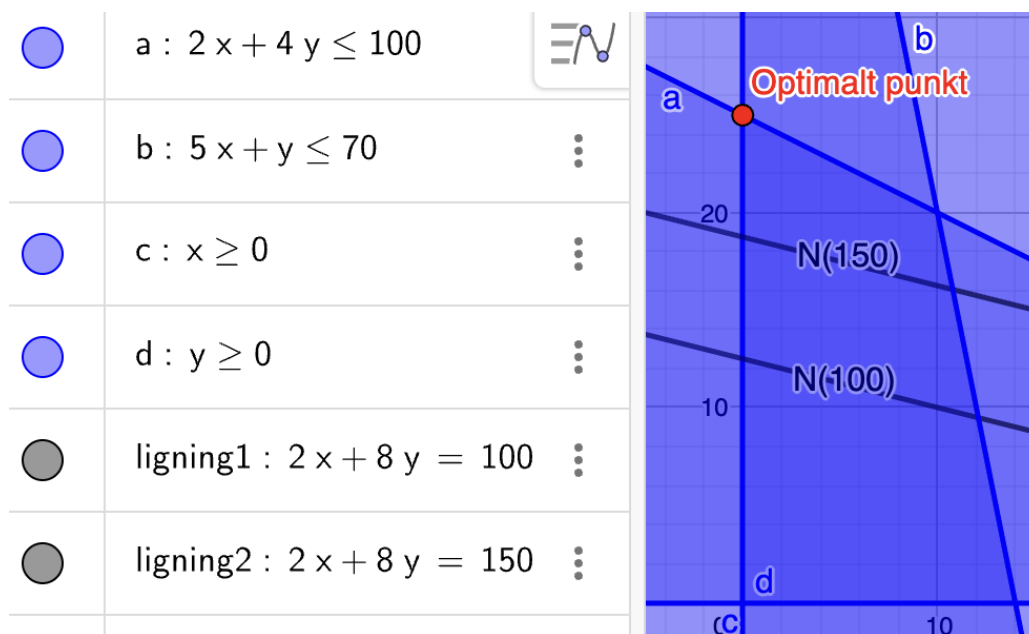
Med udgangspunkt i virksomheden fra øvelsen ovenover forstiller vi os nu at dækningsbidraget for PRODUKT A falder til til 2 kr. pr. stk. Det giver følgende ændringer i kriteriefunktionen:

$$f(x, y) = 2x + 8y$$

Vi tegner $N(100)$ og $N(150)$:



Vi ser at niveauerne stadig vokser skråt op til højre (mere op end til højre denne gang), og vi ser at det sidste punkt niveaulinjerne slipper være:



Aha! et nyt optimalt punkt! Punktets koordinater findes på sædvanligvis ved at ændre ulighedstegn til lighedstegn og bruge skæringsværktøjet.. Det optimale punkt bliver således (0, 25). Vi konkludere at dækningsbidraget for PRODUKT A er blevet så lavt, at det ikke længere kan betale sig at producere PRODUKT A. Det maksimale dækningsbidrag regnes ved:

$$f(0, 25) = 2 \cdot 0 + 8 \cdot 25 = 200$$

Altså er det optimale dækningsbidrag 200 kr. ved en produktion af 25 PRODUKT B.

Øvelse 9.2.2

Vi bliver ved virksomheden fra eksemplet oven over. Bestem vha. niveaulinjer det optimale punkt når:

- a) Dækningsbidraget for PRODUKT A er 10 kr. pr. stk. og dækningsbidraget for PRODUKT B er 5 kr. pr. stk.
- b) Dækningsbidraget for PRODUKT A er 30 kr. pr. stk. og dækningsbidraget for PRODUKT B er 2 kr. pr. stk.
- c) Dækningsbidraget for PRODUKT A er 4 kr. pr. stk. og dækningsbidraget for PRODUKT B er 16 kr. pr. stk.

Eksempel 9.2.2

Vi vil minimere funktionen $f(x, y) = 3x + 2y$ underlagt betingelserne:

$$2x + y \geq 10$$

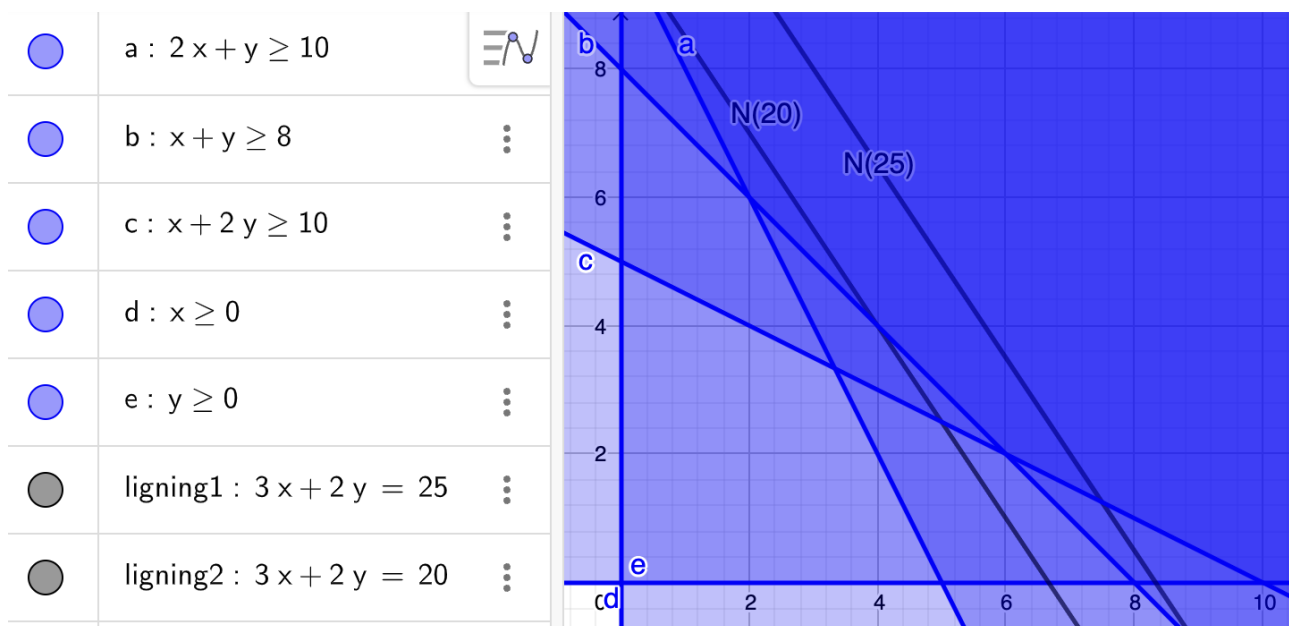
$$x + y \geq 8$$

$$x + 2y \geq 10$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 1$$

Vi tegner polygonområdet i GeoGebra og niveaulinjerne $N(20)$ og $N(25)$



Vi ser at niveauerne vokser skråt op til højre. Vi er interesserede i minimum så vi skal altså forskyde niveaulinjerne i modsat retning – altså skråt ned til venstre.

Vi ser at niveaulinjerne slipper polygonområdet i punktet $(2, 6)$ (vi tjekker at det er de eksakte koordinater ved at bruge skæringsværktøjet efter at vi har ændret ulighedstegn til lighedstegn). Vi regner funktionsværdien i punktet:

$$f(2, 6) = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 18$$

Vi konkluderer at funktionen har minimum i $(2, 6)$ og minimumsværdien er 18.

Øvelse 9.2.3

En elev vil sælge slikposer i kantinen. Hun reklamerer med:

Billige slikposer. Kom og køb. Du får miniskumbananer og/eller piratos. Mindst 20 stykker slik i hver pose. Mindst 120g i posen!

En miniskumbanan vejer 9 gram og en piratos vejer 4 gram.

Eleven kan indkøbe miniskumbananer til 2 kr. pr. stk. og piratos til 50 øre pr. stk.

Eleven vil gerne minimere sine omkostninger.

- Lav et skema med oplysningerne i opgaven.
- Definer x og y .
- Opskriv en funktion som udtrykker elevens omkostninger pr. slikpose.
- Bestem vha. niveaulinjemetoden, hvad eleven skal putte i poserne og bestem den samlede udgift pr. pose.
- Pludselig falder prisen på miniskumbananer til 0,75 kr. stk.. Hvad skal hun nu putte i poserne for at minimere sine udgifter. Brug igen niveaulinjer til at svare på spørgsmålet.

9.3 Teori for lineær programmering

Vi skal nu se på den underliggende teori for lineær programmering. Det første vi får brug for at indføre er lineære funktioner i to variable

Lineære funktioner i to variable

Indtil vi startede dette kapitel var en funktion noget som lavede x -værdier om til y -værdier. Dette kaldes også en *funktion i én variabel*. En funktion i to variable er noget som laver talpar x, y om til z -værdier (vi kan ikke længere kalde funktions-

værdierne for y -værdier fordi det bogstav har vi allerede brugt). Der er altså to uafhængige variable (x og y) og én afhængig variable (z).

Eksempel 9.3.1

Funktionen med forskriften $f(x, y) = 2x + 6y - 10$ er en funktion i to variable fordi den afhænger af to variable x og y .

Definition 9.3.1

En lineær funktion i to variable er en funktion på formen

$$f(x, y) = ax + by + c$$

Vi ser at definitionen minder om definitionen for sædvanlige lineære funktioner, bortset fra at y indgår på samme måde som x i stedet for at betegne funktionsværdien (som her altså betegnes med z).

Eksempel 9.3.2

Funktionen med forskriften $f(x, y) = 2x + 6y + 10$ er en lineær funktion i to variable fordi den har formen

$$f(x, y) = ax + by + c$$

Øvelse 9.3.1

Du skal nu kigge på nogle forskrifter for nogle funktioner. Du skal afgøre om der er tale om en:

1. Funktion i to variable
2. Lineære funktion i to variable

Her er forskrifterne:

- a) $f(x) = 2x + 3$
- b) $f(x, y) = 2x + 3y$
- c) $f(x, y) = -2x + 3y - 2$
- d) $f(x, y) = x^2 + y^2$

Øvelse 9.3.2

Lad $f(x, y) = x - y$

- a) Bestem $f(2, 3)$

Polygonområdet

Man kan tænke på polygonområdet som definitionsområdet for kriteriefunktionen. Vi husker at definitionsområdet for en almindelig funktion består af alle de x 'er man kan sætte ind i funktionen. Her har vi en funktion i to variable, og derfor skal vi kigge på punkter i stedet for x 'er. Kriteriefunktionen kan rent matematisk regnes for alle punkter, men kun dem indenfor polygonområdet beskriver noget, som kan lade sig gøre i den praktiske situation, og derfor får kriteriefunktionen polygonområdet som definitionsområde.

Eksempel 9.3.3

Lad et polygonområde være givet ved ulighederne:

$$2x - y \leq 5$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Skal vi tjekke om $(2, 3)$ ligger i polygonområdet skal vi indsætte punktet i ulighederne og se om de er opfyldt:

$$2 \cdot 2 - 3 \leq 5$$

$$2 \geq 0$$

$$3 \geq 0$$

Alle uligheder opfyldte så punktet ligger i polygonområdet.

Øvelse 9.3.3

Med udgangspunkt i eksemplet oven over.

- a) Undersøg om punktet $(9, 3)$ ligger i polygonområdet.
- b) Antag at x og y står for et antal producerede varer (hhv. VARE A og VARE B). Forklare hvad dit resultat i spørgsmål a) betyder i den sammenhæng.

Niveaulinjer

Normalt bruger vi grafer til at give et grafisk billede af en funktion. Man kan også tegne grafer for funktioner i to variable, men det er lidt sværere at have med at gøre, og derfor har jeg placeret det i ekstraafsnittet nederst. I stedet for grafer bruger vi det som hedder niveaukurver:

Definition 9.3.2

Lad f være en funktion i to variable og lad t være et tal. *Niveaukurven* $N(t)$ er figuren givet ved ligningen:

$$f(x, y) = t$$

Som vi senere vil bevise, er niveaukurverne i lineær programmering altid linjer, og derfor kaldes de "niveaulinjer". Vi ser af definitionen at niveaukurven $N(t)$ består af alle de punkter (x, y) som har en funktionsværdi på t .

Eksempel 9.3.4

Lad $f(x, y) = 2x + y$.

Niveaulinjen $N(7)$ er givet ved ligningen $2x + y = 7$.

Punktet $(1, 5)$ ligger på niveaukurven $N(7)$ fordi

$$f(1, 5) = 2 \cdot 1 + 5 = 7$$

Punktet $(3, 4)$ ligger ikke på niveaukurven $N(5)$ fordi

$$f(3, 4) = 2 \cdot 3 + 4 = 10 \neq 5$$

Øvelse 9.3.4

Lad $f(x, y) = 2x + 4y + 1$

- Opstil ligningen for $N(0)$
- Undersøg om punktet $(3, 2)$ ligger på $N(15)$
- Antag at et punkt (x_0, y_0) ligger på $N(95)$. Bestem funktionsværdien $f(x_0, y_0)$.

At niveaukurverne altid er linjer, når vi har en lineær funktion i to variable, er udtrykt i følgende sætning:

Sætning 9.3.1

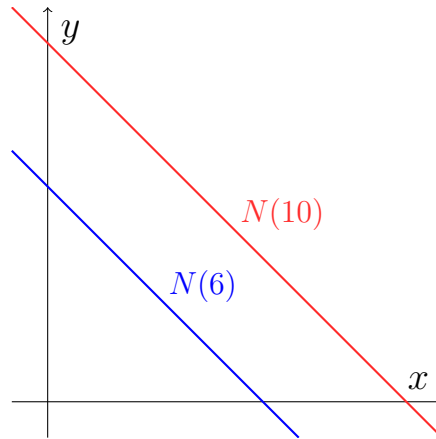
Lad $f(x, y) = ax + by + c$, antag at $b \neq 0$ og lad t være et tal. Da er niveaukurven $N(t)$ en linje med forskriften:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{t - c}{b}$$

Ændres t vil linjen parallelforskydes i lodret retning. Der gælder:

- Hvis b er positiv vil en højere t -værdi forskyde linjen op.
- Hvis b er negativ vil en højere t -værdi forskyde linjen ned.

Man kan undrer sig over at sætningen nævner en "lodret forskydning". Var det ikke en skrå forskydning, vi så i de to første afsnit? Lad os se på et simpelt eksempel.



Jeg kan se at $N(10)$ er en parallelforskydning af $N(6)$, men i hvilken retning. Med den logik vi har brugt indtil videre ville vi sige skråt op til højre. Men kan også se det som en lodret forskydning op. Husk på at linjerne er uendeligt lange, så det er klart at hvis vi forskyder $N(6)$ lodret op, så vil den komme til at ligge oven i $N(10)$ til på et tidspunkt.

Sætning 9.3.1 garanterer, at niveaulinjerne opfører sig på en systematisk måde. Vi kan se at der er to muligheder. Om det er den ene eller anden situation vi er i, kan vi afgøre ved at kigge på b ellers kan vi (som vi har gjort indtil videre) tegne 2 niveaulinjer, og så garanterer sætningen at mønsteret kan generaliseres til hele polygonområdet.

Ekstra

Vi vil nu vise hvordan man ”tegner” grafen for en funktion i to variable. Vi vil tage udgangspunkt i funktionen

$$f(x, y) = 0,2x + 0,6y + 10$$

Fordi vi har tre variable (2 uafhængige og 1 afhængig) har vi brug for et koordinatsystem med tre akser. Vi får altså en 3d graf.

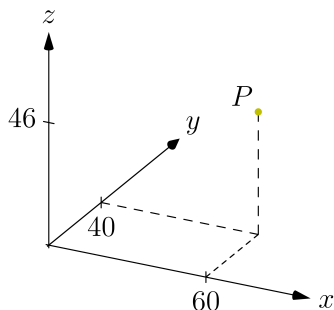
Vi tegner grafen ved at lave et sildeben. Vi skal således vælge et x og et y , regne $f(x, y)$ og tegne punktet $(x, y, f(x, y))$ ind. Det svarer helt til det metoden for funktioner i én variable. Lad os vælge punktet $(60, 40)$. Vi skal sætte ind forskriften $f(x, y) = 0,2x + 0,6y + 10$:

$$f(60, 40) = 0,2 \cdot 60 + 0,6 \cdot 40 + 10 = 46$$

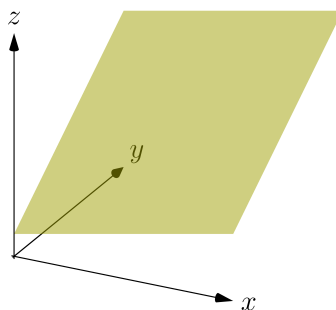
Det giver os vores første punkt i sildebenet:

x	60
y	40
$f(x, y)$	46

Regner vi flere punkter til sildebenet kan grafen konstrueres:

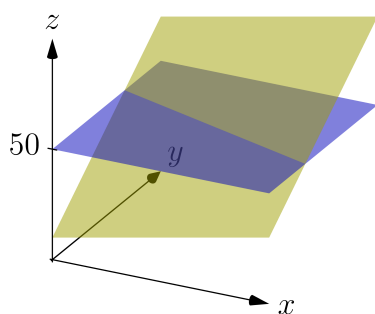


Første punkt tegnes ind.

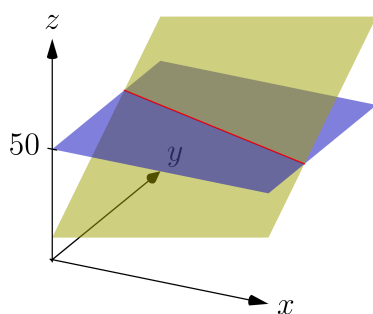


Vi regner flere punkter i sildebenet og tegner dem ind. Grafen fremkommer når vi tegner rigtig mange punkter.

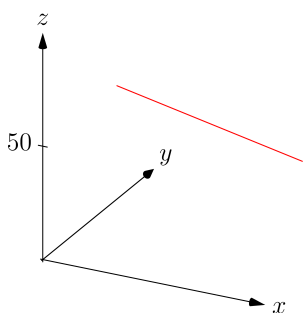
Vi ser at grafen for funktionen f er en skrå plan (en flade) i 3 dimensioner. Du skal forstille dig den er uendeligt stor, jeg har bare tegnet et udsnit. Ud fra grafen kan vi også forklare, hvordan niveaulinjerne opstår. Vi vil nu bestemme $N(50)$:



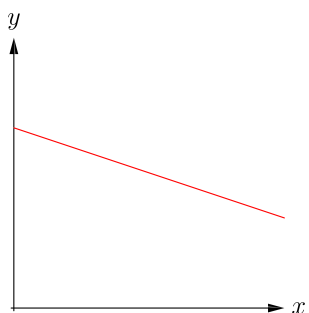
Vi skal bestemme $N(50)$. Den består af alle de punkter som har en funktionsværdi på 50. så derfor tegnes en vandret flade ind i koordinatsystem med en højde på 50.



Der hvor fladen skærer grafen for f , må være der hvor f har værdier 50. Så vi har tegnet en kurve, som følger skæringen mellem f og fladen. Dette er niveaulinjen $N(50)$.



Nu fjernes alt undtagen niveaukurven.



Koordinatsystemet drejes nu, så man ser det fra oven (som om vi står på toppen af z-aksen og kigger ned). Tadaaaaa! en helt normal niveaulinje.

9.4 Lineær programmering uden computer

Vi har gjort brug af GeoGebra til at regne opgaverne, men det er nemt at regne dem uden GeoGebra. Det tager bare lidt længere tid.

Vi vender tilbage til det første eksempel i første afsnit og regner det nu uden computer:

En tøjproducent producerer trøjer og bukser.

Producenten har 120 m^2 bomuld og 130 m^2 polyester på lager.

Der går $1,5 \text{ m}^2$ bomuld og $0,5 \text{ m}^2$ polyester til en trøje.

Der går 1 m^2 bomuld og 2 m^2 polyester til et par et par bukser.

Dækningsbidraget er 300 kr. for en trøje og 400 kr. for et par bukser.

Hvor mange trøjer og hvor mange bukser skal der produceres få det størst mulige samlede dækningsbidrag? Hvad bliver det maksimale dækningsbidrag?

Opstilling af skema

	Trøjer	Bukser	Til rådighed
Bomuld	1,5 m ²	1 m ²	120 m ²
Polyester	0,5 m ²	2 m ²	130 m ²
Dækningsbidrag	300 kr.	400 kr.	

Kriteriefunktionen

Vi sætter

x = Antal producerede trøjer

y = Antal producerede bukser

Dækningsbidraget må dermed være givet ved:

$$f(x, y) = 300x + 400y$$

Polygonområde

Ud fra skemaet ses at

$$1,5x + y \leq 120$$

For polyester må der gælde:

$$0,5x + 2y \leq 130$$

Da vi ikke kan producere et negativt antal trøjer eller bukser har vi:

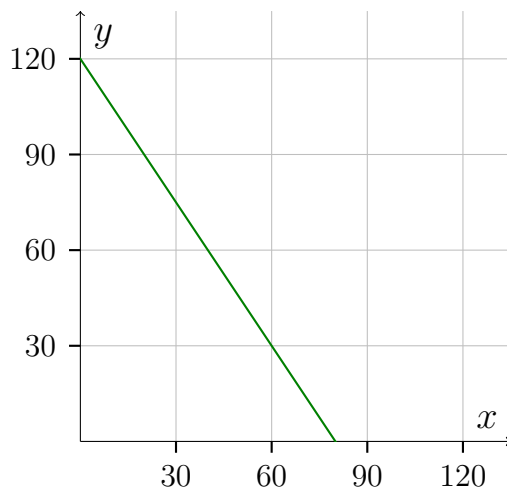
$$x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0$$

Vi skal tegne polygonområdet, men denne gang med papir og blyant. Vi starter med den første ulighed og isolerer y :

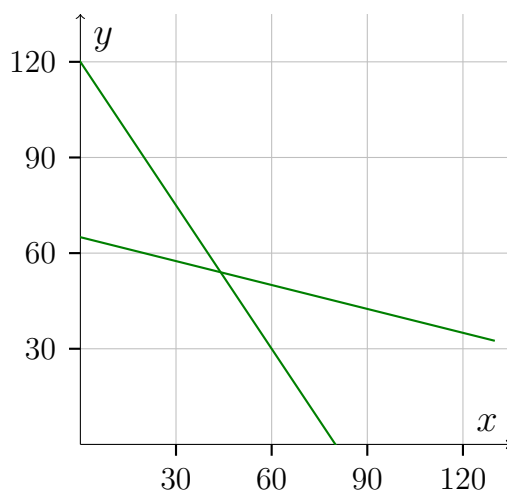
$$1,5x + y \leq 120$$

$$y \leq -1,5x + 120$$

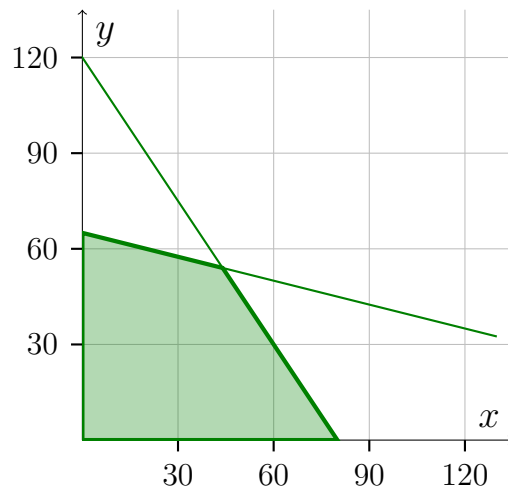
Vi kan nu tegne uligheden. I første omgang lader vi som om, der står et lighedstegn i stedet for ulighedstegnet. Vi kan så tegne linjen ud fra hældning $(-1,5)$ og skæringspunkt med y -aksen (120) :



Vi isolerer y i den næste ulighed, hvilket giver $y \leq -0,25x + 65$, og tegner den ind:



Nu husker vi at der stod $y \leq \dots$ i begge de to uligheder. Det betyder at vi er begrænset til de punkter som ligger under linjerne (de må godt ligge på en linje, men ikke over en linje). Vi husker også ulighederne $x \geq 0$ og $y \geq 0$, hvilket betyder at vi er begrænset til punkter, som har ikke-negative koordinater. Det giver os et område vi kan farve blå:



Niveaulinjer

Vi skal nu tegne niveaulinjer. Det er den mest problematiske del fordi det kræver, at man prøver sig lidt frem før man finder nogle gode linjer.

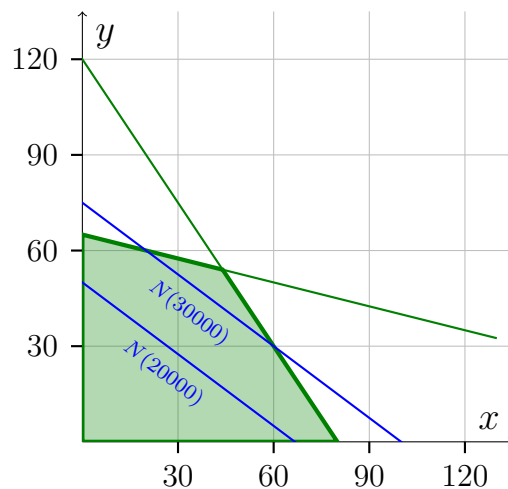
Vi vil nu tegne $N(20000)$ og $N(30000)$. For at finde dem skal vi sætte $f(x, y) = 20000$ og $f(x, y) = 30000$. Det giver:

$$300x + 400y = 20000 \quad \text{og} \quad 300x + 400y = 30000$$

Isolerer vi y i disse ligninger fås

$$y = -0,75x + 50 \quad \text{og} \quad y = -0,75x + 75$$

Disse to linjer kan vi nu tegne ind:



Ud fra niveaulinjerne ses det at niveauerne vokser skråt op til højre, og at det optimale punkt således ligger i skæringspunktet mellem de to røde begrænsningslinjer.

Bestemmelse af det optimale punkt

Nu skal vi bare bestemme koordinaterne til det punkt vi har fundet. Vi har allerede isoleret y i de to røde begrænsningslinjer og vi fik (når man erstatter ulighedstegn med lighedstegn):

$$y = -1,5x + 120 \quad \text{og} \quad y = -0,25x + 65$$

Vi regner nu skæringspunktet ved at sætte de to funktionsudtryk lig hinanden.

$$-1,5x + 120 = -0,25x + 65$$

Løser vi den ligning får vi $x = 44$. Vi kan nu regne y -værdien ved at sætte 44 ind i en af de to forskrifter for begrænsningslinjerne:

$$y = -1,5 \cdot 44 + 120 = 54$$

Skæringspunktet er altså $(44, 54)$. Det betyder at vi skal producere 44 trøjer og 54 bukser for at få det maksimale dækningsbidrag. Det maksimale dækningsbidrag finder vi ved at sætte punktets koordinater ind i f :

$$f(44, 54) = 300 \cdot 44 + 400 \cdot 54 = 34800$$

Vi konkluderer, at det optimale dækningsbidrag er 34800 kr.

Øvelse 9.4.1

En elev vil sælge slikposer i kantinen. Hun reklamerer med:

Billige slikposer. Kom og køb. Du får miniskumbananer og/eller piratos. Mindst 20 stykker slik i hver pose. Mindst 120 g i posen!

En miniskumbanan vejer 9 gram og en piratos vejer 4 gram.

Eleven kan indkøbe miniskumbananer til 2 kr. pr. stk. og piratos til 50 øre pr. stk.

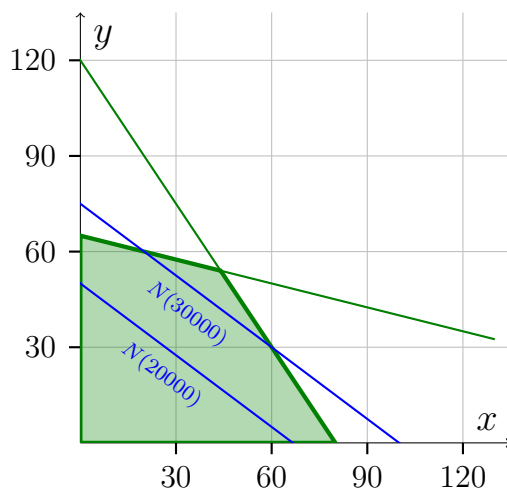
Eleven vil gerne minimere sine omkostninger.

- Bestem (uden GeoGebra), hvad eleven skal putte i poserne og bestem den samlede udgift pr. pose.
- Pludselig falder prisen på miniskumbananer til 0,75 kr. stk. Hvad skal hun nu putte i poserne og hvad vil det koste hende? GeoGebra er stadig haram.
- Prisen på miniskumbananer falder nu yderligere til 0,25 kr. stk. Hvad skal hun nu putte i poserne og hvad vil det koste hende? GeoGebra er stadig haram.

9.5 Følsomhedsanalyse (A)

Vi har tidligere set at hvis der sker tilstrækkelige store ændringer i kriteriefunktionen, så vil vi få et nyt optimalt punkt. Følsomhedsanalyse går ud på at undersøge, hvor store ændringerne må være, før vi får et nyt optimalt punkt.

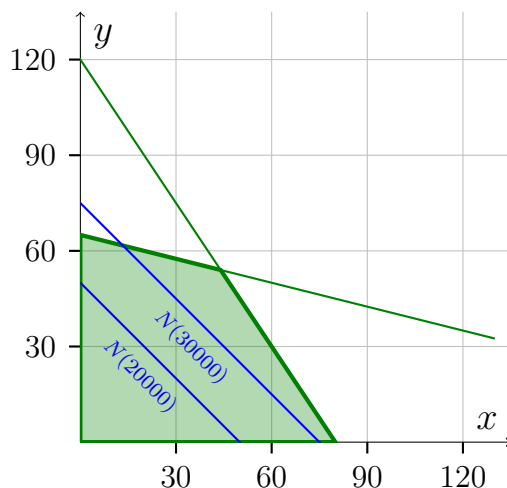
Vi tager udgangspunkt i eksemplet med trøjer og bukser fra sidste afsnit (lineær programmering uden computer). Hvis dette afsnit ikke er friskt i hukommelsen, så læs (regn) det igen. I afsnittet fandt vi ud af at det mest optimale var at producere 44 trøjer og 54 bukser. Punktet fandt vi som skæringspunkt mellem de to røde begrænsningslinjer:



Lad os nu sige at dækningsbidraget for trøjer stiger til 400 kr. pr. stk., mens at dækningsbidraget for bukser er uændret. Det giver os kriteriefunktionen:

$$f(x, y) = 400x + 400y$$

Tegner vi $N(20000)$ og $N(30000)$ ser de nu således ud



Vi kan se at niveaulinjerne er blevet stejlere. Vi kan også se at det optimale punkt er uændret, men hvis dækningsbidraget for trøjer bliver ved med at stige, vil niveaulinjerne på et tidspunkt blive så stejle, at det optimale punkt rykker til det nedre højre hjørne i polygonområdet. Begynder dækningsbidraget for trøjer pludseligt at falde meget, vil niveaulinjerne omvendt flade ud, og vi kan risikere at det optimale punkt rykker op i det øvre venstre hjørne.

Vi vil nu regne ud hvor meget dækningsbidraget for trøjer kan ændre sig, før at vi får et nyt optimalt punkt. Vi husker sætning 9.3.1 som sagde at niveaulinjerne for $f(x, y) = ax + by + c$ er givet ved ligningen:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{t - c}{b}$$

Niveaulinjerne har altså en hældning på $-\frac{a}{b}$. Vi husker kriteriefunktionen var

$$f(x, y) = 300x + 400y$$

så $a = 300$ og $b = 400$. Da vi vil undersøge hvor meget dækningsbidraget for trøjer kan ændre sig vil vi regne med a som ubekendt. Niveaulinjerne får på den måde hældningen $-\frac{a}{400}$. Denne hældning skal ligge imellem hældningen for de to omkringliggende begrænsninger, hvis det optimale punkt skal være uændret. Vi husker (fra sidste afsnit), at de to røde begrænsningslinjer har forskrifterne:

$$y = -1,5x + 120 \quad \text{og} \quad y = -0,25x + 65$$

Så hældningerne for begrænsningslinjerne er hhv. $-1,5$ og $-0,25$. Niveaulinjens hældning ($-\frac{a}{400}$) skulle ligge mellem de to, så vi får dobbeltuligheden:

$$-1,5 \leq -\frac{a}{400} \leq -0,25$$

Vi ganger dobbeltuligheden igennem med -400 . Vi husker at vende ulighedstegn fordi vi ganger med et negativt tal. Vi får:

$$600 \geq a \geq 100$$

Vi konkluderer at dækningsbidraget for trøjer kan falde ned til 100 kr. pr. trøje og stige op til 600 kr. pr. trøje uden at vi får et nyt optimalt punkt.

Vi kan også undersøge hvor meget dækningsbidraget for bukser kan ændre sig uden at vi får et nyt optimalt punkt. Det gøres på helt tilsvarende måde. Denne gang er det b som er ubekendt og niveaulinjerne vil altså have en hældning på $-\frac{300}{b}$. Vi kan så, helt som før, opstille dobbeltuligheden:

$$-1,5 \leq -\frac{300}{b} \leq -0,25$$

Vi ganger igennem med $-b$ og husker at vende ulighedstegnet (vi forudsætter at b er positivt her, så $-b$ er et negativt tal).

$$1,5b \geq 300 \geq 0,25b$$

Vi løser nu dobbeltuligheden ved at dele den op i to uligheder:

$$1,5b \geq 300 \quad \text{og} \quad 300 \geq 0,25b$$

Disse to uligheder er nemme at løse, og vi får

$$b \geq 200 \quad \text{og} \quad b \leq 1200$$

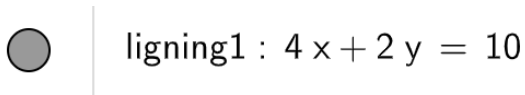
Dækningsbidraget for bukser kan altså bevæge sig mellem 200 kr. pr. buks til 1200 kr. pr. buks, uden at vi får et nyt optimalt punkt.

GeoGebra-tricket

Følsomhedsanalyse kræver, at vi har hældningerne på de omkringliggende begrænsningslinjer. Derfor skal vi have begrænsningerne på formen $y = \dots$. Vi kan bruge GeoGebra til at omskrive begrænsningerne:

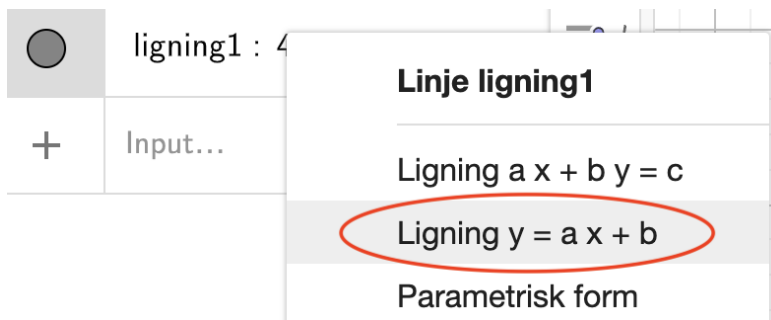
Eksempel 9.5.1

Antag at vi har en begrænsning givet ved $4x + 2y \leq 10$. Vi taster uligheden ind (men som ligning) i GeoGebra:

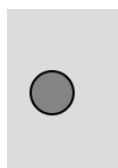


A screenshot of the GeoGebra input field. On the left is a grey circle icon. To its right is a vertical line separator. To the right of the separator is the text "ligning1 : 4 x + 2 y = 10".

Vi højreklikker på linjen og vælger $y = ax + b$:



Vi kan nu aflæse forskriften:



$$\text{likning1 : } 4x + 2y = 10$$

$$= y = -2x + 5$$

Begrænsningslinjen har altså ligningen $y = -2x + 5$ og begrænsningen er dermed $y \leq -2x + 5$.

Øvelse 9.5.1

En virksomhed producerer to produkter OMEGALUL og KEKW. Produktionen er underlagt begrænsningerne:

$$4x + y \leq 32$$

$$2x + y \leq 18$$

$$x + y \leq 12$$

$$0 \leq y \leq 8$$

$$x \geq 0$$

Dækningsbidraget for OMEGALUL er 30 kr. pr. stk. og dækningsbidraget for KEKW er 20 kr. pr. stk.

- Hvor mange af hvert produkt skal der produceres for at maksimere dækningsbidraget?
- Hvad skal dækningsbidraget for OMEGALUL ligge imellem, hvis den optimale produktion skal være uændret?
- Hvor meget kan dækningsbidraget for OMEGALUL stige/falde, hvis den optimale produktion skal være uændret?
- Hvor meget kan dækningsbidraget for KEKW stige/falde, hvis den optimale produktion skal være uændret?

Øvelse 9.5.2

En elev vil sælge slikposer i kantinen. Hun reklamerer med:

Billige slikposer. Kom og køb. Du får miniskumbananer og/eller piratos. Mindst 20 stykker slik i hver pose. Mindst 120g i posen!

En miniskumbanan vejer 9 gram og en piratos vejer 4 gram.

Eleven kan indkøbe miniskumbananer til 2 kr. pr. stk. og piratos til 50 øre pr. stk.

Eleven vil gerne minimere sine omkostninger.

- Bestem, hvad eleven skal putte i poserne, hvis hun vil minimere udgiften pr. pose.
- Hvor meget må prisen på skumbananer ændre sig, hvis det optimale indhold i poserne skal forblive det du regnede ud i punkt a)?
- Hvor meget må prisen på piratos ændre sig, hvis det optimale indhold i poserne skal forblive det du regnede ud i punkt a)?

9.6 Beviser til lineær programmering

Sætning 9.3.1

Lad $f(x, y) = ax + by + c$, antag at $b \neq 0$ og lad t være et tal. Da er niveaukurven $N(t)$ en linje med forskriften:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{t - c}{b}$$

Ændres t vil linjen parallelforskydes i lodret regning. Der gælder:

- Hvis b er positiv vil en højere t -værdi forskyde linjen op.
- Hvis b er negativ vil en højere t -værdi forskyde linjen ned.

Bevis

Niveaukurven $N(t)$ er givet ved ligningen

$$f(x, y) = t$$

Vi indsætter forskriften for f

$$ax + by + c = t$$

Vi trækker ax og c fra på begge sider

$$by = t - ax - c$$

Vi omskriver højresiden

$$by = -ax + t - c$$

Nu divideres med b på begge sider (og det går godt fordi vi har antaget at $b \neq 0$)

.

$$y = \frac{-ax + t - c}{b}$$

Vi deler brøken op:

$$y = \frac{-ax}{b} + \frac{t - c}{b}$$

Vi omskriver første brøk:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{t - c}{b}$$

Vi ser at niveaukurven har form som en lineær funktion med hældningen $-\frac{a}{b}$. Hældningen ikke af t , og niveaulinjerne må derfor være parallelle.

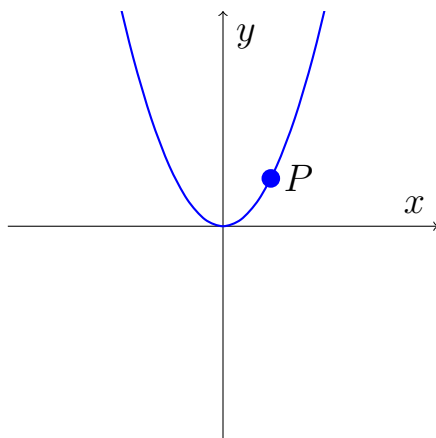
Vi ser, at niveaulinjerne skærer y -aksen i $\frac{t-c}{b}$. Her vil tælleren blive større, hvis t bliver større. Hvis $b > 0$ må det betyde, at hele brøken bliver større og linjen vil dermed blive forskudt op ad. Hvis $b < 0$ vil brøken blive mindre når tælleren er bliver større, og derfor vil linjen blive forskudt nedad, når t bliver større.

Kapitel 10

Differentialregning

Differentialregning handler om funktioners vækst. Altså hvor meget en funktion vokser eller aftager forskellige steder på grafen.

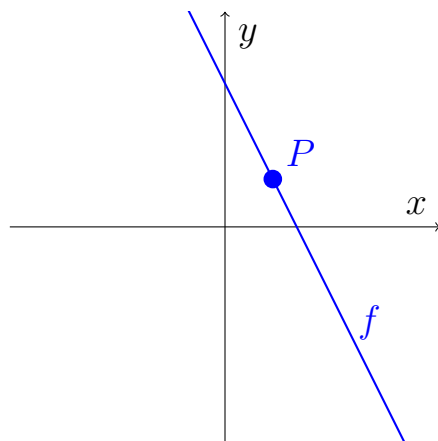
Lad os se på et eksempel. Nedenunder ses grafen for en funktion, og på grafen er der afsat et punkt P .



Funktionen er tydeligvis voksende omkring punktet P , men kan man mon sætte et tal på hvor stor væksten er i selve punktet? Svaret er ja, og i dette kapitel skal vi lære hvordan.

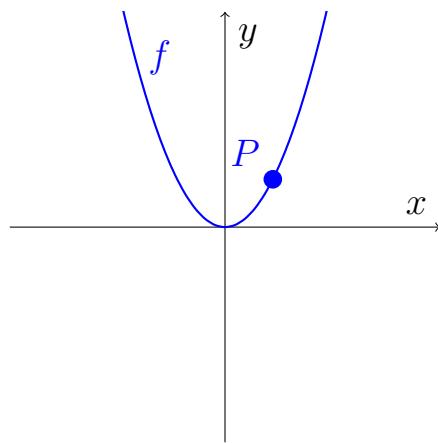
10.1 Grafisk bestemmelse af differentialkvotienter

Differentialregning handler om, hvor meget en funktion vokser eller aftager i et bestemt punkt på grafen. Lad os først se på en lineær funktion med forskriften $f(x) = -2x + 3$ og et punkt på grafen P :

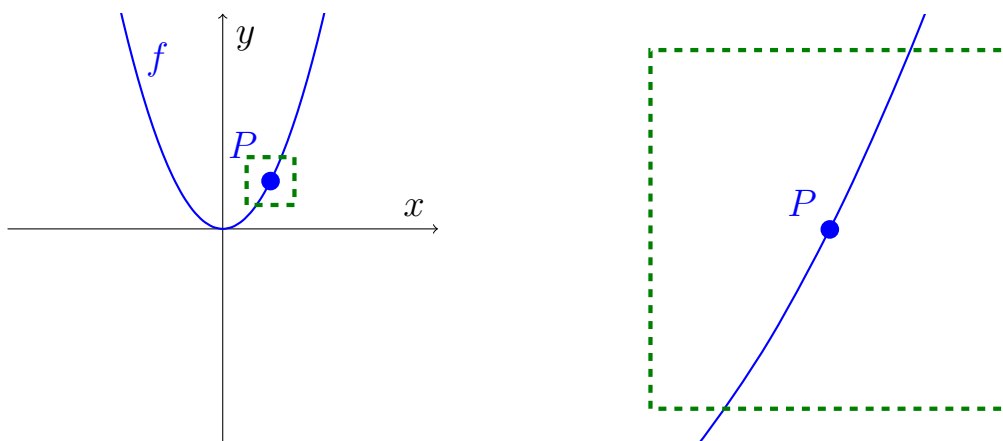


Vi vil gerne finde væksten i P . Det er nemt, da funktionen er lineær og væksten derfor er konstant overalt på grafen. Vi ved at væksten på en lineær funktion beskrives med hældningen, og derfor kan vi sige at væksten på denne funktion er -2 , da den har hældningen -2 .

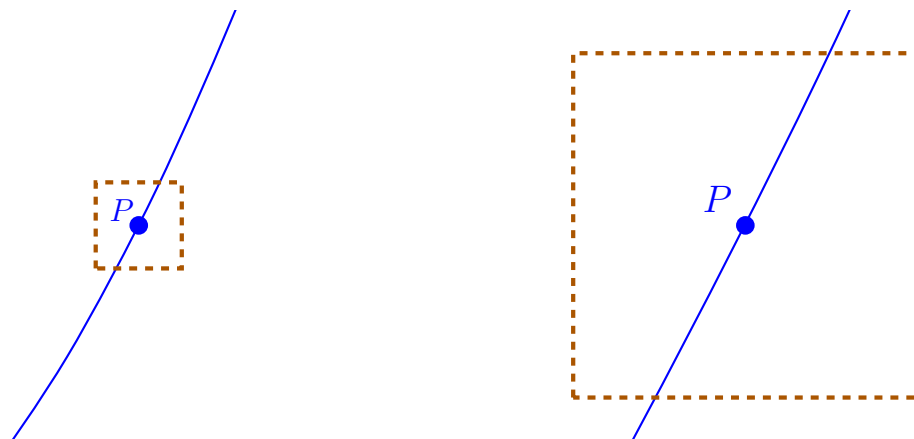
Vi ser nu på en funktion, som ikke er lineær, nemlig funktionen $f(x) = x^2$.



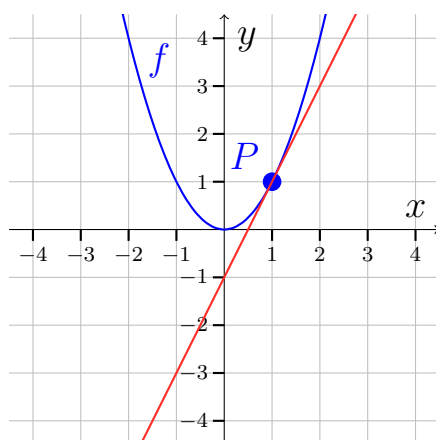
Da funktionen ikke er lineær, har den ingen fast hældning og væksten afhænger af, hvor vi er på grafen. Vi ser at grafen starter med at falde meget og får så større og større vækst. Hvis vi zoomer in sker der dog noget spændende. Lad os zoome ind på P :



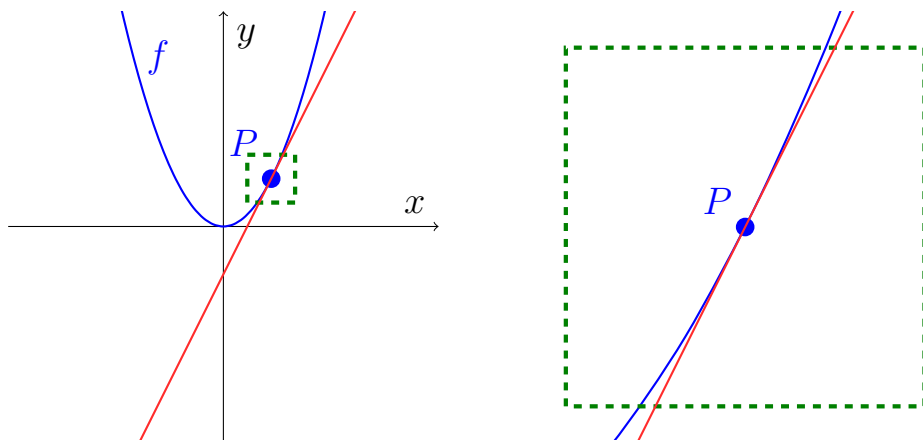
Vi ser at Funktionen er næsten lineær når vi er tæt på p . Zoomer vi endnu mere ligner grafen for f fuldstændigt en lineær funktion:



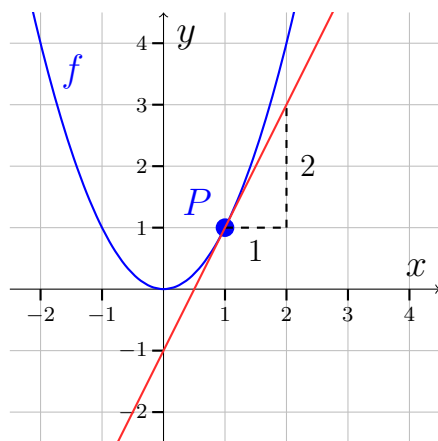
Så når vi er tæt på P , så ligner grafen altså en lineær funktion og denne lineære funktion kaldes *tangenten* i punktet P . Dens hældning er udtryk for grafens øjeblikkelige vækst i punktet P og kaldes *differentialkvotienten* i P . Jeg skriver "øjeblikkelige" fordi væksten jo ændrer sig i det øjeblik vi bevæger os væk fra P . I praksis kan vi tegne tangenten ved at tegne en lineær funktion som ligger "op ad" grafen som vist her:



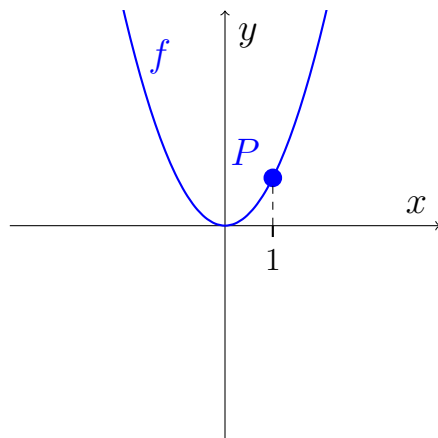
Lad os prøve at zoome for at tjekke om vores tangent har den ønskede egenskab:



Vi kan se at når vi kommer tæt på punktet P , så er det svært at se forskel på grafen og tangenten — det betyder at vi har tegnet tangenten rigtigt. Vi aflæser nu hældningen på tangenten:



Differentialkvotienten afhænger af, hvilket punkt vi betragter. I det konkrete eksempel kiggede vi på punktet på grafen med en x -koordinat på 1:

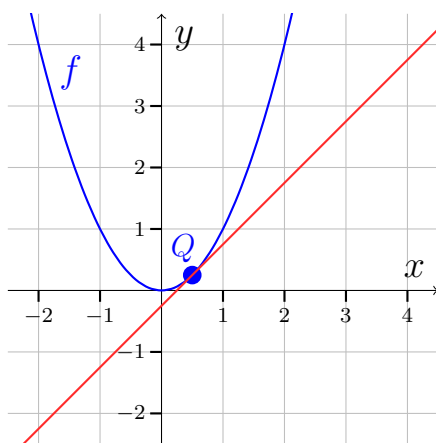


Havde vi valgt en anden x -værdi, havde vi fået en anden værdi for differentialkvo-

tienten. Differentialkvotient er derfor en funktion af x og vi betegner den med f' (læses *f mærke*). Vi fandt ud af, at når $x = 1$ så var differentialkvotienten 2, så det må betyde at $f'(1) = 2$. Det kan vi skrive ind i et sildeben:

x	1
$f'(x)$	2

For at blive klogere på f' vil vi nu gerne tegne grafen, så vi aflæser nogle flere hældninger. Vi tegner nu tangenten i punktet Q med x -koordinat 0,5 og aflæser hældningen:



Vi ser at hældningen er 1, hvilket vi skriver ind i sildebenet:

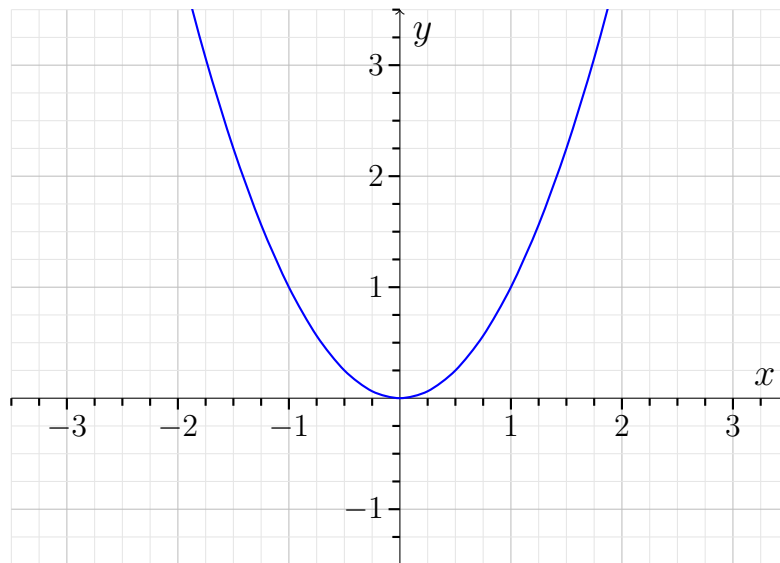
x	0,5	1
$f'(x)$	1	2

På samme måde tegner vi flere tangenter og aflæser deres hældninger

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f'(x)$	-4				1	2	4

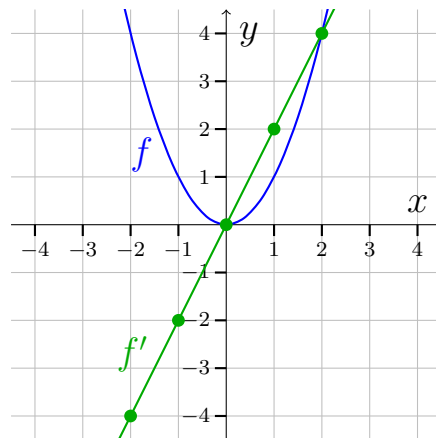
Øvelse 10.1.1

Her er en version af ovenstående graf, men lavet på en måde, så det er lidt nemmere at aflæse på den.



- a) Jeg indrømmer at det svært at gøre præcist, men du skal efter bedste evne ”tegne” tangenter og aflæse deres hældninger, så du kan de manglende felter i tabellen oven over. Læg en lineal over skærmen og vurder hvad hældningen på tangenten er.

Vi vil gerne se om vi kan gætte forskriften for f , så vi skriver punkterne fra sildebenet ind i et koordinatsystem og forbinder dem:



Vi ser at punkterne fra sildebenet ligger på en linje. Så $f'(x)$ er altså en lineær funktion. Linjen skærer y -aksen i 0 og har hældning 2. Altså har differentialkvotienten forskriften $f'(x) = 2x$.

Øvelse 10.1.2

- a) Tegn i Geogebra grafen for $f(x) = -x^2 + 2$.
- b) Lav et sildeben for $f'(x)$ ved at aflæse tangenthældninger. Læg f.eks. en lineal hen over skærmen for at vurdere hældningerne.
- c) Bestem en forskrift for $f'(x)$ ved at tegne punkterne fra sildebenet ind i et koordinatsystem.

Øvelse 10.1.3

Bestem som i øvelse 10.1.2 forskriften for den afledte funktion (differentialkvotienten) for følgende funktioner.

- a) $f(x) = x^2 - x + 1$
- b) $f(x) = 3x$
- c) $f(x) = -x$
- d) $f(x) = 0$

Øvelse 10.1.4

Tegn grafer i Geogebra og aflæs følgende værdier:

- a) $f(-1)$ og $f'(-1)$ for funktionen $f(x) = x^3$.
- b) $f(3)$ og $f'(3)$ for funktion $f(x) = 2x + 1$.

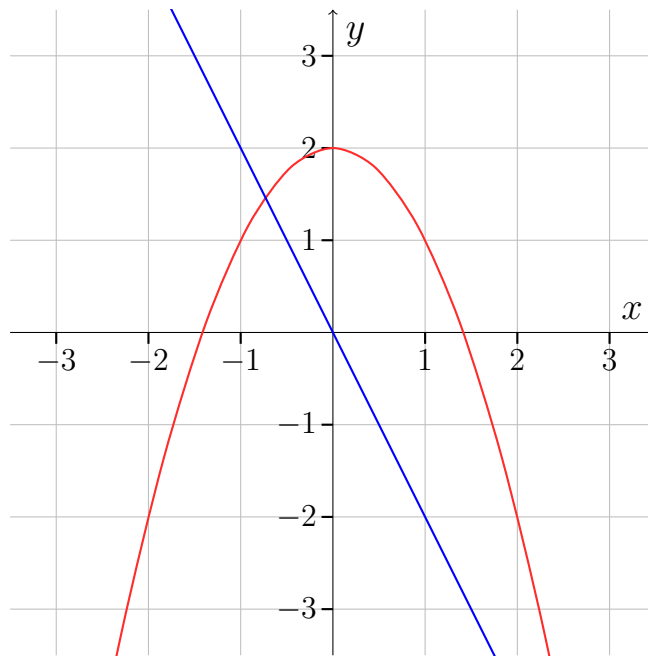
Øvelse 10.1.5

Tegn grafen for $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ i GeoGebra.

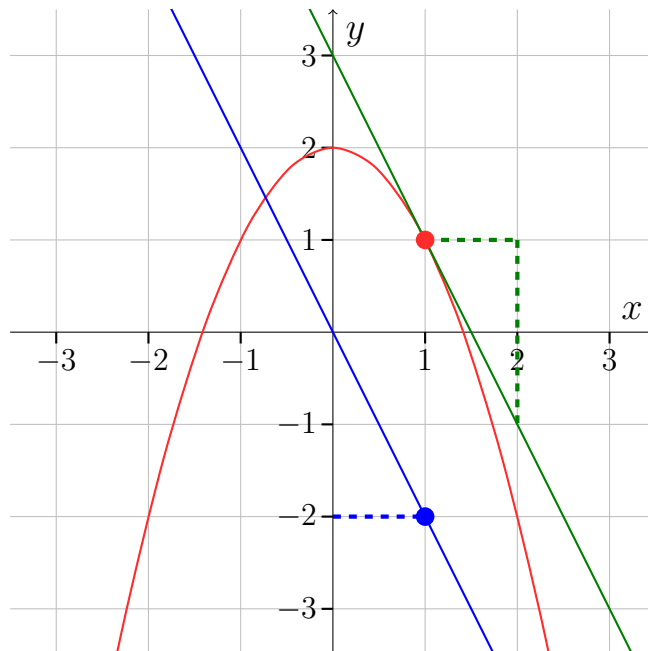
- a) Lav et sildeben med for f' .
- b) Plot punkterne ind i et koordinatsystem.
- c) Tegn grafen for f' .
- d) Kom med et bud på forskriften for f'

Eksempel 10.1.1

Nedenunder ses grafen for en funktion f og dens afledte funktion i samme koordinatsystem:



Vi vil gerne finde ud af hvilken en som er f og hvilken en som er f' . Vi kan se at det er den røde som er f , fordi hver gang vi aflæser tangenthældninger på den røde svarer det til funktionsværdier for den blå. Her har jeg f.eks. tegnet en tangent ud fra $x = 1$ (grøn farve). Vi ser at den har en hældning på ca. -2 og det passer jo med at den blå har en y -værdi på -2 ud fra $x = 1$:



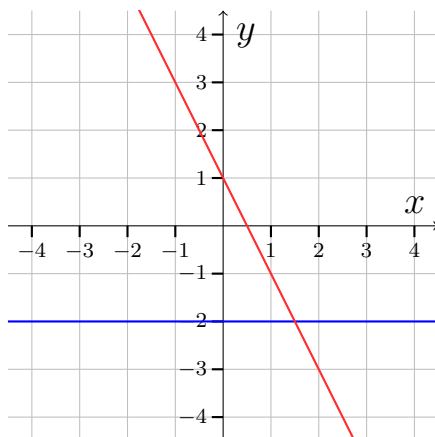
Vi konkluderer at den røde **kan** være f og blå **kan** være f' . Men vi er nødt til at udelukke at det kan være omvendt. Vi kan se, at den blå kun har tangenter med hældning -2 (alle tangenterne ligger oven i funktion). Den røde graf har mange andre funktionsværdier end -2 så den kan ikke være f' . Altså kan vi

konkluderer:

Den røde er f og den blå er f' .

Øvelse 10.1.6

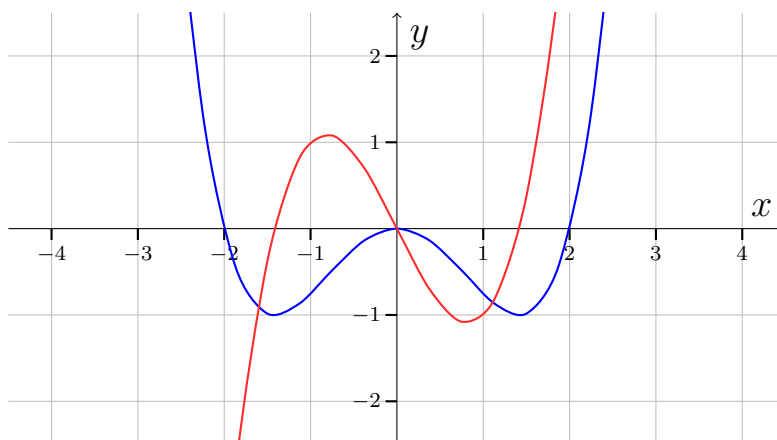
Betragt følgende grafer:



a) Den ene graf er f og den anden er f' . Hvad er hvad?

Øvelse 10.1.7

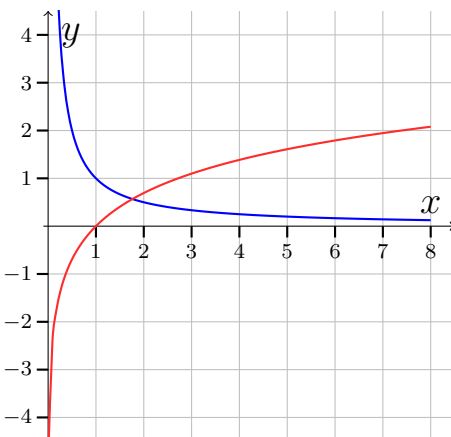
Betragt følgende grafer:



a) Den ene graf er f og den anden er f' . Hvad er hvad?

Øvelse 10.1.8

Betragt følgende grafer:



a) Den ene graf er f og den anden er f' . Hvad er hvad?

Når man har en forskrift for f' , kan man bestemme hældninger uden at tegne grafen.

Eksempel 10.1.2

Vi vil bestemme hældningen på tangenten til funktionen $f(x) = x^2$ i det punkt på grafen hvor $x = 10$. Vi indsætter i forskriften for $f'(x)$ (som vi tidligere fandt til at være $f'(x) = 2x$)

$$f'(10) = 2 \cdot 10 = 20$$

Vi konkluderer at hældningen på tangenten i punktet med x -koordinat 10 er 20

Vi kan formulere ovenstående eksempel lidt klarere, når vi husker at alle punkter på grafen for en funktion har formen $(x, f(x))$. Eksemplet bliver så til

Eksempel 10.1.3

Vi vil bestemme hældningen på tangenten til funktionen $f(x) = x^2$ i punktet $(10, f(10))$. Vi indsætter i forskriften for $f'(x)$ (som vi fandt til at være $f'(x) = 2x$)

$$f'(10) = 2 \cdot 10 = 20$$

Vi konkluderer at hældningen på tangenten er 20 i punktet $(10, f(10))$

Øvelse 10.1.9

Funktionen $f(x) = x^3$ har differentialkvotienten $f'(x) = 3x^2$.

- Beregn $f(2)$ og $f'(2)$.
- Hvad er hældningen på tangenten i punktet $(2, 8)$?

Så hvad er en differentialkvotient?

Differentialkvotienten til en funktion f , er den funktion f' , som til ethvert x , knytter hældning på tangenten til f i punktet $(x, f(x))$.

10.2 Differentialkvotienter ved tabelopslag

I sidste afsnit lærte vi at finde differentialkvotienter ved at aflæse hældninger. Det gav en god forståelse (håber jeg) for hvad en differentialkvotient er, men i praksis er det ikke sådan man bestemmer differentialkvotienter. Fremover vil vi slå differentialkvotienterne op i en tabel:

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$	
0	a	$a \cdot x$	(58)
$n \cdot x^{n-1}$	x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	(59)
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$	(60)
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $	(61)
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$	(62)
e^x	e^x	e^x	(63)
$k \cdot e^{k \cdot x}$	$e^{k \cdot x}$	$\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}$	(64)
$\ln(a) \cdot a^x$	a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	(65)
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	(66)
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	(67)

Tabel 10.1: Tabel med differentialkvotienter fra formelsamlingen. Kolonnen til højre skal vi ikke bruge i denne omgang

Jeg anbefaler at I printer tabellen (eller formelsamlingen) da vi skal bruge den hele tiden.

Eksempel 10.2.1

Lad $f(x) = \sqrt{x}$. Vil vi gerne bestemme $f'(x)$.

Vi finder $\sqrt{x}$ i den midterste kolonne i tabellen og ser i kolonnen til venstre at $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Øvelse 10.2.1

Bestem ved tabelopslag $f'(x)$ for følgende funktioner

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = e^x$

Eksempel 10.2.2

Vi vil bestemme den afledte funktion (differentialkvotienten) til funktionen $f(x) = x^7$. Vi kan se at f har form som x^n , som ifølge tabellen har differentialkvotient $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Vi får

$$f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6.$$

Altså er $f'(x) = 7x^6$.

At bestemme en differentialkvotient til en funktion f kaldes også at differentiere f .

Eksempel 10.2.3

Vi vil differentiere $f(x) = 3$. Vi ser at den har formen $f(x) = a$ (a er en konstant). Ifølge tabellen får vi $f'(x) = 0$

Øvelse 10.2.2

Bestem ved tabelopslag den afledte funktion for følgende funktioner:

a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = 2^x$

c) $f(x) = x^{-4}$

d) $f(x) = 5$

e) $f(x) = e^{2x}$

f) $f(x) = x^1$

g) $f(x) = x$

h) $f(x) = \pi$

i) $f(x) = 2^3$

Nogle gange får vi brug for at differentiere en funktion som ikke har noget navn. F.eks kan det være, at vi får at vide, at vi skal differentiere x^3 (læg mærke til, at der ikke står " $f(x) =$ ").

Eksempel 10.2.4

Vi vil differentiere funktionen givet ved udtrykket x^3 . Vi skriver:

$$(x^3)' = 3x^2$$

Øvelse 10.2.3

a) Bestem $(\ln(x))'$

Differentialkvotient for opbyggede funktioner

Vi vil ofte møde funktioner som ikke direkte står i tabel 10.1. I stedet vil de være bygget op af funktioner fra tabellen.

Eksempel 10.2.5

Vi vil differentiere funktionen $h(x) = x^2 + 3$. Vi ved fra tabel 10.1 at $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$ og $(3)' = 0$. Så vi tænker at $h'(x) = 2x + 0 = 2x$. Det er den også, men vi mangler faktisk et argument for, at det er ok differentiere de to led hver for sig.

Eksempel 10.2.6

Vi vil differentiere funktionen $5x^2$. Vi ved fra tabel 10.1 at $(5)' = 0$ og $(x^2)' = 2x$, så vi tænker at $h'(x) = 0 \cdot 2x = 0$. Men det er... **FORKERT**.

For at differentiere funktionerne ovenstående eksempler korrekt har vi brug for nogle formler fra formelsamlingen:

Konstant ganget funktion	$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$	(40)
--------------------------	-----------------------------------	------

Sum af to funktioner	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$	(41)
----------------------	----------------------------------	------

Differens af to funktioner	$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$	(42)
----------------------------	----------------------------------	------

Produkt af to funktioner	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	(43)
--------------------------	--	------

Sammensat funktion $f \circ g$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	(44)
--------------------------------	-------------------------------------	------

Tabel 10.2: Udsnit fra formelsamlingen med formler for opbyggede funktioner. De to nederste linjer hører til på A-niveau

Jeg anbefaler at I printer tabellen (eller formelsamlingen) da vi skal bruge den hele tide.

Eksempel 10.2.7

Vi vil differentiere funktionen $h(x) = x^2 + 3$. Vi sammenligner med tabel 10.2 og ser at vores funktion har form som i formel (41), hvor:

$$f(x) = x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = 3$$

Vi differentierer f og g :

$$f'(x) = 2x \quad \text{og} \quad g'(x) = 0.$$

Ifølge tabellen er differentialkvotienten givet ved $f'(x) + g'(x)$, så

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 0 = 2x.$$

Altså er:

$$h'(x) = 2x.$$

Eksempel 10.2.8

Vi vil differentiere funktionen $h(x) = 5x^2$. Vi sammenligner med tabel 10.2 og ser at vores funktion har form som i formel (40), hvor

$$k = 5 \quad \text{og} \quad f(x) = x^2.$$

Vi differentiere f :

$$f'(x) = 2x.$$

Ifølge tabellen er differentialkvotienten givet ved $k \cdot f'(x)$, så

$$h'(x) = k \cdot f'(x) = 5 \cdot 2x = 10x.$$

Altså er

$$h'(x) = 10x.$$

Øvelse 10.2.4

Bestem differentialkvotienten for følgende funktioner:

a) $h(x) = x^2 + 4$

b) $h(x) = e^{-2x} - x$

c) $f(x) = 2x^3$

d) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

e) $2 \cdot 3^x + 2 \cdot e^{3x}$

Produktfunktioner - A-niveau

Eksempel 10.2.9

Vi vil differentiere funktionen $h(x) = x^2 \cdot \ln(x)$. Vi sammenligner med tabel 10.2 og ser at vores funktion har form som i formel (43), hvor:

$$f(x) = x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = \ln(x)$$

Vi differentierer f og g :

$$f'(x) = 2x \quad \text{og} \quad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Ifølge tabellen er differentialkvotienten givet ved $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, så

$$h'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$$

Altså er:

$$h'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x.$$

Øvelse 10.2.5

Bestem den afledte funktion for følgende funktioner:

a) $h(x) = 2x \cdot \ln(x)$

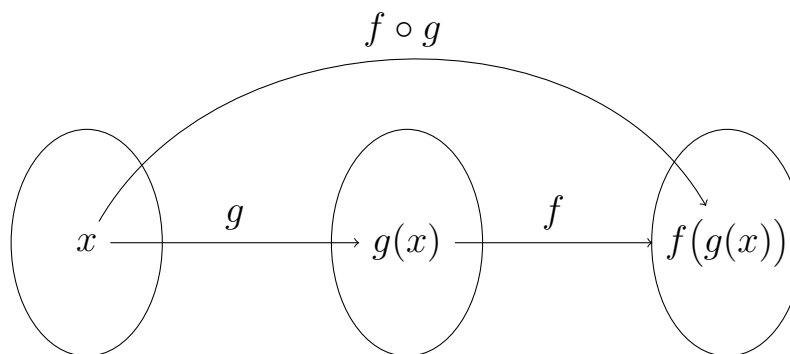
b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot 2^x$

c) $x^3 \cdot e^x$

Sammensatte funktioner - A-niveau

For at forklare den sidste formel i tabel 10.1, har vi først brug for at introducere *sammensatte funktioner*.

Har man to funktioner f og g kan man sætte dem sammen til en ny funktion $f \circ g$ (læses ”f bolle g”) som illustreret i følgende diagram:



Figur 10.1: Funktionen $f \circ g$ er sammensat af først g og så f

Vi regner forskriften for $(f \circ g)(x)$ ved at sætte forskriften for g ind i f :

Eksempel 10.2.10

Lad $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^2 + x - 1$. Vi regner forskriften for den sammensatte funktion $(f \circ g)(x)$ ved at sætte forskriften for g i stedet for x i forskriften for f :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + x - 1}$$

Øvelse 10.2.6

Lad $f(x) = \ln(x)$ og $g(x) = 2x - 1$. Regn forskrifterne for:

- a) $f \circ g$
- b) $g \circ f$

Selvom den sammensatte funktion formelt hedder $f \circ g$, er der (HHX)-tradition for at betegne den med $f(g(x))$, så det vil vi gøre fremover.

Eksempel 10.2.11

Lad $f(x) = x^2 - 9$ og $g(x) = x - 3$. Vi regner den forskriften for den sammensatte funktion:

$$f(g(x)) = (x - 3)^2 - 9 = x^2 + 3^2 - 6x - 9 = x^2 - 6x.$$

Altså $f(g(x)) = x^2 - 6x$.

Øvelse 10.2.7

Regn forskriften $f(g(x))$ for den sammensatte funktion når:

- a) $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = 2x - 1$
- b) $f(x) = e^x$ og $g(x) = x^2 + 2x$
- c) $f(x) = x^2 + 3$ og $g(x) = x + 1$
- d) $f(x) = x + 1$ og $g(x) = x^5$

I forskrift $h(x)$ som kan skrives på formen $h(x) = f(g(x))$ kaldes g den *indre funktion* og f den *ydre funktion*.

Eksempel 10.2.12

I funktionen $h(x) = \sqrt{x^4 + x}$ er den indre funktion $g(x) = x^4 + x$ og den ydre funktion er $f(x) = \sqrt{x}$.

Øvelse 10.2.8

Bestem den indre funktion g og den ydre funktion f i følgende sammensatte funktioner.

a) $h(x) = \sqrt{x+2}$

b) $h(x) = 3^{7x^2-2}$

c) $(x^3 - x^2 + 1)^7$

Vi er nu endelig klar til at demonstrere den sidste formel fra tabel 10.2.

Eksempel 10.2.13

Vi vil differentiere funktion $h(x) = \ln(x^2 + 1)$. Vi ser at den har form som en sammensat funktion $f(g(x))$.

$$g(x) = x^2 + 1 \quad \text{og} \quad f(x) = \ln(x).$$

Vi differentiere g og f :

$$g'(x) = 2x \quad \text{og} \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Ifølge formel (44) i ?? er differentialkvotienten givet ved $f'(g(x)) \cdot g'(x)$, så

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Altså

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Øvelse 10.2.9

Differentier følgende funktioner.

a) $h(x) = \ln(2x - 1)$

b) $h(x) = e^{x^3+3x}$

c) $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^8$

d) $\sqrt{3x^2 + x}$

Vi slutter afsnittet af med en øvelse, hvor I får brug alle formlerne fra afsnittet.

Øvelse 10.2.10

Differentier følgende funktioner

a) $f(x) = x^2 + e^x$

b) $f(x) = 5 \cdot 6^x$

c) $f(x) = \ln(x) \cdot x$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} + x$

e) $f(x) = e^{4x} \cdot x^2 - \frac{1}{x}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^7 - x}$

g) $f(x) = \frac{2}{x}$

h) $f(x) = 2 \cdot 4^{x^2 - 4}$

10.3 Tangentens ligning

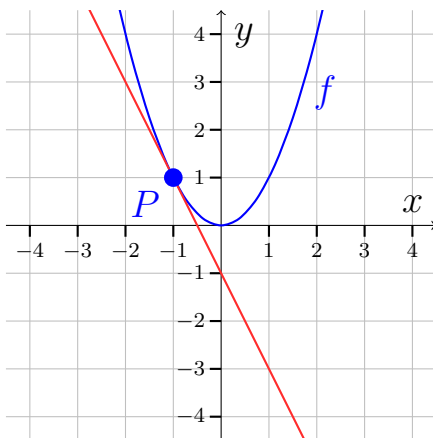
Vi har set hvordan man finder hældningen på en tangent til en funktion. Nu skal vi se hvordan man bestemmer en *ligning* for en tangent.

Tangenten er en lineær funktion med forskriften $f(x) = ax + b$, men når vi arbejder med tangenter, snakker vi om tangentens ligning i stedet for forskrift og skriver den som $y = ax + b$.

Tangent gennem kendt punkt

Eksempel 10.3.1

Lad $f(x) = x^2$. Vi vil gerne bestemme en ligning for tangenten igennem punktet $P(-1, 1)$:



Ligningen for tangenten har formen $y = ax + b$

Vi starter med at finde $f'(x)$, da den kan bruges til at finde tangentens hældning a .

$$f'(x) = 2x^{2-1} = 2x.$$

Vi er interesseret i hældningen når $x = -1$, så vi regner $f'(-1)$:

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Vi har altså fundet hældning a til at være -2 .

Vi mangler at finde skæringen med y -aksen, b . Vi har lige fundet ud af at $a = -2$ og vi ved at når $x = -1$ så er $y = 1$ (den går jo igennem $(-1, 1)$). Disse informationer indsætter vi i ligningen $y = ax + b$:

$$1 = -2 \cdot (-1) + b.$$

Vi isolerer b og får $b = -1$. Vi indsætter a og b i tangentens ligning $y = ax + b$ og får vores facit

$$y = -2x - 1$$

Vi tjekker at det passer med grafen. Jooo den er god nok. Tangenten har en hældning på -2 og skærer y -aksen i -1 .

Øvelse 10.3.1

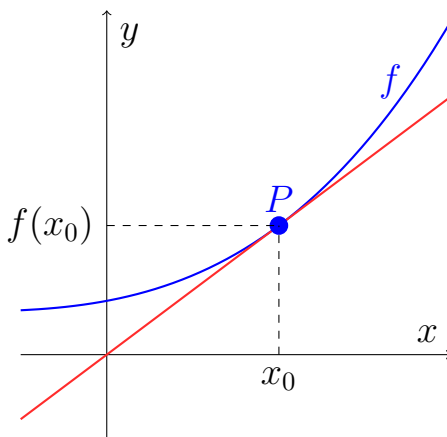
Bestem ligningen for følgende tangenter:

- a) Tangenten igennem $(1, 1)$ når $f(x) = x^2$
- b) Tangenten igennem $(1, 0)$ når $f(x) = x^2 - x$.
- c) Tangenten igennem $(4, f(4))$ når $f(x) = \sqrt{x}$.
- d) Tangenten igennem $(2, f(2))$ når $f(x) = \ln(x)$.

Der findes en nemmere og hurtigere metode til at bestemme tangenter. Man kan bruge følgende sætning som også står i formelsamlingen.

Sætning 10.3.1

Lad f være en differentiabel funktion, og lad der være givet en tangent igennem et punkt $P(x_0, f(x_0))$:



Da er tangentens ligning givet ved:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Eksempel 10.3.2

Lad $f(x) = 2x^3$. Vi vil nu bruge sætning 10.3.1 til at bestemme tangenten gennem $(2, f(2))$. Ifølge sætningen er tangenten givet ved:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Det første vi skal bruge er x_0 , som er førstekoordinaten til det punkt tangenten går igennem. I vores tilfælde er punktet $(2, f(2))$, så

$$x_0 = 2$$

Vi finder nu $f(x_0)$:

$$f(x_0) = f(2) = 2 \cdot 2^3 = 16$$

Vi finder så $f'(x)$:

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} = 6x^2.$$

Vi kan nu finde $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = f'(2) = 6 \cdot 2^2 = 24.$$

Vi sætter vores resultater ind i formlen: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$:

$$y = 24(x - 2) + 16 = 24x - 48 + 16 = 24x - 32.$$

Altså tangentens ligning er $y = 24x - 32$.

Øvelse 10.3.2

Benyt sætning 10.3.1 til at bestemme:

- a) Tangenten gennem $(3, f(3))$ når $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$.
- b) Tangenten gennem $(-1, -1)$ når $f(x) = \frac{1}{x}$.
- c) Tangenten gennem $(4, 7)$ når $f(x) = 2x - 1$.
- d) Tangenten gennem $(9, f(9))$ når $f(x) = 6 \cdot \sqrt{x}$.

Tangent igennem ukendt punkt, men med kendt hældning

Eksempel 10.3.3

Lad $f(x) = -x^2$. Vi vil finde den tangent som har hældningen 1, hvis der overhovedet findes sådan en?

I forhold til den opgave vi lige har regnet, så kender vi pludselig ikke kender førstekoordinaten x_0 . Men vi kan finde x_0 fordi vi ved at hældningen er 1. Da hældning er givet ved f' , kan vi altså finde x_0 ved at løse ligningen

$$f'(x_0) = 1.$$

Vi finder f' :

$$f'(x) = -2x,$$

så $f'(x_0) = -2x_0$, og ligningen vi skal løse er:

$$-2x_0 = 1$$

Ligningen har løsningen $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Nu hvor vi har x_0 kan vi finde tangentens ligning som vi har gjort i de tidligere øvelser.

$$f(x_0) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}.$$

Da hældningen på tangenten skal være 1 er:

$$f'(x_0) = 1$$

Fra sætning 10.3.1 ved vi at ligningen for tangenten er givet ved:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Vi indsætter vores værdier og får

$$y = 1 \left(x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) + \left(-\frac{1}{4} \right).$$

Vi reducerer og får tangentens ligning til:

$$y = x + \frac{1}{4}.$$

Øvelse 10.3.3

- a) Lad $f(x) = x^2 + 2x$. Bestem en ligning for den tangent som har en hældning på -4 .
- b) Lad $f(x) = \sqrt{x} + 1$. Bestem en ligning for den tangent som er parallel med linjen $y = \frac{1}{2}x + 2$ (VINK: hvad skal hældningen på tangenten være hvis den skal være parallel med linjen?).
- c) Lad $f(x) = x^3$. Bestem ligningen for de to tangenter som er parallelle med linjen $y = 12x - 5$.
- d) Lad $f(x) = 5x$. Undersøg ved beregning om der findes nogle tangenter med hældning -3 .

Ekstra

Øvelse 10.3.4 (Svær)

Lad $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Funktionen har to tangenter som går igennem punktet $(2, -3)$.

- a) Beregn en ligning for de to tangenter.

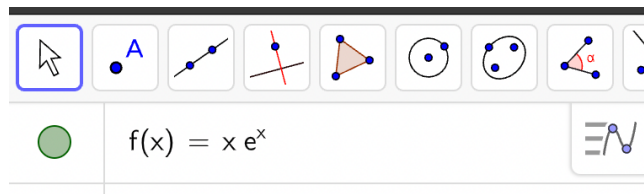
VINK: Tag udgangspunkt i sætning [10.3.1](#).

10.4 Differentialregning med GeoGebra

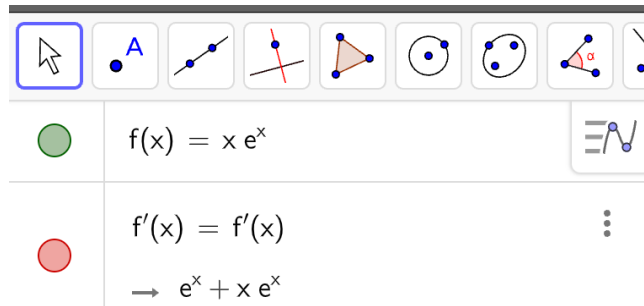
Det er nemt at finde differentialkvotienter i GeoGebra.

Eksempel 10.4.1

Lad $f(x) = x \cdot e^x$. Vi finder $f'(x)$ ved hjælp af GeoGebra ved først at indtaste $f(x)$ i et algebravindue:



Vi finder differentialkvotienten ved at skrive $f'(x)$ i algebravinduet:



Vi ser at differentialkvotienten er $f'(x) = e^x + x e^x$.

Øvelse 10.4.1

Lad $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

a) Bestem $f'(x)$ vha. GeoGebra.

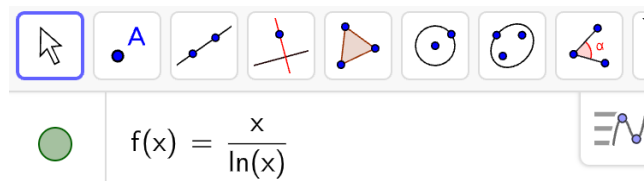
Det er (næsten) ligeså nemt at finde tangenter i GeoGebra.

Tangentens ligning i Geogebra

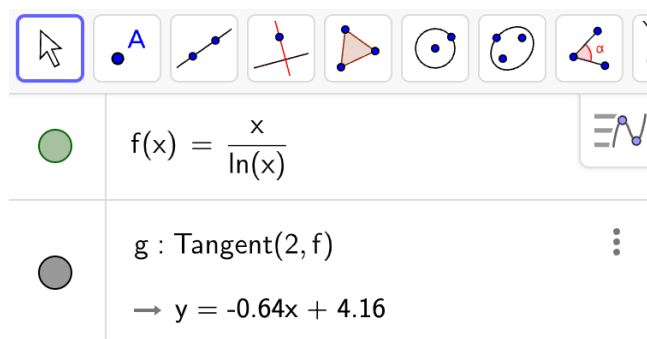
Eksempel 10.4.2

Vi vil finde en ligning for tangenten til funktionen $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ i punktet $(2, f(2))$.

Vi indtaster først $f(x)$ i et algebravindue i Geogebra:



Vi kan nu bruge kommandoen **Tangent** til at finde tangenten. Her skal vi bruge x -værdien til punktet (som jo er 2) og og navnet på funktionen, som jo var f . Vi taster **Tangent(2, f)**:



Tangenten har altså ligningen $y = -0,64x + 4,16$.

Øvelse 10.4.2

Lad $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

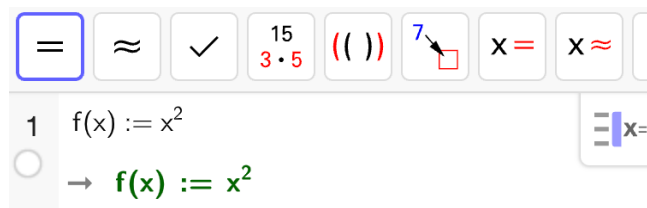
a) Bestem $f'(x)$.

b) Bestem tangenten til f gennem punktet $(1, f(1))$.

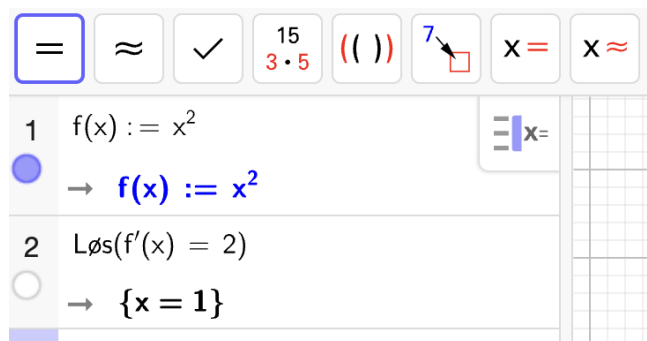
Eksempel 10.4.3

Vi vil bestemme en ligning for den tangent for $f(x) = x^2$ som er parallel med $y = 2x + 4$.

Vi åbner et CAS-vindue i GeoGebra og skriver funktionen ind. Når det er CAS, så skal man huske kolon når man skriver funktionen ind:

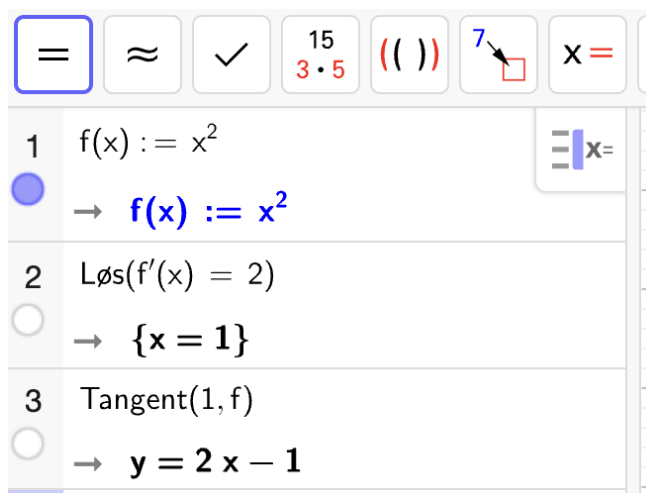


Hvis tangenten skal være parallel med $y = 2x + 4$, skal den have en hældning på 2. Altså skal $f'(x) = 2$. Vi skal løse denne ligning, så vi skriver $\text{Løs}(f'(x)=2)$:



Vi ser at løsningen er $x = 1$, så det må betyde at tangenten har en hældning på

2 når $x = 1$. Når vi nu har x -koordinaten kan vi finde tangentens ligning præcis som før:



Tangentens ligning bliver altså:

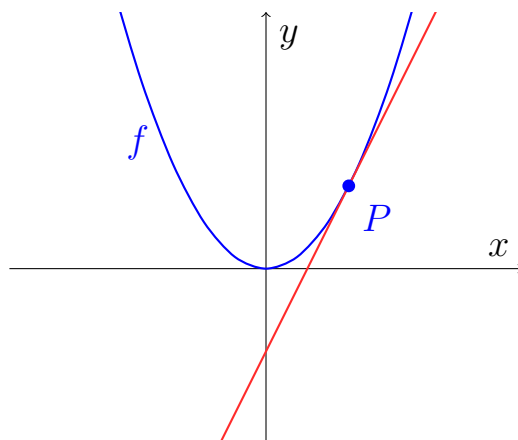
$$y = 2x - 1.$$

Øvelse 10.4.3

Lad $f(x) = x^2 + x$.

- a) Bestem en ligning for den tangent til f , som har en hældning på -3 .

Det punkt hvor tangenten rører grafen kaldes *røringspunktet*:



Punktet P er røringspunktet for tangenten

Eksempel 10.4.4

Vi vil finde røringspunktet for tangenten i eksempel 10.4.3.

I eksemplet fandt vi ud af at x -koordinaten til røringspunktet var 1. Vi finder

selvfølgelig y -koordinaten ved at sige $f(1)$. Vi husker fra eksemplet at $f(x) = x^2$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Altså er røringpunktet $(1; 1)$.

Øvelse 10.4.4

Lad $f(x) = \sqrt{e^x}$.

- Bestem en ligning for den tangent som er parallel med linjen $y = 2x - 10$.
- Bestem røringpunktet til den tangent som er parallel med linjen $y = 2x - 10$.

Øvelse 10.4.5

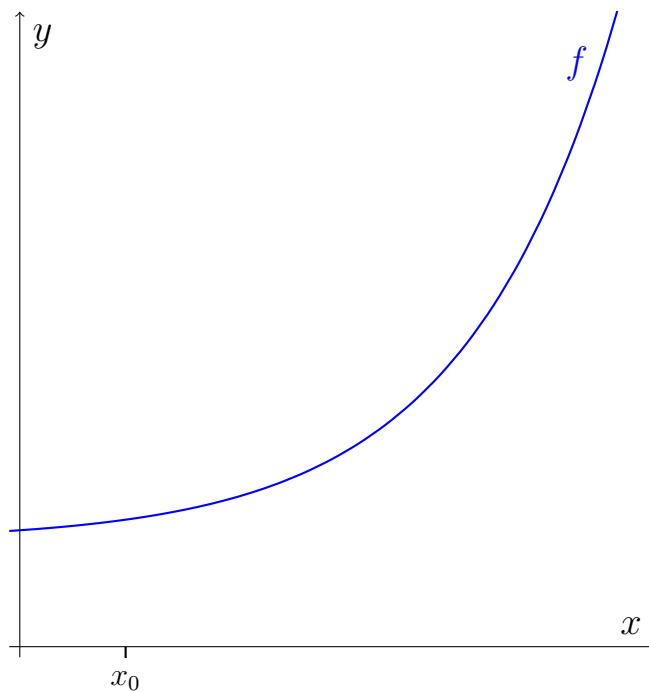
Lad $f(x) = x^5 - x^4$. Funktionen $f(x)$ har to tangenter der er parallelle med $y = 3x - 2$.

- Bestem en ligning for disse to tangenter.

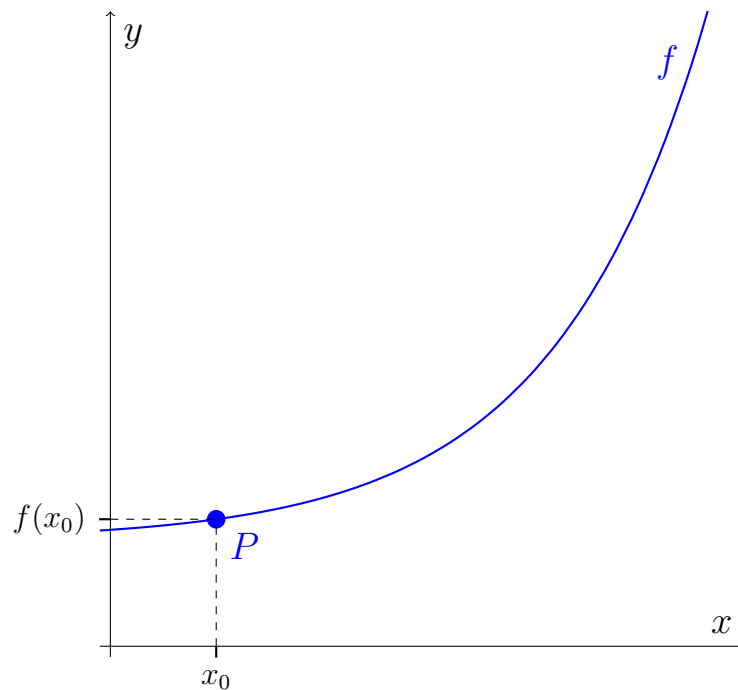
10.5 Definition af differentialkvotienten

Vi har lært at differentialkvotienten f' er den funktion, som til ethvert x knytter hældningen på tangenten i $(x, f(x))$. Vi har lært at man finder forskriften f' ud fra tabeller, men vi mangler at forstå hvor disse tabeller kommer fra. Det viser sig desværre at vores beskrivelse af f' er for upræcis til, at vi kan bruge den til at bevise formlerne i tabellerne, så derfor vil nu lave en konstruktion, som vil munde ud i en formel definition af f' , der så kan bruges til at bevise de forskellige formler.

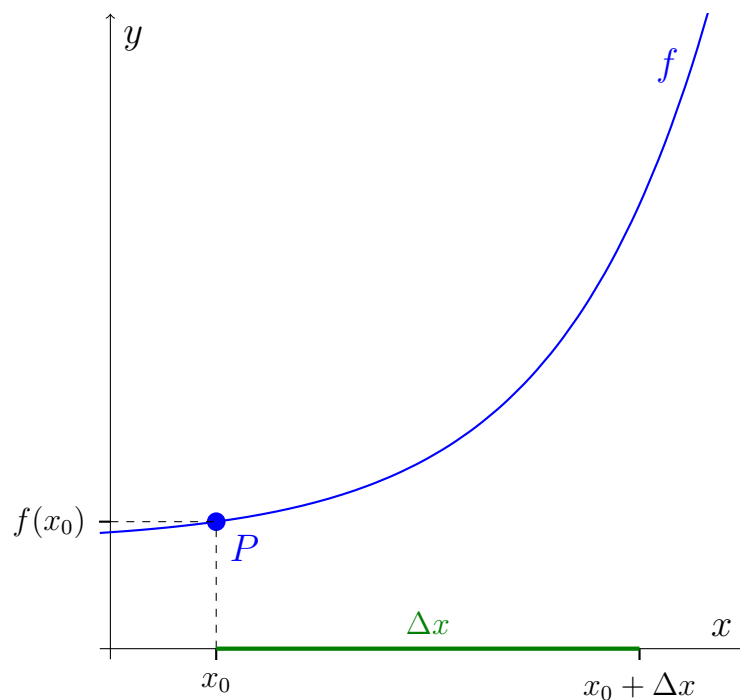
Vi starter med en funktion f og en x -værdi vi kalder x_0 .



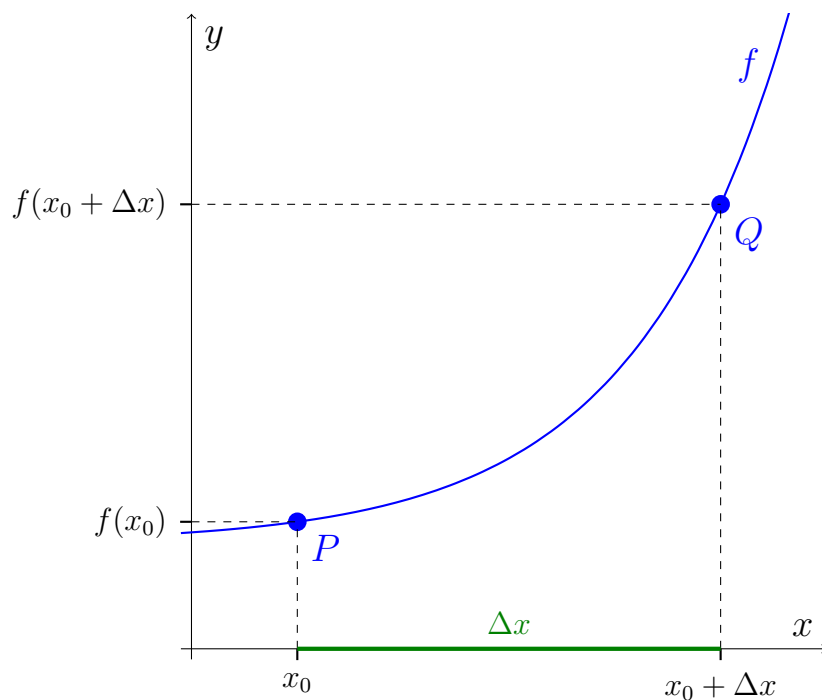
Til x_0 hører der et punkt på grafen. Det kalder vi for P , og det må have koordinaterne $P(x_0, f(x_0))$



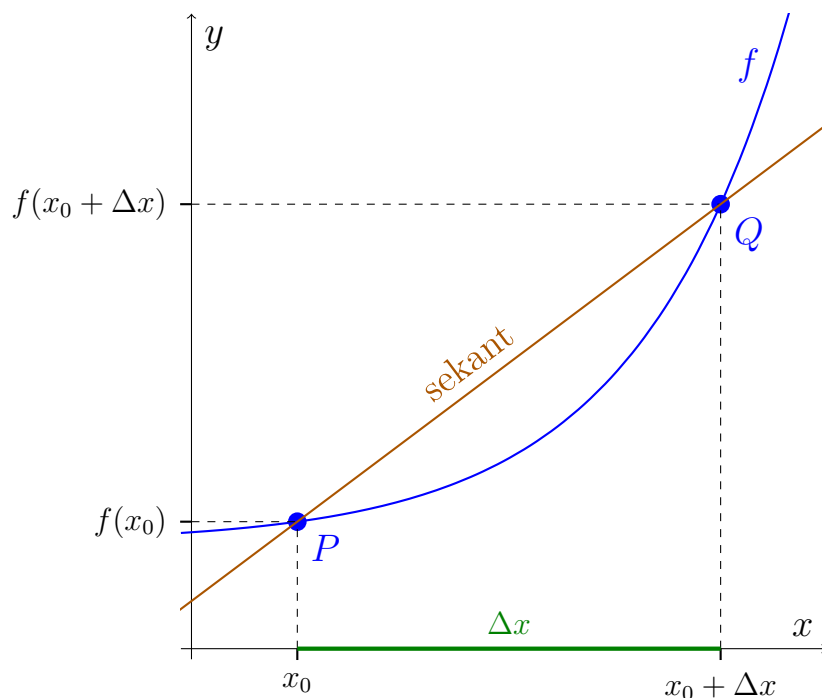
Ud fra x_0 går vi nu et stykke ud af x -aksen. Det stykke vi går ud kalder vi Δx (læses "delta x"), og vi lander på den måde i $x_0 + \Delta x$.



Ud fra $x_0 + \Delta x$ har vi endnu et punkt på grafen. Det kalder vi Q , og det må have koordinaterne $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$:



Vi tegner nu en linje gennem P og Q . En linje gennem to punkter på en graf kaldes en sekant:



Vi husker nu formlen for hældningen for en lineær funktion gennem to punkter:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Vi kan bruge denne formel til at bestemme hældningen på sekanten, da vi kender to punkter på sekanten. Vi har:

I formelen	På tegningen
x_0	x_0
y_0	$f(x_0)$
x_1	$x_0 + \Delta x$
y_1	$f(x_0 + \Delta x)$

Vi bestemmer nu sekanten hældning, a_{sekant} , ved at indsætte i formlen:

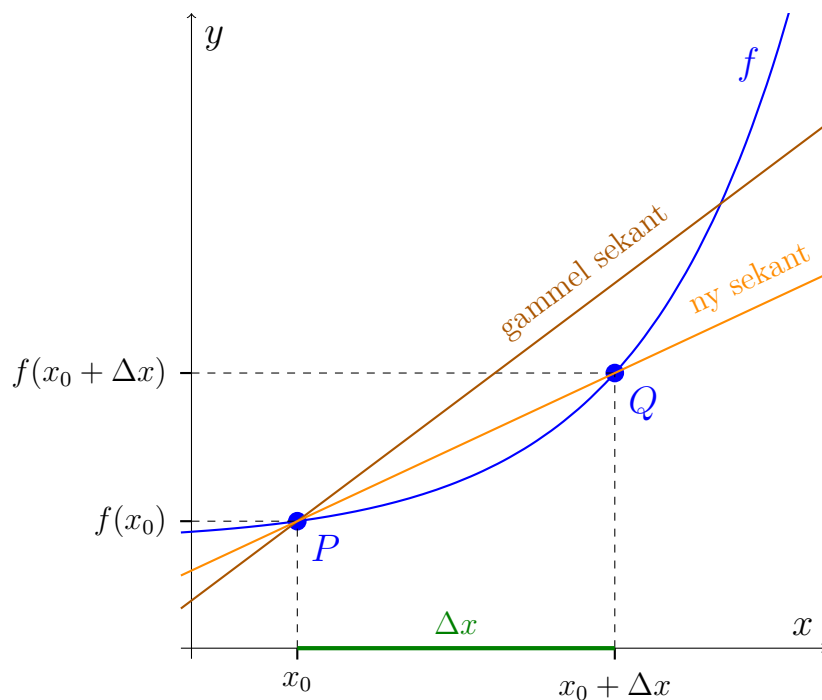
$$\begin{aligned}
 a_{\text{sekant}} &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
 &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} \\
 &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

Sekantens hældning kaldes også *differenskvotienten*. Læg mærke til at ordet min-

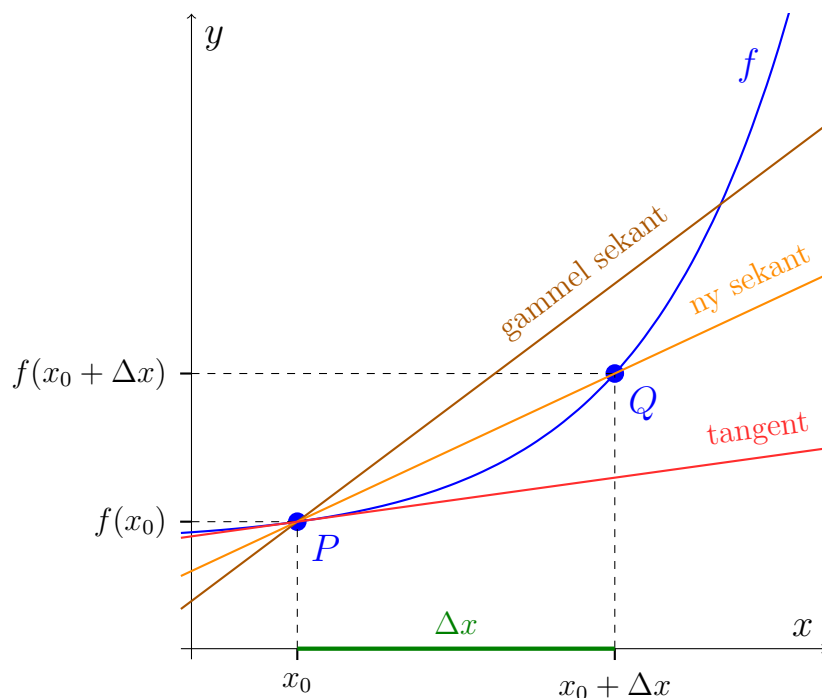
der om "differentialkvotient". Vi har altså fået differenskvotienten til at give:

$$a_{\text{sekant}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

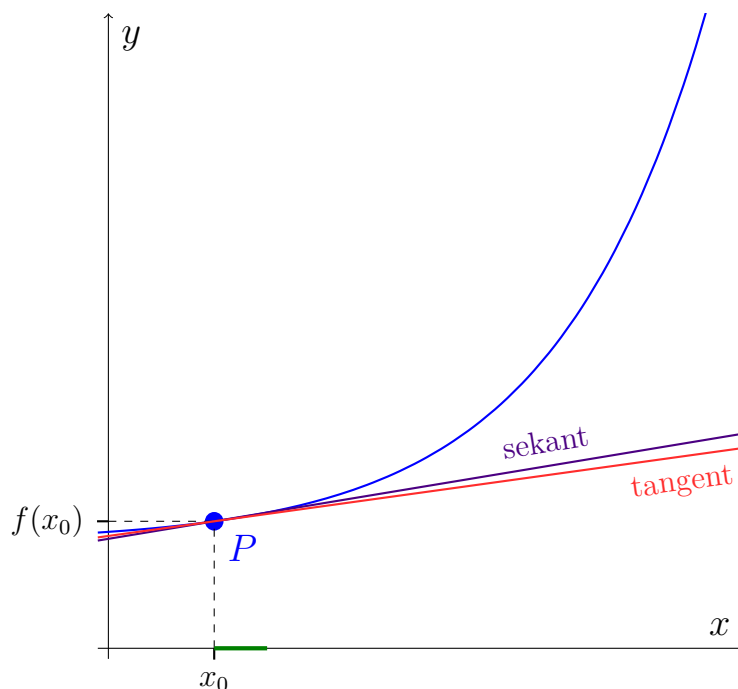
Det næste der sker repræsenterer en helt ny måde at tænke matematik. Vi vil nu se på, hvad der sker, når Δx bliver mindre. Lad os prøve at gøre Δx mindre. Det vil medføre, at Q kommer tættere på P , og sekanten ændrer hældning:



Vi indtegner nu tangenten til P .



Vi kan se hældningen på den ny sekant (som svarede til et mindre Δx) er tættere på tangentens hældning i forhold til hældningen på den gamle sekant. Det er klart, at hvis vi gør Δx endnu mindre, kommer vi endnu tættere på tangentens hældning. Her har jeg lavet en tegning med et meget lille Δx (kun markeret med grøn streg):



Vi kan se at sekanten nu nærmest ligger oven i tangenten, og derfor har de næsten samme hældning. Vi kan selvfølgelig gøre Δx endnu mindre, og på den måde er

klart at vi kan få fat i tangentens hældning, ved at holde øje med sekantens hældning når vi gør Δx mindre. Vi husker at sekantens hældning var givet ved:

$$a_{\text{sekant}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tangentens hældning, a_{tangent} , vil altså være dét, som dette udtryk nærmer sig, når Δx bliver mindre. Det skriver vi på følgende måde:

$$a_{\text{tangent}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Skrivemåden $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ læses ”grænseværdien, for Δx gående mod nul, af...” og betyder værdien som $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nærmer sig, når Δx nærmer sig nul. Vi kan således definere $f'(x_0)$ ved:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Så hvad er der sket her? Vi ville gerne definere differentialkvotienten som tangentens hældning. Men vores definition af begrebet ”tangent” som en linje der ”ligger op ad grafen” var for vag til den kunne bruges som grundlag for beregninger. Det er nu lykket os at finde et udtryk for f' , som man rent faktisk kan regne på (selvom det måske ikke liiiige er oplagt hvordan – mere om det i næste afsnit).

Ikke-differentiable funktioner

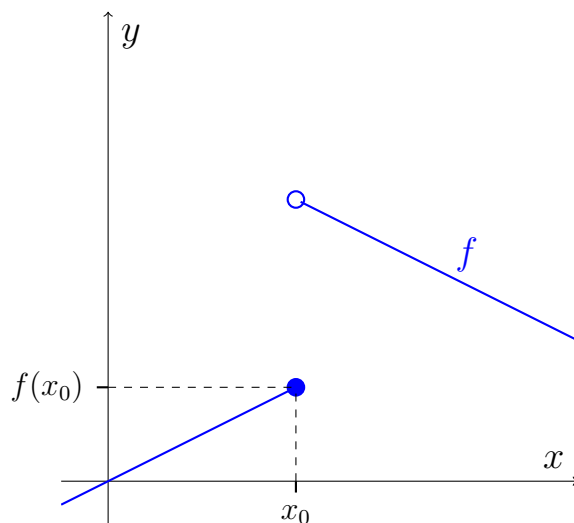
Vi har defineret differentialkvotienten f' i x -værdien x_0 ved:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

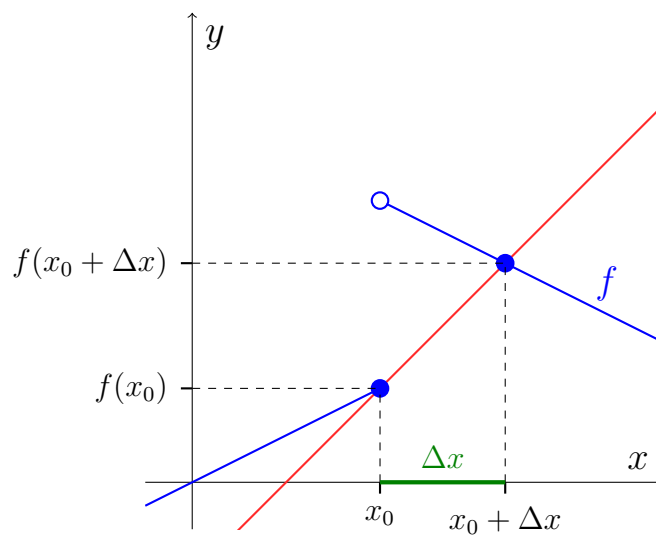
Men vi har desværre været lidt uforsigtige. Det er nemlig ikke altid det går godt når vi lader Δx gå mod nul. Der er to typer af funktioner som er problematiske.

Funktioner med ”hop” (diskontinuerte funktioner)

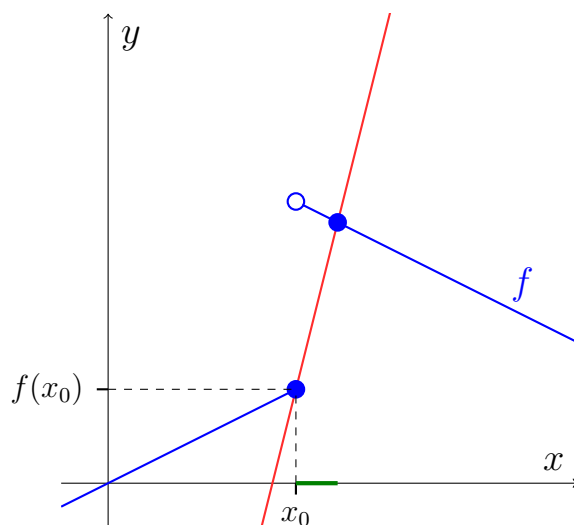
Her et eksempel med en stykkevis defineret funktion:



En funktion som hopper på den måde siges at være ikke-kontinuert (eller diskontinuert). Nåh, vi vælger et vilkårligt Δx og tegner en sekant:



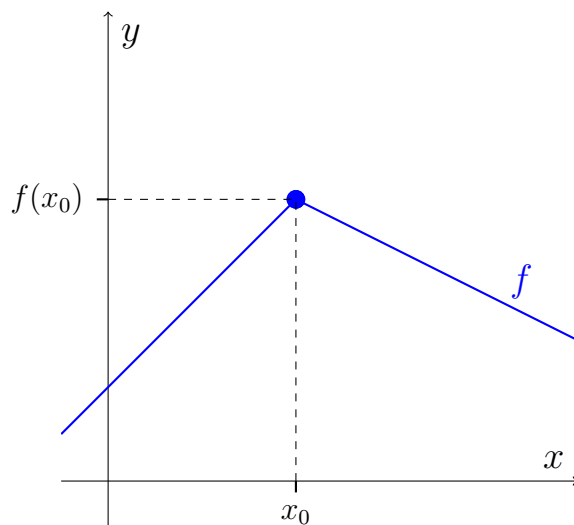
Det er en flot sekant. Lad os prøve at gøre Δx lille (og derfor kun markeret med en grønns streg):



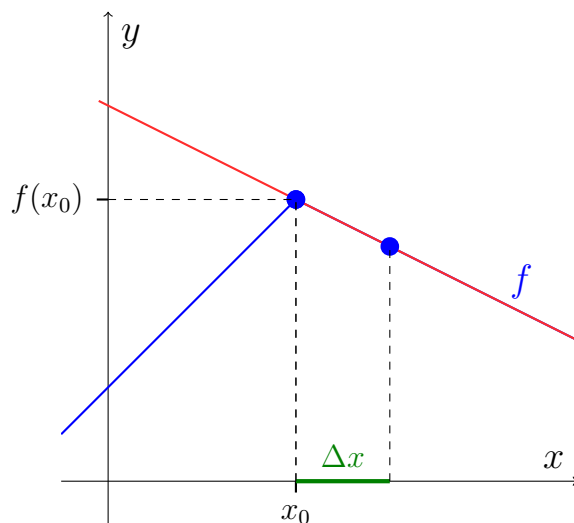
Denne sekant er også flot, men den er godt nok stejl og hvis vi gør Δx endnu mindre, bliver den endnu stejlere. Faktisk, er der ikke nogen grænse for hvor stejl den kan blive. Dvs. tangentens hældning nærmer sig ikke noget bestemt tal, og derfor er grænseværdien ikke defineret. Vi siger at funktion *ikke-differentiabel*.

Funktioner med knæk

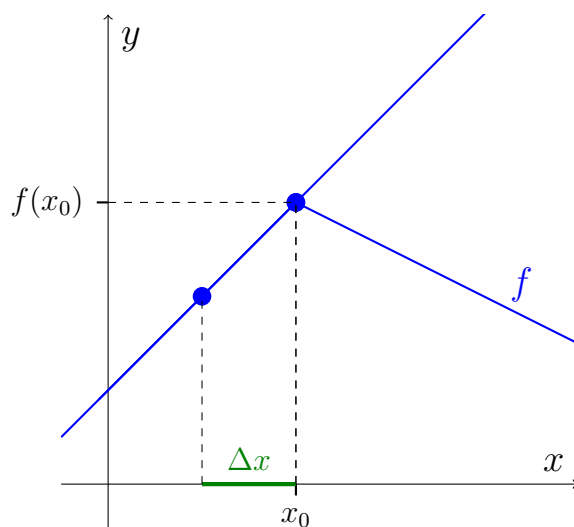
Betragt følgende stykkevis definerede funktion:



Som sædvanligt vælger vi et vilkårligt Δx og tegner en sekant:



Det ser lidt sjovt ud, da tangenten ligger oven i grafen, men det er ikke noget problem. Vi ser også at når vi gør Δx mindre, sker der ikke noget med tangentens hældning. MEN hvad nu hvis Δx bliver negativ? Indtil videre har vi kun set på positive værdier af Δx , men Δx må faktisk gerne være negativ. Lad os prøve at lave en tegning med et negativt Δx . Det må betyde at vi går baglæns i forhold til x_0 :



Igen har vi, at tangens hældning forbliver det samme, når vi gør Δx tættere på 0. Men denne hældning er anderledes end da Δx var positiv. Så vi har altså to forskellige grænseværdier alt efter om vi starter med et positivt eller negativt Δx . Wait, That's Illegal. Grænseværdien skal være den samme, uanset om man starter med et positivt eller et negativt Δx . Så denne funktion er heller ikke differentiabel.

Definitionen

Vi har set at vi ikke bare kan definere differentialkvotienten som grænseværdien af tangentens hældning. For det er ikke altid den findes. Så hvis vi skal give en formel definition af differentialkvotienten er vi nødt til at tage højde for det: Lad f være en funktion og $x_0 \in \text{Dm}(f)$. Hvis grænseværdien

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

eksisterer, så siges funktionen at være differentialbel i x_0 , og differentialkvotienten $f'(x_0)$ er givet ved

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Funktionen siges at være differentialbel, såfremt den er differentiabel for alle $x_0 \in \text{Dm}(f)$.

Læg mærke til at de to ikke-differentiable funktioner vi har set faktisk er differentiable i alle punkter undtagen et enkelt. Hvis man skal have det fornemme stempel ”differentiabel” skal man altså være differentiabel i alle punkter.

Ekstra

Jeg har introduceret differentialkvotienten som tangentens hældning og ud fra det konstrueret en formel definition. I virkeligheden er det omvendt. Sekantens hældning udtrykker en gennemsnitsvækst over et interval. Har man f.eks. en bil der kører langs en vej og en funktion som beskriver den tilbagelagte afstand som funktion af tiden, så vil sekantens hældning være det samme som gennemsnitsfarten (hvor meget den tilbagelagte afstand er vokset pr. tid). Gør man Δx mindre, så tager man gennemsnitsfarten over et kortere interval og når man lader Δx gå mod nul, så får man momentalfarten (den øjeblikkelige fart) til tidspunktet x_0 . Det er det som er ideen med en differentialkvotient. Derfor bør udtrykket

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

opfattes som den grundlæggende idé, og tangentens hældning som noget sekundært.

10.6 Differentialkvotienter ved beregning

I praksis finder vi differentialkvotienter ved tabelopslag. Det er hurtigt og nemt. Men hvor kommer formlerne i tabellen fra? Dem kan man bevise ud fra den for-

melle definitionen af differentialkvotienten, vi så i sidste afsnit. Desværre er det lidt bøvlet, så vi vil derfor starte med at lidt opvarmning.

Opvarmning

Kvadratsætninger

Vi får brug for kvadratsætningerne:

Sætning 10.6.1

(Kvadratsætninger)

For to størrelser a og b gælder:

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Eksempel 10.6.1

Ved at bruge 3. kvadratsætning kan vi nemt regne $(x + 2)(x - 2)$:

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4.$$

Øvelse 10.6.1

Brug kvadratsætningerne til at regne:

a) $(x - y)^2$

b) $(2x + y)^2$

c) $(x + \Delta x)^2$

d) $(x - \Delta x)(x + \Delta x)$

Funktionsværdier

Vi ved godt hvordan man regner en funktionsværdi. Hvis f.eks. $f(x) = 2x + 5$ så kan vi regne funktionsværdien $f(3)$ ved at regne $f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$, right? Vi får i det følgende brug for at regne nogle lidt mere komplicerede funktionsværdier, så det må vi hellere øve os på også.

Eksempel 10.6.2

Vi vil regne funktionsværdien $f(x+2)$ for funktionen med forskriften $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} f(x+2) &= (x+2)^2 && \text{(indsat } x+2 \text{ i forskriften)} \\ &= x^2 + 2^2 + 2 \cdot x \cdot 2 && \text{(1. kvadratsætning)} \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

Øvelse 10.6.2

- a) Lad $f(x) = 5x + 1$. Bestem $f(2)$.
- b) Lad $f(x) = 2x - 3$. Bestem $f(s+t)$.
- c) Lad $f(x) = -x + 1$. Bestem $f(a+2)$.
- d) Lad $f(x) = 2x^2$. Bestem $f(x-1)$.
- e) Lad $f(x) = x^2$. Bestem $f(\Delta x)$.
- f) Lad $f(x) = 2x^2 + x$. Bestem $f(x + \Delta x)$.
- g) Lad $f(x) = 5$. Bestem $f(2\Delta x)$.

Forkortning af brøker

Vi husker fra folkeskolen at man forkorter en brøk ved at dividere med det samme tal i tæller og nævner. F.eks. kan vi forkorte brøken $\frac{4}{6}$ med 2 og få $\frac{2}{3}$. Skal man forkorte en brøk med bogstaver skal man huske at man skal dividere i hvert led (led er adskilt af plus og minus).

Eksempel 10.6.3

Vi kan forkorte brøken $\frac{ax+ay}{2a}$ med a :

$$\frac{ax+ay}{2a} = \frac{x+y}{2}.$$

Eksempel 10.6.4

Vi kan forkorte brøken $\frac{x\Delta x + \Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x}$ med Δx . Det er nemt at se, hvis vi omskriver den lidt først:

$$\begin{aligned} \frac{x\Delta x + \Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} &= \frac{x \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta x - \Delta x \cdot \Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{x \cdot \cancel{\Delta x} + 1 \cdot \cancel{\Delta x} - \cancel{\Delta x} \cdot \Delta x}{\cancel{\Delta x}} \\ &= x + 1 - \Delta x \end{aligned}$$

Øvelse 10.6.3

Forkort brøkerne.

a) $\frac{9}{3}$

b) $\frac{ab}{ac}$

c) $\frac{ax+bx}{cx}$

d) $\frac{ax+bx}{x}$

e) $\frac{x\Delta x+\Delta x}{x^2\Delta x}$

f) $\frac{\Delta x}{(\Delta x)^2}$

g) $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$

Grænseværdier

Grænseværdier er alle elevers skræk. Hvad betyder dette mystiske " $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ "? Men som vi skal se i de følgende eksempler, er det nemt at bestemme grænseværdier i praksis.

Eksempel 10.6.5

Vi vil bestemme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}(5 + \Delta x)$.

Det betyder "Det som $5 + \Delta x$ kommer tæt på, når Δx kommer tæt på 0".

Vi prøver med nogle forskellige "små" værdier for Δx :

Δx	$5 + \Delta x$
0,1	$5 + 0,1 = 5,1$
0,01	$5 + 0,01 = 5,01$
0,000001	$5 + 0,000001 = 5,000001$

Det er tydeligt at $5 + \Delta x$ nærmer sig 5 når Δx nærmer sig 0. Altså er

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0}(5 + \Delta x) = 5$$

I praksis vil man ikke lave en tabel som i eksemplet. Det er klart at $5 + \Delta x$ vil nærme sig 5 når Δx kommer tæt på nul. Det kan vi se direkte på udtrykket.

Øvelse 10.6.4

Bestem grænseværdierne:

- a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x)$
- b) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 \cdot \Delta x - 1)$
- c) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{5}$
- d) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x}$
- e) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + x \cdot \Delta x)$

Eksempel 10.6.6

Vi vil bestemme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x}{x + \Delta x}$.

Det er hurtigt klaret, fordi vi kan se der står det samme i tæller og nævner og derfor er brøken konstant lig med 1 uanset hvad Δx er. Men vi lader da en tabel for en ordens skyld:

Δx	$\frac{x + \Delta x}{x + \Delta x}$
0,1	$\frac{x+0,1}{x+0,1} = 1$
0,01	$\frac{x+0,01}{x+0,01} = 1$
0,000001	$\frac{x+0,000001}{x+0,000001} = 1$

Vi kan se at $\frac{x + \Delta x}{x + \Delta x}$ altid giver 1, uanset hvad Δx er. Så grænseværdien må også være 1. Altså

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x}{x + \Delta x} = 1$$

Eksempel 10.6.7

Vi vil bestemme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + 7)$.

Vi ser at $2x + 7$ slet ikke indeholder Δx , og derfor ændrer udtrykket sig ikke, når Δx går mod 0. Så

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + 7) = 2x + 7.$$

Ud fra de eksempler vi har set, kunne det godt se ud til, at man bare kan sætte 0 ind i stedet for Δx , når man regner grænseværdierne. Men det er ikke det som grænseværdi betyder og man kan risikere komme frygtelig galt afsted, hvis man prøver.

Eksempel 10.6.8

Vi vil regne grænseværdien $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot \Delta x}{\Delta x} + 2\Delta x \right)$.

Vi ser at vi ikke kan sætte 0 ind, da der så vil stå 0 i nævneren i brøken og man kan ikke dele med 0. Men vi kan forkorte brøken med Δx , så det gør vi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} + 2\Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + 2\Delta x) = x$$

Altså konkluderer vi at:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot \Delta x}{\Delta x} + 2\Delta x \right) = x$$

Øvelse 10.6.5

- a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a)$.
- b) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{2\Delta x}{2\Delta x} \right)$.
- c) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{2\Delta x}{\Delta x} \right)$.
- d) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta x} \right)$.
- e) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x}{\Delta x} + x \right)$.

Beregning af differentialkvotienter

Nu er vi klar til at se hvordan man kan regne differentialkvotienter uden at bruge tabel eller computer.

Vi husker definitionen af differentialkvotienten:

Lad f være en funktion og $x_0 \in \text{Dm}(f)$. Hvis grænseværdien

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

eksisterer, så siges funktionen at være differentialbel i x_0 , og differentialkvotienten $f'(x_0)$ er givet ved

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Funktionen siges at være differentialbel, såfremt den er differentiabel for alle $x_0 \in \text{Dm}(f)$.

For at finde differentialkvotienten for en funktion f skal vi altså regne :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Hvis det viser grænseværdien ikke findes, ja så er funktionen ikke differentialbel. Hvis grænseværdien findes, så er funktionen differentiabel og vi har fundet dens differentialkvotient. Bemærk at jeg nu skriver x i stedet for x_0 . For mere info om det, se ekstraafsnit til sidst, men det har ikke rigtig nogen praktisk betydning for os.

Vi regner differentialkvotienter i to skridt. Først regner vi på differenskvotienten (sekantens hældning):

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

hvorefter vi finder f' ved at tage vi grænseværdien af den beregnede differenskvotient.

Eksempel 10.6.9

Vi regner først differenskvotienten:

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} && \text{(Da } f(x) = x^2 \text{)} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} && \text{(1. Kvadratsætning)} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} && (x^2 \text{ gået ud)} \\ &= 2x + \Delta x && \text{(forkortet med } \Delta x \text{)} \end{aligned}$$

Nu mangler vi så bare at bestemme grænseværdien for differenskvotienten:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x).$$

Vi forestiller os at Δx bliver uendelig småt, hvad er der så tilbage? Det må være $2x$. Altså er

$$f'(x) = 2x.$$

Øvelse 10.6.6

Beregn som i eksempel 10.6.9 differentialkvotienten for følgende funktioner

- a) $f(x) = -x^2$
- b) $f(x) = x^2 + 1$
- c) $f(x) = 2x^2$
- d) $f(x) = 2x + 1$
- e) $f(x) = 0$
- f) $f(x) = 3x^2 - x$

Øvelse 10.6.7

Beregn som i eksempel 10.6.9 differentialkvotienten for følgende funktioner

- a) $f(x) = k$, hvor k er en konstant.
- b) $f(x) = ax + b$, hvor a og b er to konstanter (som vi kender i en lineær funktion selvfølgelig)

Ekstra

Da det kom til at regne de konkrete differentialkvotienter, begyndte vi pludselig at skrive x i stedet for x_0 . Skriver man x_0 betyder det et eller andet fast tal, mens x er en variable og kan være alle tal. Da vi nu er interesseret i $f'(x)$ for et hvilket som helst x (i $\text{Dm}(f)$), dropper vi betegnelsen x_0 og skriver bare x .

10.7 Kontinuitet (A)

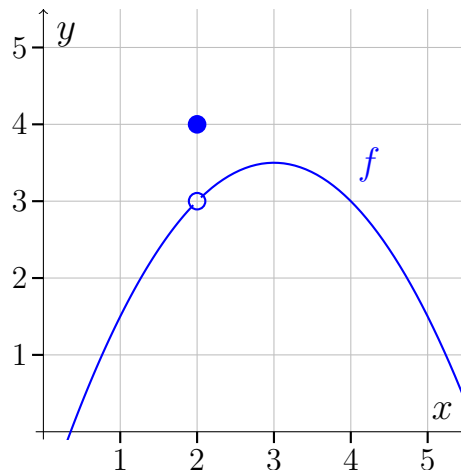
Vi kender ordet "kontinuitet" fra almindelig tale. Her betyder det, at der er sammenhæng i en udvikling, proces eller lignende. I matematik taler vi om *kontinuerte funktioner* og her har det (selvfølgelig) en matematisk betydning. Definitionen er lidt kompliceret, og derfor vil vi starte med at give en grafisk forklaring af begrebet (som vi også gjorde med differentialkvotienten):

Grafisk forklaring

Vi starter med at begrænse os til funktioner som ikke har huller i deres definitions-mængde. Her er en kontinuert funktion en funktion som har en sammenhængende graf. Lad os se på et eksempel.

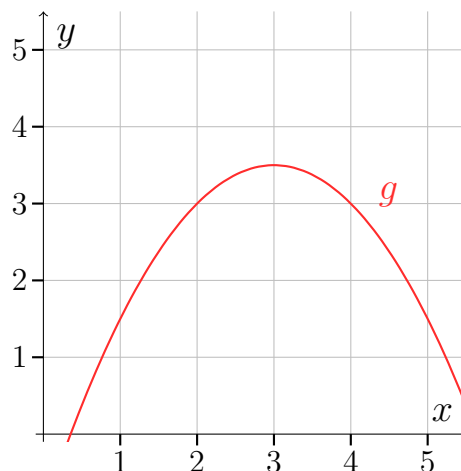
Eksempel 10.7.1

Betragt funktionen f :



Funktionen er et almindeligt andengradspolynomium bortset fra at den laver et ”hop” i $x = 2$, sådan at funktionsværdien i $x = 2$ pludselig er 4 i stedet for 3, som den ville være, hvis der ikke var noget hop. Vi ser at grafen ikke hænger sammen, og f er derfor ikke kontinuert. Vi siger også at den er *diskontinuert*.

Vi tegner en ny funktion g som er mængden til f , bortset fra den ikke laver noget hop:



Vi ser at grafen hænger sammen og funktionen g er derfor kontinuert.

Vi er ikke vant til at funktioner ”hopper” som i ovenstående eksempel, men der er ikke noget ulovligt i det. Funktioner kan hoppe. De er så bare ikke kontinuerte.

Definition af kontinuitet

Den grafiske forståelse rækker desværre ikke helt. Vi har brug for en rigtig definition:

Definition 10.7.1

Lad f være en funktion og lad $x_0 \in \text{Dm}(f)$. Funktionen f er kontinuert i x_0 , hvis den opfylder:

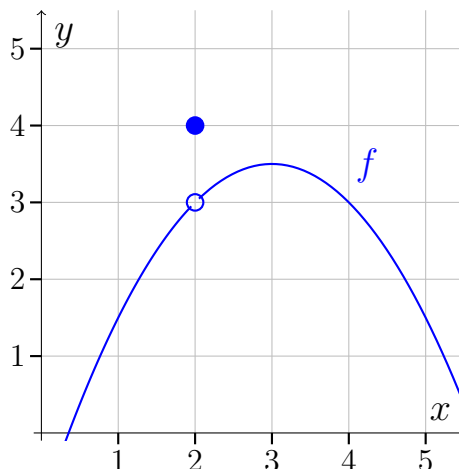
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

Er f kontinuert i alle tal i $\text{Dm}(f)$ siges f at være *kontinuert*.

Definitionen forklares bedst gennem eksempler. Lad os vende tilbage funktionerne f fra eksempel 10.7.1:

Eksempel 10.7.2

Så vi havde funktionen f :



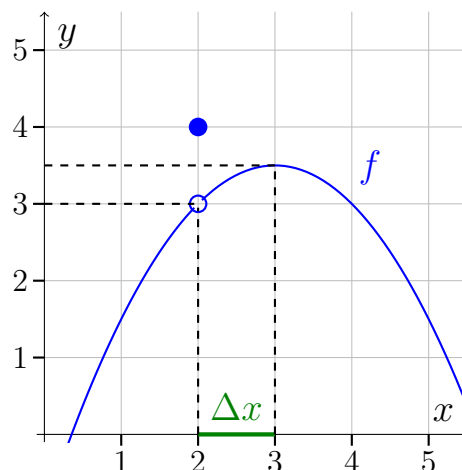
Vi vil nu bruge definitionen til at undersøge, om funktionen er kontinuert i $x_0 = 2$. Så vi skal altså finde ud af om:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

Da $x_0 = 2$ bliver ligningen vi skal undersøge til:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(2 + \Delta x) = f(2)$$

Lad os regne grænseværdien $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(2 + \Delta x)$. Vi vælger et Δx og tegner det ind på grafen:



Vi aflæser på grafen at $f(2 + \Delta x) = 3,5$ med den Δx -værdi vi har valgt. Nu skal vi lade Δx gå mod nul. Vi kan se på grafen at når Δx bliver mindre så kommer funktionsværdien tættere på 3. Altså er

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(2 + \Delta x) = 3$$

Men $f(2)$ er ikke 3. Den er 4. Vi kan konkludere at f ikke er kontinuert i $x_0 = 2$ og derfor er funktionen samlet set ikke kontinuert.

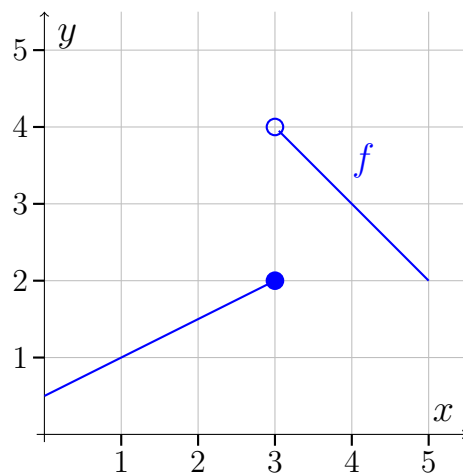
Skal vi afgøre om en funktion er kontinuert skal vi altså tjekke om:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Dvs. vi skal undersøge om en grænseværdi er lig med en funktionsværdi. Men nogle gange kan man slet ikke finde grænseværdien, fordi den ikke eksisterer. Er det tilfældet, så kan funktionen selvfølgelig ikke opfylde kravet for kontinuitet, og derfor er funktionen ikke kontinuert i det pågældende x_0 .

Eksempel 10.7.3

Betragt den stykkevis lineære funktion:



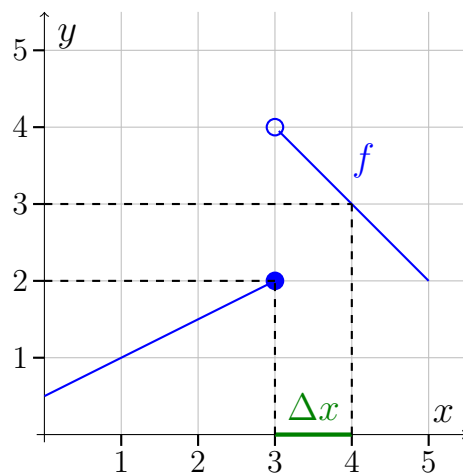
Vi vil nu undersøge om funktionen er kontinuert i $x_0 = 3$. Så vi skal altså undersøge om:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

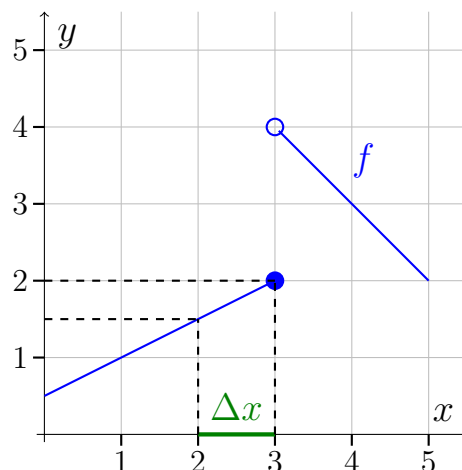
Da $x_0 = 3$ bliver ligningen vi skal undersøge til:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(3 + \Delta x) = f(3).$$

Lad os regne grænseværdien $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(3 + \Delta x)$. Vi vælger et Δx og tegner det ind på grafen:



Vi kan se på grafen at når Δx går imod nul, går funktionsværdien imod 4. Så vi tænker at grænseværdien nok er 4. MEN lad os prøve med et negativt Δx



Vi kan se at når Δx kommer tættere på 0, så kommer funktionsværdien tættere på 2. Så grænseværdien afhænger altså af om Δx er positivt (der var den 4) eller negativ (den var den 2). Det duer ikke. Grænseværdien skal være ens uanset fortegn på Δx . Så grænseværdien $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(2 + \Delta x)$ findes slet ikke, og derfor opfylder f ikke kravet for at være kontinuert.

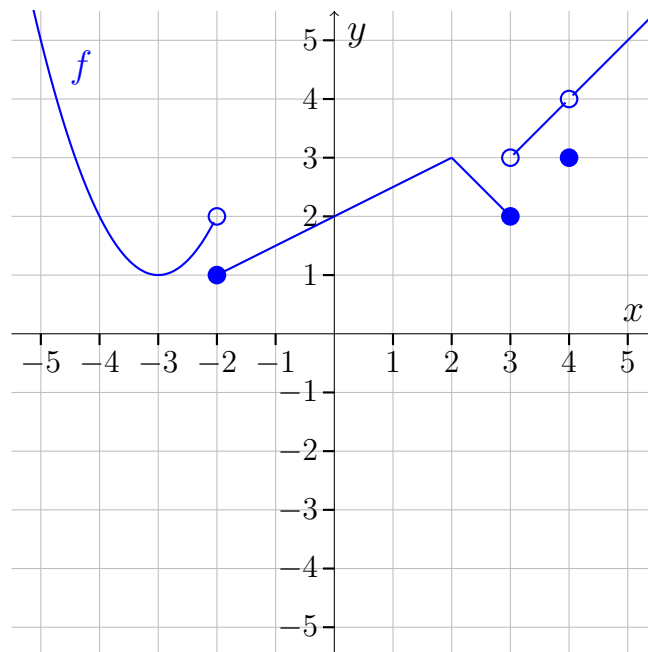
Vi husker fra afsnit 10.5 at diskontinuitet kan medføre, at en funktion ikke er differentiabel. Det viser sig faktisk, at hvis en funktion er differentiabel, så er den også nødt til at være kontinuert. Der gælder altså følgende sætning.

Sætning 10.7.1

Alle differentiable funktioner er kontinuerte.

Øvelse 10.7.1

Betragt funktionen f :



- a) Er f kontinuert i $x_0 = 1$?
- b) Er f differentiabel i $x_0 = 1$?
- c) Er f kontinuert?
- d) Er f differentiabel?
- e) Bestem de x -værdier hvor f ikke er kontinuert.
- f) Bestem de x -værdier hvor f ikke er differentiabel.
- g) Bestem de x -værdier hvor f er kontinuert, men ikke differentiabel.

Øvelse 10.7.2

Betragt funktionerne:

a) $f(x) = 2x - 2$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{for } x < 3 \\ -x + 5, & \text{for } x \geq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{for } x < 4 \\ -x + 5, & \text{for } x \geq 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x < 3 \\ -x + 12, & \text{for } x \geq 3 \end{cases}$

For hver funktion, afgør om den er:

1. Kontinuert i $x_0 = 3$.
2. Differentiabel i $x_0 = 3$.
3. Kontinuert.
4. Differentiabel.

Du kan f.eks. tegne i GeoGebra.

Øvelse 10.7.3

Antag at f er en differentiabel funktion.

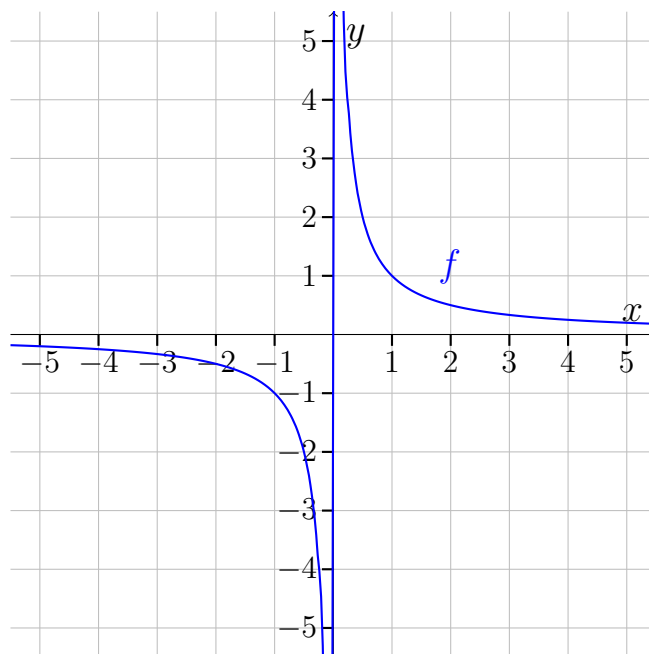
- a) Er f så også kontinuert?

Ekstra: Grafer med huller i definitionsmængden

Grafer som har huller i definitionsmængden, kan godt være kontinuerte uden at være sammenhængende.

Eksempel 10.7.4

Lad os se på funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$. Grafen ser således ud:



Grafen hænger ikke sammen, men den springer i $x = 0$, hvor funktionen slet ikke er defineret. Så hvis man vælger $x_0 \in \text{Dm}(f)$, hvilket udelukker $x_0 = 0$, så vil f opfylde kravet:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

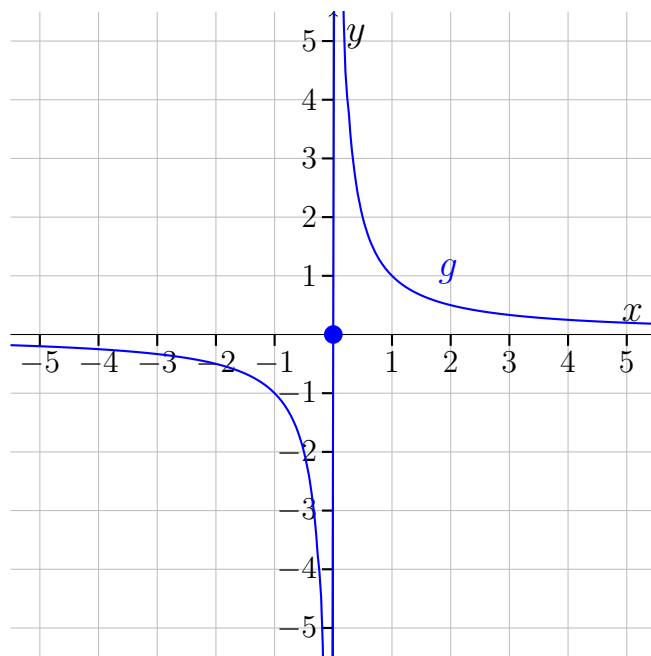
og fordi f dermed er kontinuert i alle $x_0 \in \text{Dm}(f)$, er f kontinuert.

Eksempel 10.7.5

Vi vil undersøge funktionen g :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Denne funktion er magen til funktionen f fra sidste eksempel, bortset fra vi har givet den en værdi i $x = 0$, nemlig 0. Så $f(0) = 0$. Vi tegner grafen.



Vi kan se at det er samme graf som før, bortset fra den indeholder et ekstra punkt, nemlig $(0, 0)$. Som i sidste eksempel er grafen ikke sammenhængende. Den springer i $x = 0$, men denne gang ligger 0 i definitionsmængden for f , og fordi funktionen ikke er kontinuert i $x_0 = 0$, er funktionen ikke kontinuert.

Øvelse 10.7.4

Betragt funktionerne:

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

b) $f(x) = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \neq -1 \\ 0 & \text{for } x = -1. \end{cases}$

For hver funktion, afgør om den er:

1. Kontinuert i $x_0 = -1$.
2. Differentiabel i $x_0 = -1$.
3. Kontinuert.
4. Differentiabel.

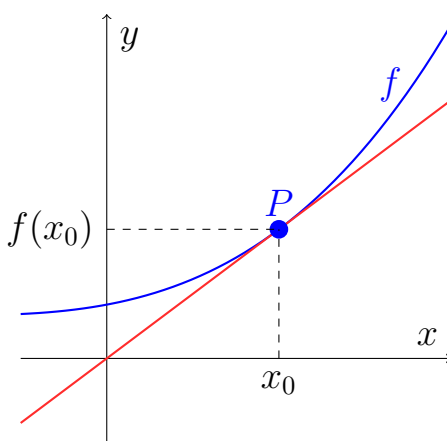
10.8 Beviser - differentialregning

Tangentens ligning

Vi vil starte med at bevise den sætning der kan bruges til at bestemme tangentens ligning. Fremgangsmåden er magen til den vi brugte til at finde tangentens ligning, inden sætningen blev introduceret.

Sætning 10.3.1

Lad f være en differentiabel funktion, og lad der være givet en tangent igennem et punkt $P(x_0, f(x_0))$:



Da er tangentens ligningen givet ved:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Bevis

Lad f være en differentiabel funktion. Da er tangenten gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ givet ved ligningen:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Tangenten er en lineær funktion, så den har ligningen:

$$y = ax + b.$$

Vi skal bestemme a og b og vi starter med a . Vi husker at man kan bruge differentialkvotienten til at finde hældningen. Så tangentens hældning a i punktet $(x_0, f(x_0))$ er givet ved $f'(x_0)$. Så $a = f'(x_0)$ og det kan vi sætte ind i vores ligning:

$$y = f'(x_0)x + b.$$

Vi vil nu bestemme b . Vi ved at tangenten går igennem $(x_0, f(x_0))$ så det punkt skal passe ind i tangentens ligning, når vi udskifter x med x_0 og y med $f(x_0)$:

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b.$$

Vi isolerer b :

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Vi sætter nu b ind i vores ligning og får

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Vi bytter rundt på rækkefølgen:

$$y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0),$$

og sætter $f'(x_0)$ ud foran en parentes

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

og vi er færdige!

Beviser for udvalgte differentialkvotienter

Vi vil nu bevise nogle for udvalgte differentialkvotienter. Altså de regler vi finder i tabellen i formelsamlingen, når vi skal differentiere en funktion. Vi vil bruge metoden fra afsnit 10.6,. Dvs. man starter med at opskrive differenskvotienten (sekantens hældning), regner på den, og tager så grænseværdien til sidst. Denne fremgangsmåde går også under navnet tretrinsreglen.

Vi starter med den mest simple regel fra formelsamlingen. Jeg formulere reglen som en sætning:

Sætning 10.8.1

Lad k være en vilkårlig konstant. Funktionen $f(x) = k$ differentialbel med $f'(x) = 0$

Bevis

Vi starter med at opskrive differenskvotienten:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Forskriften for f er $f(x) = k$, så det kan vi indsætte i differenskvotienten.

Funktionen er konstant lig med k , så alle funktionsværdierne er k :

$$\frac{k - k}{\Delta x}$$

Vi reducerer

$$\frac{k - k}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Vi ser at differenskvotienten er nul. Dejligt simpelt. Vi tager nu grænseværdien for Δx gående mod nul. Vi husker det betyder, at vi skal se hvad der er tilbage, når Δx bliver forsvindende lille. Men der er slet ikke noget Δx i vores differenskvotient, så der sker ikke noget når Δx går mod nul.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (0) = 0$$

Vi konkluderer at f er differentiabel (differenskvotienten havde en grænseværdi) og at differentialkvotienten er

$$f'(x) = 0$$

I beviset oven over var vi heldige at det var nemt at regne differenskvotienten. Normalt er det den svære del og derfor også den del som fylder i beviserne. Man kan altid opskrive differenskvotienten, men det kan være en stor udfordring at regne på den, så det bliver muligt at tage grænseværdien.

Sætning 10.8.2

Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ differentialbel med $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Bevis

Vi starter med at opskrive differenskvotienten:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Forskriften for f er $f(x) = \sqrt{x}$, så det kan vi indsætte i differenskvotienten:

$$\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Vi ser at det ikke umiddelbart er til at tage grænseværdien af denne brøk. Både tæller og nævner vil gå mod nul, når Δx går mod nul, og det er derfor ikke til at vide hvad grænseværdien er. Det problem løser vi ved at regne videre på

brøken. Først forlænger vi den med $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$:

$$\frac{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})\Delta x}$$

Vi husker nu den 3. kvadratsætning $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Vi ser at tælleren har samme form som i kvadratsætningen med $a = \sqrt{x + \Delta x}$ og $b = \sqrt{x}$. Så vi bruger kvadratsætningen til at omskrive den:

$$\frac{\sqrt{x + \Delta x}^2 - \sqrt{x}^2}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})\Delta x}$$

I tælleren går kvadratrod og kvadrat (dvs. ”i anden”) ud med hinanden:

$$\frac{x + \Delta x - x}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})\Delta x}$$

I tælleren går x ud med $-x$:

$$\frac{\Delta x}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})\Delta x}$$

Vi kan nu forkorte med Δx :

$$\frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Vi tager nu grænseværdien for Δx gående mod nul. Vi husker det betyder, at vi skal se hvad der er tilbage når Δx bliver forsvindende lille.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vi konkluderer at f er differentiabel (differenskvotienten havde en grænseværdi) og at differentialkvotienten er

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vi slutter med at bevise reglen for $f(x) = x^n$. Den kræver et at man har været igennem A-niveau delene i dette emne. I dette bevis vil vi ikke tage udgangspunkt i differenskvotienten. I stedet vil vi bruge regneregler fra formelsamlingen.

Sætning 10.8.3

Funktionen $f(x) = x^n$ har differentialkvotienten $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Bevis

Tricket i dette bevis er at omskrive f til en form vi kan differentiere ved hjælp af formelsamlingen. Vi starter med at omdøbe f til h , så der ikke kommer forvirring, når vi skal bruge regler fra formelsamlingen. Så vi har altså $h(x) = x^n$, og vi skal vise at $h'(x) = nx^{n-1}$

Da $\ln(x)$ er den omvendte funktion til e^x , gælder $x = e^{\ln(x)}$. Så vi kan skrive h som:

$$h(x) = (e^{\ln(x)})^n$$

Vi bruger nu reglen $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$:

$$h(x) = e^{\ln(x) \cdot n}$$

Vi ser at h har form som en sammensat funktion $f(g(x))$ med

$$g(x) = \ln(x) \cdot n \quad \text{og} \quad f(x) = e^x.$$

Da både f og g er differentiable er den sammensatte funktion også differentiablel. Vi differentiere nu g og f :

$$g'(x) = \frac{1}{x} \cdot n \quad \text{og} \quad f'(x) = e^x.$$

Vi kan nu bruge reglen for sammensatte funktioner og differentiere h :

$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Reglen for sammensatte funktioner
$= e^{\ln(x) \cdot n} \cdot \frac{1}{x} \cdot n$	Forskrifter indsat i reglen
$= (e^{\ln(x)})^n \cdot \frac{1}{x} \cdot n$	Brugt at $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
$= x^n \cdot \frac{1}{x} \cdot n$	Da $e^{\ln(x)} = x$
$= \frac{x^n}{x} \cdot n$	Ganger x^n op i tælleren
$= x^{n-1} \cdot n$	Bruger reglen $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
$= n \cdot x^{n-1}$	bytter rundt på rækkefølgen i produktet

Vi husker nu at funktionen oprindeligt hed f , så vi konkluderer at:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Regler for grænseværdier

For at lave resten af beviserne i dette afsnit har vi brug for nogle regler for grænseværdier. Grænseværdierne i reglerne er på formen $\lim_{x \rightarrow a}(\dots)$, men det er bare en mere generel form end den I kender, og I kan bare tænke på dem som om der står $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}(\dots)$.

Sætning 10.8.4

(Regneregler for grænseværdier)

Antag at grænseværdierne $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ findes og lad k være en vilkårlig konstant. Da gælder:

Regel 1:

$$\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Regel 2:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Regel 3

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Regel 4

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Beviser for udvalgte regneregler for opbyggede funktioner

Man beviser regnereglerne for opbyggede funktioner ligesom man beviser reglerne for de enkelte funktioner.

Sætning 10.8.5

Lad f være en differentiabel funktion og k en konstant. Da er $h(x) = k \cdot f(x)$ differentiabel og differentialkvotienten er $h'(x) = k \cdot f'(x)$.

Bevis

Vi opskriver differenskvotienten:

$$\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}.$$

Da $h(x) = k \cdot f(x)$ får vi:

$$\frac{k \cdot f(x + \Delta x) - k \cdot f(x)}{\Delta x}.$$

Vi sætter k ud foran en parentes:

$$\frac{k(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x},$$

og flytter k ned foran brøken:

$$k \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Vi skal nu undersøge om differenskvotienten har en grænseværdi for Δx gående mod nul. Alså om følgende grænseværdi kan bestemmes:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(k \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right).$$

Da f er differentiabel ved vi at grænseværdien $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ findes så vi kan bruge regel 1 for grænseværdier (sætning 10.8.4)) til at flytte k ud foran "lim":

$$k \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = k \cdot f'(x),$$

og h er altså differentiabel med differentialkvotient $h'(x) = k \cdot f'(x)$.

Sætning 10.8.6

Lad f og g være differentiable funktioner. Da er $h(x) = f(x) + g(x)$ differentiabel og differentialkvotienten er $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Bevis

Vi opskriver differenskvotienten

$$\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}.$$

Da $h(x) = f(x) + g(x)$ får vi:

$$\frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x}.$$

Vi ophæver parenteser i tælleren:

$$\frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x},$$

og ændrer lidt på rækkefølgen:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Vi deler brøken op:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Vi skal nu undersøge om differenskvotienten har en grænseværdi for x gående mod nul. Vi skal altså kigge på:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right).$$

Vi genkender de to led inde i parenteserne som differenskvotienterne (differens - ikke differential) for f og g . Da vi ved at f og g er differentiable ved vi, at hvis vi lader $\Delta x \rightarrow 0$, så vil de to differenskvotienter have en grænseværdi (nemlig $f'(x)$ og $g'(x)$), og vi kan derfor bruge Regel 2 (sætning 10.8.4) til at dele udtrykket op:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

hvilket er det samme som

$$f'(x) + g'(x)$$

Vi konkluderer at h er differentiable med differentialkvotient

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Øvelse 10.8.1

Bevis følgende:

Lad f og g være differentiable funktioner. Da er $h(x) = f(x) - g(x)$ differentiable og differentialkvotienten er $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Tag udgangspunkt i beviset ovenover.

Bevis for produktregel (A)

Sætning 10.8.7

Lad f og g være differentiable funktioner. Da er $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ differentiable med differentialkvotient $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Bevis

Vi starter selvfølgelig med at opskrive differenskvotienten:

$$\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

Vi indsætter nu forskriften for h i differenskvotienten:

$$\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

Vi vil nu lave en snedig omskrivning af tælleren. Vi trækker $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$ fra, hvorefter vi skynder os at lægge det til igen, så vi ikke ændrer brøkens værdi:

$$\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

Vi deler nu brøken op i to ved det blå plustegn:

$$\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

Vi faktorerer tælleren i første brøk med $f(x + \Delta x)$ og tælleren i anden brøk med $g(x)$:

$$\frac{f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} + \frac{g(x)(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x}$$

Vi sætter nu $f(x + \Delta x)$ ned foran første brøk og $g(x)$ ned foran anden brøk:

$$f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Vi finder nu $h'(x)$ ved at tage grænseværdien:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

Vi bruger Regel 2 (10.8.4) for grænseværdier til at dele grænseværdien op:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

Vi bruger nu Regel 4 (10.8.4) til at dele første grænseværdi op. I den anden grænseværdi bruger vi Regel 1 til at trække $g(x)$ ud foran (se evt. efterfølgende kommentar):

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) + g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

Måske er du forvirret over, hvorfor vi har lov til at betragte $g(x)$ som en konstant. Det skyldes, at det er Δx som er den variable i forhold til selve grænseværdien (det er Δx som går mod nul) og da $g(x)$ ikke indeholder noget Δx , er $g(x)$ konstant (i denne sammenhæng).

Da f er differentiable er den også kontinuert og derfor er $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$, så vi har

$$h'(x) = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) + g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

De to grænseværdier genkender vi som hhv. $g'(x)$ og $f'(x)$, så vi har:

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Vi bytter lidt rund på rækkefølgen og får det ønskede resultat:

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Bevis for at alle differentiable funktioner er kontinuerte (A)

Der findes kontinuerte funktioner som ikke er differentiable (hvis de har ”knæk”). Men alle differentiable funktioner er kontinuerte og det vil vi nu bevise.

Sætning 10.7.1

Alle differentiable funktioner er kontinuerte.

Bevis

Lad f være en differentiable funktion. Vi skal vise at f er kontinuert. Ifølge definitionen af kontinuitet (definition 10.7.1) skal vi vise at

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

Da f er differentiable har den en differentialkvotient:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Vi vil nu gøre noget smart. Vi vil gange med nul på begge sider. Normalt er det ikke nogen fantastisk idé at gange igennem med nul, men vi vil gøre det på en snedig måde. På højre side vil vi nemlig skrive nul som $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)$. Det kan

vi selvfølgelig gøre fordi at denne grænseværdi **er** nul.

$$f'(x) \cdot 0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)$$

Venstresiden er bare nul og vi bruger Regel 4 for grænseværdier til at omskrive højresiden:

$$0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x \right)$$

Vi reducerer

$$0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x))$$

Vi lægger nu $f(x)$ til på begge sider. På højresiden vil vi skrive $f(x)$ som $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)$. Det må vi gøre fordi at $f(x)$ ikke indeholder noget Δx og derfor ikke ændrer sig når $\Delta x \rightarrow 0$.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)$$

Vi bruger Regel 2 for grænseværdier og samler udtrykket til én grænseværdi.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x) + f(x))$$

Vi reducerer

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x)$$

og det var jo netop det vi skulle vise.

Kapitel 11

Funktionsundersøgelse

Ved en funktionsundersøgelse for en funktion forstår vi bestemmelse af:

- definitionsmængde
- værdimængde
- nulpunkter
- fortegn
- monotoniforhold
- ekstrema

Ud fra dette kan vi se at en funktionsundersøgelse handler om at beskrive grafens forløb. Disse begreber burde allerede være kendt fra 1. år, men nu vil vi bruge differentialregning til at bestemme monotoniforhold, ekstrema og værdimængden, således at disse kan bestemmes uden at tegne grafen.

Har man matematik på A-niveau, forventes der også en bestemmelse af Krumningsforhold (som introduceres til sidst i dette kapitel).

11.1 Funktionsundersøgelse fra første år

Vi starter med at opfriske begreberne fra 1 år. Hvis I har problemer med at regne følgende øvelse så gå tilbage og læs afsnittet om funktioner

Øvelse 11.1.1

Lad $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. Lav en funktionsundersøgelse af f ved aflæsning i GeoGebra. I skal altså bestemme:

- a) Definitionsmængden
- b) Værdimængden
- c) Nulpunkter
- d) Fortegn
- e) Monotoniforhold
- f) Ekstrema

Vi får brug for at lave fortegnundersøgelser ved beregning (uden at tegne). Så det må vi hellere træne også:

Eksempel 11.1.1

Lad $f(x) = x^2 + x$. Vi vil lave en fortegnundersøgelse uden at tegne grafen. Vi starter med nulpunkter. Funktionen f er et andengradspolynomium og vi beregner først diskriminanten:

$$d = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1.$$

Vi indsætter nu i nulpunktsformlerne og ser at:

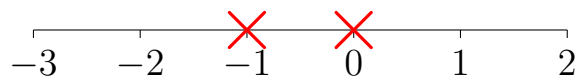
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

og

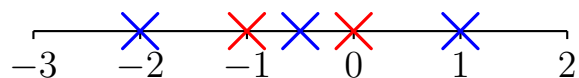
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Altså f har nulpunkterne $x_1 = 0$ og $x_2 = -1$.

Nu kan vi finde fortegnsvariationen. Det gør vi ved at lave et sildeben. I sildebenet skal vi bruge begge vores nulpunkter:



Vi skal også bruge nogle x -værdier der omgiver vores nulpunkter. Vi bestemmer selv hvilke, men der skal være x -værdier mellem nulpunkter, og i hver ende også som vist her:



Vi har altså valgt x -værdierne -2 , $-0,5$ og 1 . Vi sætter x -værdierne ind i sildebenet:

x	-2	-1	-0.5	0	1
$f(x)$	2	0	-0.25	0	2

Ved at kigge på funktionsværdierne kan vi se at f starter med at være positiv indtil vi rammer første nulpunkt i $x = -1$, hvorefter den bliver negativ, og så igen positiv efter andet nulpunkt 0 . Altså:

$f(x)$ er positiv for $x \in]-\infty; -1[\cup]0; \infty[$

$f(x)$ er negativ for $x \in]-1; 0[$

$f(x)$ er nul når $x = -1$ og når $x = 0$.

Vi husker at $\in$ betyder "tilhører" og $\cup$ betyder de to intervaller til sammen (foreningsmængden).

Øvelse 11.1.2

Bestem med samme metode som i eksempel 11.1.1 en fortegnundersøgelse for følgende funktioner:

a) $f(x) = x^2 - x - 6$

b) $f(x) = 2x + 8$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = -7$

11.2 Monotoniforhold med differentialregning

Vi skal nu se hvordan man kan bestemme monotoniforhold ved hjælp af differentialregning. Vi lægger hårdt ud med en sætning:

Sætning 11.2.1

Lad f være en differentiabel funktion defineret på et interval I .

Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in I$, så er f voksende på I .

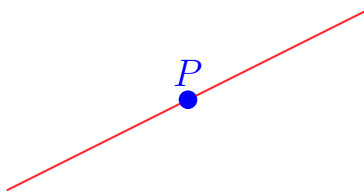
Hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in I$, så er f aftagende på I .

Hvis $f'(x) = 0$ for alle $x \in I$, så er f konstant på I .

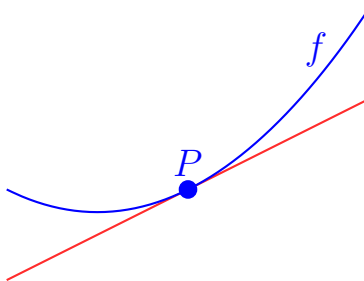
Vi vil nu argumentere for, hvorfor sætningen er rigtig. Vi vil se på første påstand (vi kan argumentere tilsvarende for de andre påstande):

Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in I$, så er f voksende på I .

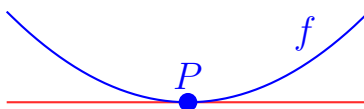
Vi husker at $f'(x)$ er tangentens hældning, så $f'(x) > 0$ betyder at tangenten har en positiv hældning. Lad os derfor tegne en tangent med en positiv hældning i et punkt P (kun en linje, som kunne være en tangent – vi venter med funktionen).



Vi forestiller os nu, hvordan funktion kan ligge. Det er klart at hvis den røde linje skal være tangent i P , så må funktionen være voksende omkring punktet P , hvor linjen er tangent, som vist her:



Så når $f'(x) > 0$ må funktionen altså være voksende. Vi kan argumenter tilsvarende, når $f'(x) < 0$ eller $f'(x) = 0$. I sætningen nævnes også intervaller. Det er fordi at begreberne voksende, aftagende og konstant kun giver mening når vi har et interval. Det kan vi illustrere med situationen:



Vi ser at der er en vandret tangent i P , så $f'(x) = 0$ i P , men funktionen er ikke

konstant omkring P . I sætningen kræves at $f'(x) = 0$ i et helt interval og ikke bare et enkelt x som på tegningen, så vi kan ikke bruge sætningen her.

Ved hjælp af sætning 11.2.1 kan vi nu beregne monotoniforhold for f ved at lave en fortegnundersøgelse af $f'(x)$ (læg mærke til: f' , ikke f). Vi husker fra afsnittet om monotoniforhold fra mathhx bog 1, at monotoniintervallerne også indeholder ekstremumsstederne (de x -værdier hvor funktionen har maks/min), så vi får lukkede intervaller (medmindre funktionen ender i et åbent endepunkt selvfølgelig), når vi opskriver monotoniintervallerne.

Eksempel 11.2.1

Vi vil undersøge monotoniforhold for funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x - 10$. Vi finder først $f'(x)$. Vi får

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x - 8.$$

Nu laver vi en fortegnundersøgelse af $f'(x) = x^2 + 2x - 8$. Vi starter som vi plejer med at finde nulpunkter. Differentialkvotienten $f'(x)$ er et andengradspolynomium, så vi regner diskriminanten først:

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

Vi indsætter nu i nulpunktsformlerne og ser at:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

og

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Vi vælger nu nogle x -værdier, som omgiver nulpunkterne $(-5, 0 \text{ og } 3)$ og laver et sildeben for f' :

x	-5	-4	0	2	3
$f'(x)$	7	0	-8	0	7

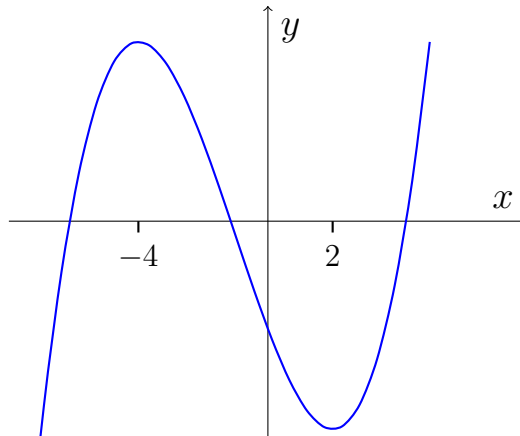
Af sildebena kan vi se at:

$f'(x)$ er positiv for $x \in]-\infty; -4[\cup]2; \infty[$ $f'(x)$ er negativ for $x \in]-4; 2[$.

Ved at benytte sætning 11.2.1 kan vi altså konkludere at

f er voksende for $x \in]-\infty; -4]$ og for $x \in [2; \infty[$.
 f er aftagende for $x \in [-4; 2]$.

Vi tegner nu grafen for at tjekke om det mon passer:



Det passer jah.

Øvelse 11.2.1

Bestem ved beregning monotoniforholdene for følgende funktioner:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 29$

b) $f(x) = -5x + 2$

c) $f(x) = -2x^2 - 4x - 4$

d) $f(x) = x^4 - 4x^3$ (svær)

Monotoniforhold for begrænsede funktioner

Til tider kan man komme ud for at der er begrænsninger på definitionsmængden, og det skal man være opmærksom på, når man bestemmer monotonintervallerne.

Eksempel 11.2.2

Lad $f(x) = x^2 - 7$, hvor $x \in]1; 4]$. Vi vil ved beregning bestemme monotoniforholdene.

Vi finder først f' :

$$f'(x) = 2x$$

Vi finder så nulpunkter for $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \quad (11.1)$$

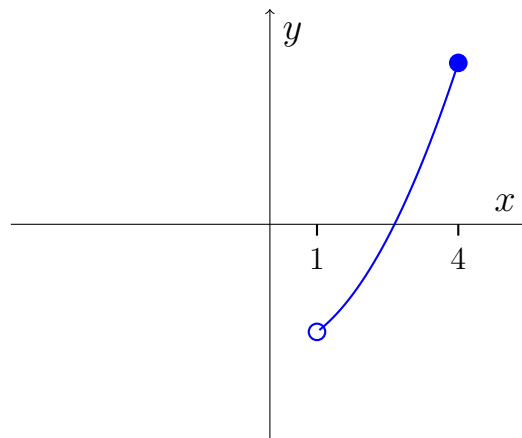
$$2x = 0 \quad (11.2)$$

$$x = 0. \quad (11.3)$$

Vi kan se at nulpunktet ligger udenfor intervallet hvor f er defineret, så nulpunktet er slet ikke interessant. Vi skal altså bare undersøge fortegnet for f' i et vilkårligt punkt i definitionsmængden. Vi vælger 2:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

Vi kan altså konkludere at f er voksende. Vi tegner for at tjekke:



Det passer, f er voksende overalt.

Øvelse 11.2.2

Bestem ved beregning monotoniforholdene for følgende funktioner:

a) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 5$, hvor $x \in]0; \infty[$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, hvor $x \in [1; 2[$.

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, hvor $x \in]-\infty; 3[$

11.3 Ekstrema med differentialregning

I sidste afsnit lærte vi at:

- En funktion er voksende der hvor differentialkvotienten er positiv
- En funktion er aftagende der hvor differentialkvotienten er negativ.

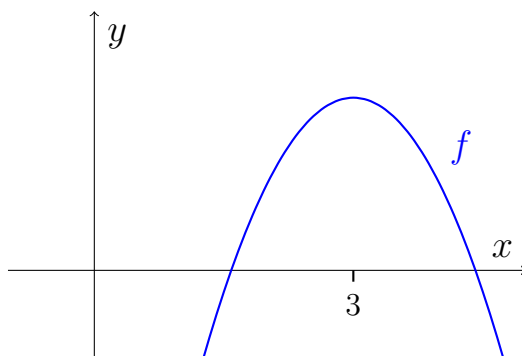
Der hvor en funktionen skifter fra at være voksende til aftagende (eller omvendt) har den ekstrema. Så differentialkvotienten skifter altså fortegn i sådan et ekstremum. Det er derfor oplagt at differentialkvotienten må være nul i sådan et ekstremum og det er indholdet i følgende sætning:

Sætning 11.3.1

Lad f være en differentialbel funktion som er defineret på et åbent interval I .

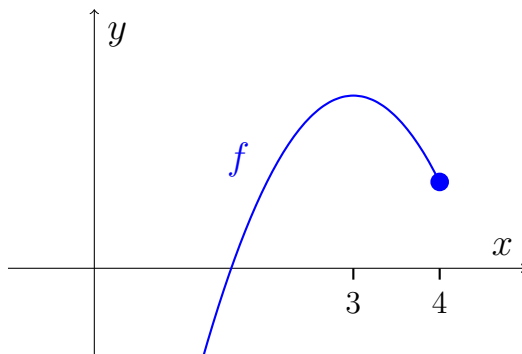
Hvis f har et ekstremum i $x_0 \in I$, så er $f'(x_0) = 0$.

Lad os illustrere sætningen ved at tegne grafen for en funktion f



Som vi kan se har f en vandret tangent (dvs. $f'(x) = 0$) i punktet $x = 3$, hvori funktionen har sit maksimum.

Men sætning 11.3.1 nævner også et åbent interval. Lad os se nærmere på hvad det betyder. Vi ser på funktionen:



Vi kan se grafen, at funktionen har et globalt maksimum i $x = 3$ og et lokalt minimum i $x = 4$. Men der er jo ikke en vandret tangent i $x = 4$! Det er fordi det er et endepunkt, og f er ikke defineret i et åbent interval, der indeholder $x = 4$. Altså kan vi kun være sikker på at $f'(x) = 0$, hvis vi har et ekstremum der ikke ligger i et endepunkt.

Vi konkluderer, at hvis vi skal finde ekstrema for en funktion, skal vi undersøge

alle de steder hvor $f'(x) = 0$, og endepunkterne, hvis f er defineret i et begrænset interval.

Eksempel 11.3.1

Vi vil nu finde ekstrema for funktionen $f(x) = x^3 - 4,5x^2 - 30x$.

Vi starter med at bestemme $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 9x - 30.$$

Vi laver nu en fortegnssundersøgelse for f' . Vi finder først nulpunkter. Differentialkvotienten $f'(x)$ er et andengradspolynomium, så vi regner diskriminanten først:

$$d = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-30) = 81 + 360 = 441$$

Vi indsætter nu i nulpunktsformlerne og ser at:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-9) + \sqrt{441}}{2 \cdot 3} = \frac{30}{6} = 5$$

og

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-9) - \sqrt{441}}{2 \cdot 3} = \frac{-12}{6} = -2.$$

Vi vælger nu nogle x -værdier der omgiver nulpunkterne og regner $f'(x)$ for disse:

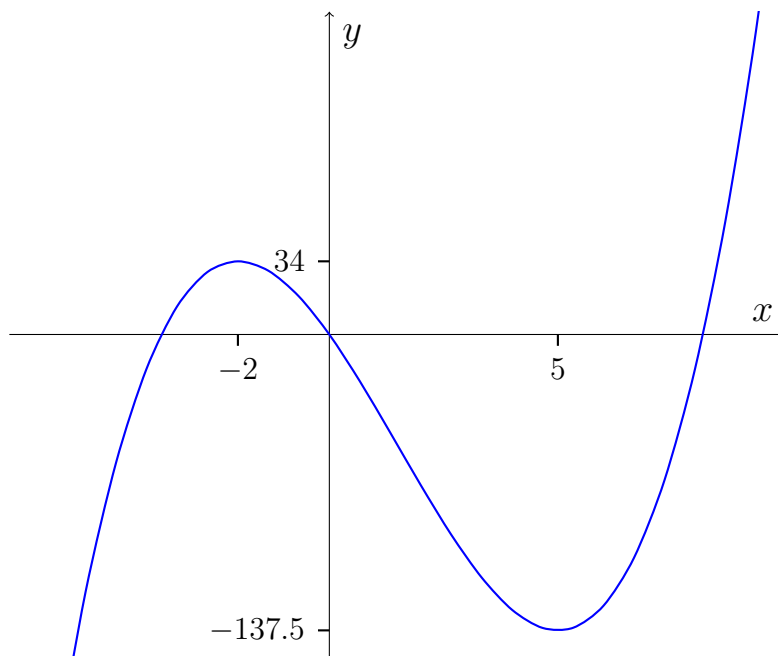
x	-3	-2	0	5	6
$f'(x)$	24	0	-30	0	24
$f(x)$	↗		↘		↗

I tabellen har vi angivet monotoniforholdene for f med pile. Pil op betyder voksende, pil ned betyder aftagende (surprise!).

Fordi f starter med at vokse indtil den når $x = -2$ og aftager bagefter kan vi konkludere at f har et maksimum i $x = -2$. Tilsvarende må f have et minimum i $x = 5$.

Ekstremumsværdierne er hhv. $f(-2) = 34$ og $f(5) = -137,5$.

Ud fra beregningerne kan vi desværre ikke sige noget om hvorvidt det lokale eller globale ekstrema. Vi tegner derfor en graf:



Vi kan se at grafen passer med de beregnede værdier. Vi kan også se at begge ekstrema er lokale. Da funktionen ikke er begrænset kan vi ud fra sætning 11.3.1 konkludere, at der ikke er flere ekstrema (da der ikke er flere nulpunkter for f'). Det ville være svært at gøre bare ved at kigge på grafen, da vi aldrig kunne vide hvad der skete hvis vi zoomede længere ud.

Konklusion:

Funktionen f har et lokalt maksimum i $x = -2$ med maksimumsværdi 34.

Funktionen f har et lokalt minimum i $x = 5$ med minimumsværdi $-137,5$.

Man kunne godt komme til at læse sætning 11.3.1 som om den sagde, at en funktion har ekstremum når $f'(x) = 0$. Men det omvendt. Altså hvis den har ekstremum (i et åbent interval) så er $f'(x) = 0$. Som vi skal se i nedenstående eksempel kan vi godt have $f'(x) = 0$ uden at der er et ekstremum.

Eksempel 11.3.2

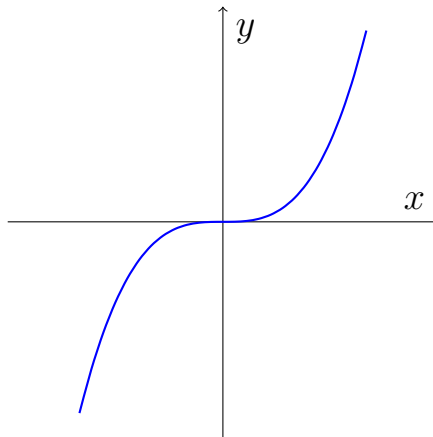
Vi vil nu finde ekstrema for funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3$. Vi finder først $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

Det var en nem differentialkvotient. Den har kun et nulpunkt og det er $x = 0$. Vi laver nu fortegnundersøgelse for f' :

x	-1	0	1
$f'(x)$	1	0	1
$f(x)$	↗		↗

Vi ser at f' ikke skifter fortegn i $x = 0$, så der er ikke noget ekstremum. Faktisk er funktionen voksende i hele dens definitionsmængde. Her er grafen, så du selv kan se:



Øvelse 11.3.1

Find ekstrema for følgende funktioner ved beregning. Tegn grafen for at finde ud af om det er globale eller lokale ekstrema.

- a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$
- b) $f(x) = x$
- c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$
- d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Begrænsede funktioner

Har vi en funktion der er begrænset kan vi klare os helt uden at tegne. Vi gør det helt som før, bortset fra at vi også undersøger værdien i endepunkterne.

Eksempel 11.3.3

Lad $f(x) = 0,5x^2 - 7x$, hvor $x \in]0; 15]$.

Vi vil bestemme ekstrema og værdimængde. Vi finder først $f'(x)$:

$$f'(x) = 0,5 \cdot 2x - 7 = x - 7.$$

Vi finder så nulpunkter for $f'(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\x - 7 &= 0 \\x &= 7\end{aligned}$$

Vi laver så en fortegnundersøgelse for f'

x	0	7	8
$f'(x)$	-7	0	1
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Vi undersøger nu funktionsværdierne for f i ekstremum og i endepunkterne:

x	0	7	15
$f(x)$	0	-24,5	7,5

Samler vi informationer fra de to tabeller får vi:

x	0		7		15
$f(x)$	0	$\searrow$	-24,5	$\nearrow$	7,5

Vi kan se at -24,5 er den laveste funktionsværdi, så det må være et globalt minimum. Vi kan se at 7,5 er den højeste funktionsværdi, så det må være et globalt maksimum. Punktet (0,0) ligger ikke på grafen, da nul ikke ligger i definitionsmængden, og kan derfor ikke være et ekstremumpunkt.

Konklusion

f har et globalt maksimum i $x = 15$ med maksimumsværdi 7,5.

f har et globalt minimum i $x = 7$ med minimumsværdi -24,5.

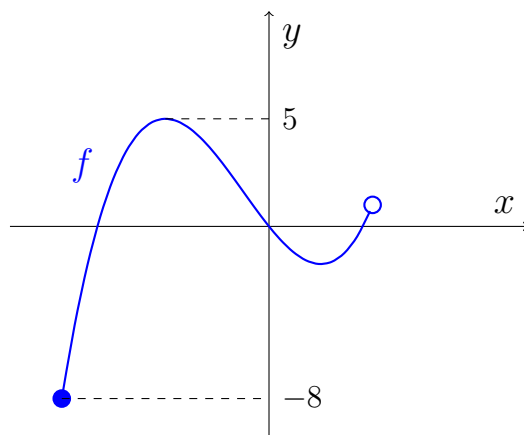
Øvelse 11.3.2

Bestem ved beregning ekstrema for følgende funktioner.

- a) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, hvor $x \in [-1; 2]$
- b) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, hvor $x \in]-2; 0]$
- c) $f(x) = x$, hvor $x \in [0; 5[$
- d) $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x$, hvor $x \in]-2; 40]$

11.4 Værdimængde og differentialregning

Vi har set hvordan man kan beregne ekstrema for begrænsede funktioner. Derfra er der ikke langt til at bestemme værdimængden. For har man en begrænset funktion, må værdimængden nødvendigvis være afgrænset af de globale ekstrema eller funktionsværdierne i endepunkterne:



Figur 11.1: En funktion har værdimængden $V_m f = [-8; 5]$.

Så skal vi bestemme værdimængden for en begrænset funktion skal vi altså gøre følgende:

1. Bestemme ekstrema
2. Bestemme funktionsværdierne ved endepunkterne
3. Finde den mindste og største blandt de fundne værdier. Værdimængden er intervallet fra den mindste til den største værdi.

Eksempel 11.4.1

Vi vil bestemme værdimængden for funktionen

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5, \quad \text{hvor } x \in [-2; 4[$$

Vi skal første beregne ekstrema, så vi finder $f'(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Vi sætter $f'(x) = 0$, og da f' et andengradspolynomium, skal vi regne diskriminanten først:

$$d = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12) = 36 + 288 = 324$$

Vi Insætter nu i nulpunksformlerne og ser at:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{324}}{2 \cdot 6} = \frac{-12}{12} = -1.$$

og

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{324}}{2 \cdot 6} = \frac{24}{12} = 2$$

Vi regner nu funktionsværdierne i de to mulige ekstremumssteder samt endepunkterne:

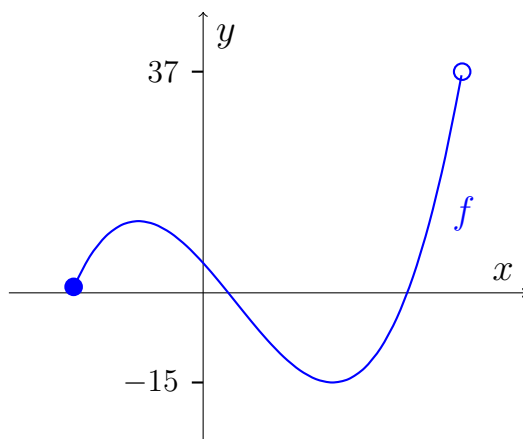
x	-2	-1	2	4
$f(x)$	1	12	-15	37

Bemærk at funktionsværdien i 4 er lidt en snyder, da funktionen strengt taget ikke er defineret i $x = 4$. På den måde er det ikke rigtigt at $f(4) = 37$, men funktionen kommer helt op til punktet.

Vi kigger nu på funktionsværdierne og kan se at

$$V_m(f) = [-15; 37[$$

Vi tegner grafen:



og kan se det passer.

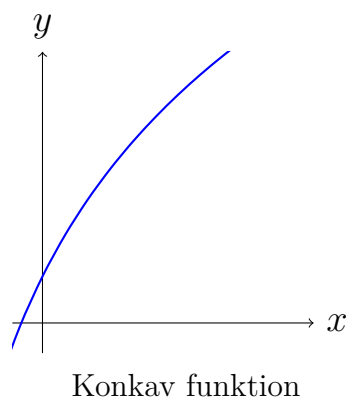
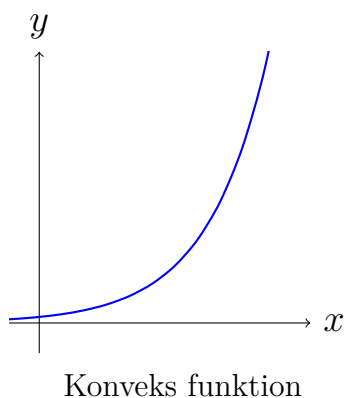
Øvelse 11.4.1

Bestem ved beregning værdimængden for følgende funktioner:

- a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$, hvor $x \in [1; 4]$
- b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$, hvor $x \in]3; 4]$
- c) $f(x) = x \cdot e^x$, hvor $x \in]-4; 2[$ (svær)

11.5 Krumningsforhold (A)

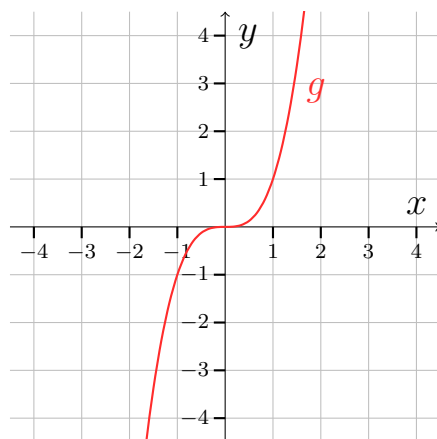
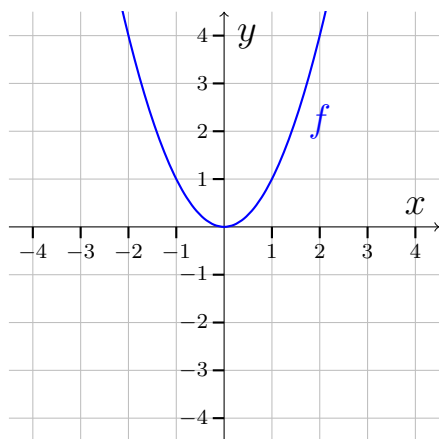
Krumningsforhold handler om at bestemme hvilken vej grafen for en funktion krummer. Løst sagt siges en funktion at være *konveks* hvis den krummer opad, og *konkav* hvis den krummer nedad.



Funktioner kan være konvekse nogle steder og konkave andre. Så ligesom vi kan bestemme en funktions monotoniforhold kan vi bestemme dens *krumningsforhold*. Her kigger vi ikke på om funktionen er voksende eller aftagende. Vi kigger kun på hvordan den krummer.

Eksempel 11.5.1

Vi vil undersøge krumningsforholdene for funktionerne $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^3$. Vi tegner funktionerne:



Vi skal nu bestemme hvor på x -aksen funktion er konveks og hvor den er konkav. Funktion f er nem. Den er konveks over det hele så vi skriver bare:

f er konveks

Funktionen g er konkav til at starte med og skifter så til at være konveks. Det ser ud til den skifter i x -værdien 0 så vi skriver:

g er konkav på $] -\infty; 0]$ og konveks på $[0; \infty[$

Øvelse 11.5.1

Bestem krumningsforholdene for følgende funktioner. Hvis du er i tvivl om hvordan grafen ser ud, så tegn funktionen i GeoGebra.

- a) $f(x) = -e^x$
- b) $f(x) = x^2$
- c) $f(x) = \ln(x)$
- d) $f(x) = -2^x$

Øvelse 11.5.2

Tegn følgende funktioner i GeoGebra og bestem deres krumningsforhold.

- a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2$
- b) $f(x) = \ln(x) - x$
- c) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

Krumningsforhold ved beregning

Vi skal nu se hvordan man kan beregne krumningsforholdene for en funktion ud fra dens forskrift. Det kræver dog at definere begreberne konveks og konkav mere præcist. Vi får i den forbindelse brug for noget mere differentialregning, så det vil vi starte med at kigge på.

Har man en differentialbel funktion f kan man differere den og få f' . Intet nyt i det. Men hvis nu f' er differentiabel, så vil man også kunne differentiere den, og man får dermed f'' som udtales *f dobbelt mærke* eller *den anden afledte*. En funktion som kan differentieres to gange kaldes *dobbelt differentiabel*.

Eksempel 11.5.2

Lad $f(x) = x^2$. Vi vil bestemme f'' . Vi finder først f'

$$f'(x) = 2x$$

Så differentiere vi f' for at få f'' :

$$f''(x) = 2$$

Øvelse 11.5.3

Bestem den anden afledte for følgende funktioner:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \ln(x)$

Vi er nu klar til den præcise definition af krumningsforhold:

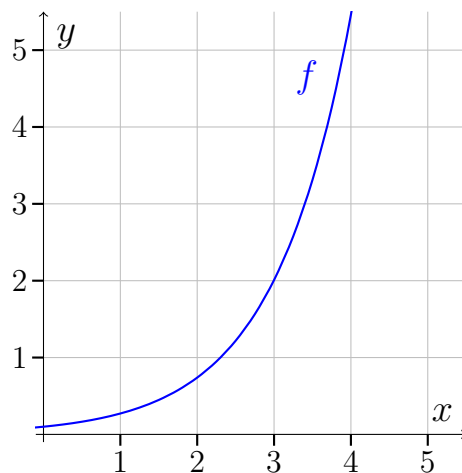
Definition 11.5.1

Lad f være en funktion som er dobbelt differentiabel på et interval I .

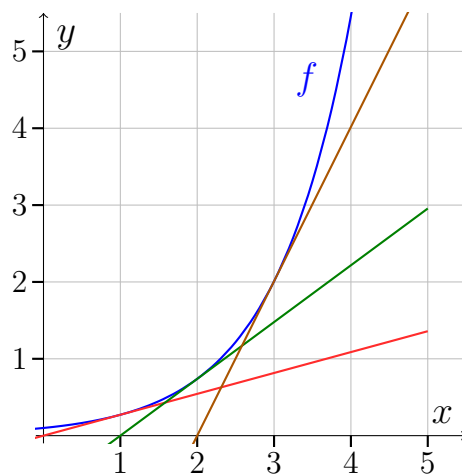
Funktionen f siges at være *konveks* på I , hvis f' er voksende på I .

Funktionen f siges at være *konkav* på I , hvis f' er aftagende på I .

Så krumningsforhold handler om hvorvidt f' er voksende eller aftagende. Lad os se nærmere på, hvordan den definition svarer til det, vi allerede forstår ved konkav og konveks. Vi tegner en funktion f :



Vi tegner nu nogle tangenter langs f . Vi tegner tangenter i $x = 1$ (rød), $x = 2$ (grøn) og $x = 3$ (brun):



Vi kan se at tangentens hældning vokser når x vokser. Men tangentens hældning er jo givet ved f' , så det vil sige at f' er voksende. Ifølge vores nye definition er f altså en konveks funktion, hvilket jo passer med at den ”krummer opad” som vi kan se. Men kunne lave en tilsvarende tegning for en konkav funktion.

Nu bliver det lidt kringlet. Har man en funktion f kan man finde monotoniforholdene for f ved at lave en fortegnssundersøgelse for f' . Det må betyde at vi kan finde monotoniforholdene for f' , og dermed krumningsforholdene for f , ved at lave en fortegnssundersøgelse for f'' . Dette er udtrykt i følgende sætning.

Sætning 11.5.1

Lad f være en to gange differentiabel funktion defineret på et interval I

Hvis $f''(x) > 0$ for alle $x \in I$ så er f konveks på I .

Hvis $f''(x) < 0$ for alle $x \in I$ så er f konkav på I .

Ligesom med monotoniforhold vil en funktion beholde sin krumning til og med et evt. endepunkt, så intervallerne for krumningsforhold er lukkede (medmindre at funktionen ender i et åbent endepunkt)

Eksempel 11.5.3

Vi vil finde krumningsforhold for funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Vi starter med at differentiere f :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Vi differentierer igen:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Vi finder nulpunkter for f'' . Det er nemt at se at f'' har et enkelt nulpunkt i $x = 1$

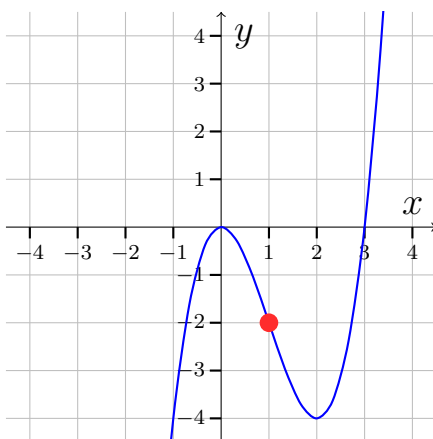
Vi lave nu en tabel, hvor vi vælger x -værdier på hver side af vores nulpunkter (der kun et nulpunkt i dette tilfælde)

x	0	1	2
$f''(x)$	-6	0	6

Så vi kan se at f'' er negativ indtil $x = 1$ og derefter positiv. Ifølge sætning 11.5.1 gælder altså

f er konkav i $] -\infty; 1]$ f er konveks i $[1; \infty[$

Vi tegner grafen for at se om det ser rimeligt ud:



Vi kan se at f skifter krumning fra konkav til konveks i det røde punkt ved $x = 1$.

Øvelse 11.5.4

Bestem krumningsforhold for følgende funktioner:

a) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 3$

b) $f(x) = 7x - 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 - 6x + 4$

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$

Vendepunkter og vendetangenter

Definition 11.5.2

Lad f være en funktion

Et *vendepunkt* er et punkt hvori f skifter krumning fra konveks til konkav eller omvendt.

En tangent til f gennem et vendepunkt kaldes en *vendetangent*.

Eksempel 11.5.4

Vi vil bestemme vendepunkter og vendetangenter for funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2$ fra eksempel 11.5.3.

I eksempel 11.5.3 fandt vi krumningsforholdene for f :

f er konkav i $] -\infty; 1]$

f er konveks i $[1; \infty[$

Da f skifter fra konkav til konveks i $x = 1$ er punktet $(1, f(1))$ et vendepunkt.

Vi regner $f(1)$:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$$

Altså har f vendepunkt i $(1, -2)$.

Vi finder tangenten gennem $(1, -2)$ med den sædvanlige metode.

Vi husker formelen for tangenten gennem $(x_0, f(x_0)) = (1, -2)$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Vi har $x_0 = 1$ og $f(x_0) = -2$.

Vi differentierer f :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

og regner

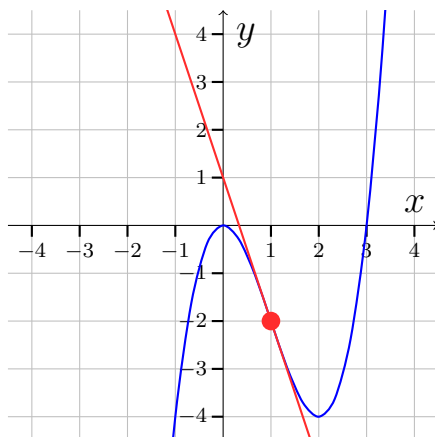
$$f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$$

Altså bliver tangentens ligning

$$y = -3(x - 1) + (-2) = -3x + 1$$

Dvs. vendetangentens ligning er $y = -3x + 1$.

Vi tegner til slut vendetangen ind, så vi kan se, hvordan sådan en fætter ser ud:



Læg mærke til at grafen ligger under vendetangenten på den ene side af vendepunktet og over på den anden.

Øvelse 11.5.5

Bestem vendepunkter og vendetangenter for funktionerne fra øvelse [11.5.4](#)

- a) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 3$
- b) $f(x) = 7x - 1$
- c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 - 6x + 4$
- d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$

Funktionsundersøgelse på A-niveau

Laver man funktionsundersøgelse på A-niveau forventes det at følgende bliver bestemt:

- Definitionsmængde
- Værdimængde
- Nulpunkter

- Fortegn
- Monotoniforhold
- Ekstrema
- Krumningsforhold
- Vendepunkter og vendetangenter

Øvelse 11.5.6

Lad $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$; hvor $x > 0$.

Lav ved beregning (brug dog GeoGebra til at finde nulpunkter for f) en funktionsundersøgelse for f . Dvs. bestem følgende:

- Definitions­mængde
- Værdimængde
- Nulpunkter
- Fortegn
- Monotoniforhold
- Ekstrema
- Krumningsforhold
- Vendepunkter og vendetangenter

Øvelse 11.5.7

Tegn i GeoGebra grafen for funktionen fra ovenstående øvelse.

- Tjek at du forstår hvordan dine facit fra øvelsen kan ses på grafen.

11.6 Funktionsundersøgelse i GeoGebra

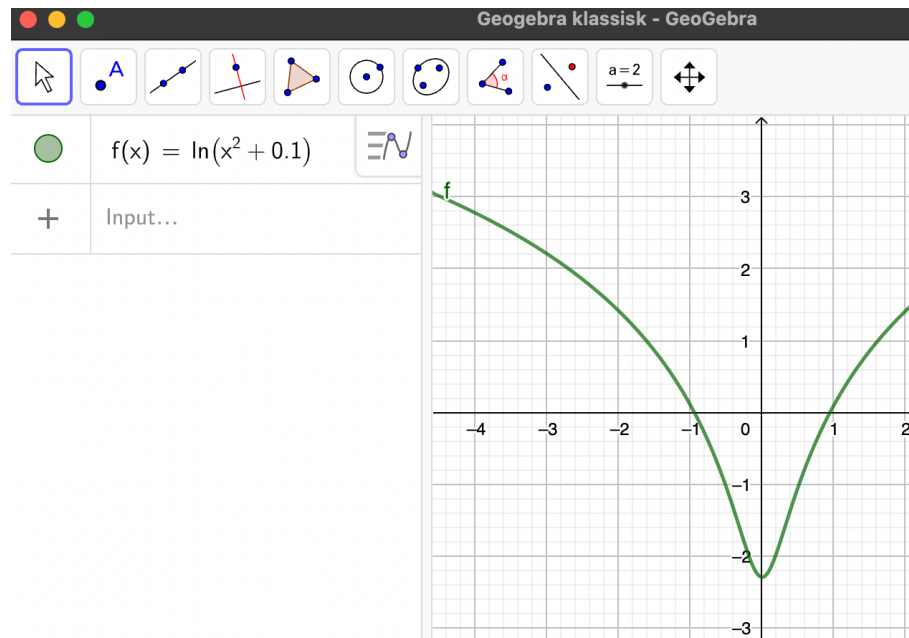
Det er nemt at lave funktionsundersøgelse i GeoGebra. Måske er det lidt for nemt. Vi starter med at se på hvordan man nemmest finder resultater i GeoGebra.

Eksempel 11.6.1

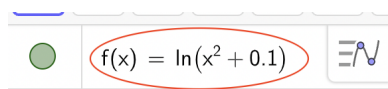
Vi vil lave en funktionsundersøgelse for funktionen

$$f(x) = \ln(x^2 + 0,1)$$

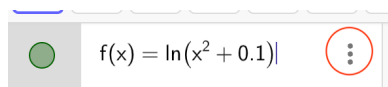
Vi indtaster funktionen i GeoGebra:



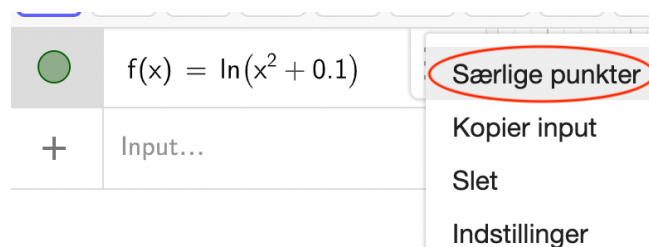
Vi klikker på forskriften så de tre prikker kommer frem til højre for forskriften:



Vi klikker på de tre prikker:



og vælger Særlige punkter:



Vi får nu følgende:

Eksempel 11.6.2

Vi fortsætter eksempel 11.6.1 med at bestemme fortegn, monotoniforhold og værdimængde.

Fortegn: Vi ved allerede at f har nulpunkterne: $x_1 = -0,95$ og $x_2 = 0,95$. Så ud fra grafen ses det at:

$$f(x) > 0 \text{ når } x \in]-\infty; -0,95[\cup]0,95; \infty[$$

$$f(x) < 0 \text{ når } x \in]-0,95; 0,95[$$

Monotoniforhold Vi ved at f har globalt minimum i $x = 0$ og da f ikke har andre ekstrema må der gælde at:

f er aftagende på intervallet $] -\infty; 0]$ og voksende på intervallet $[0; \infty[$.

Værdimængde Da funktionen har en globalt minimumsværdi på $-2,3$ ser du til (ud fra grafen) at værdimængden er $V_m(f) = [-2,3; \infty[$. Vi kan dog ikke være sikker på at værdimængden virkelig går til uendelig alene ud fra grafen. Grafen kunne flade ud. Så skal man afgøre om værdimængden virkelig går til uendelig kræver det at man kigger nærmere på selve forskriften. Det vil vi ikke gøre, men jeg kan afsløre at det er den rigtige værdimængde vi har fundet.

Øvelse 11.6.2

For funktionen fra øvelse 11.6.1 (dvs. $f(x) = x^5 - x^4 + x^2 + 5$) skal du ved hjælp af GeoGebra bestemme:

- Fortegn.
- Monotoniforhold.
- Værdimængde.

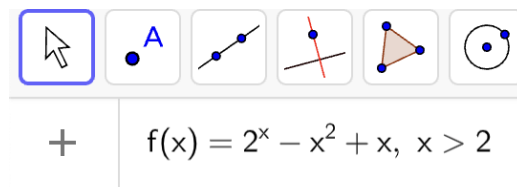
Begrænsede funktioner

Vi vil nu lave en funktionsundersøgelse for en begrænset funktion.

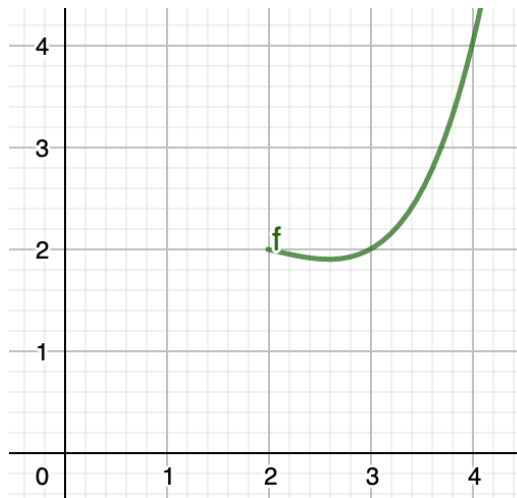
Eksempel 11.6.3

Vi vil tegne grafen for funktionen $f(x) = 2^x - x^2 + x$, hvor $x > 2$.

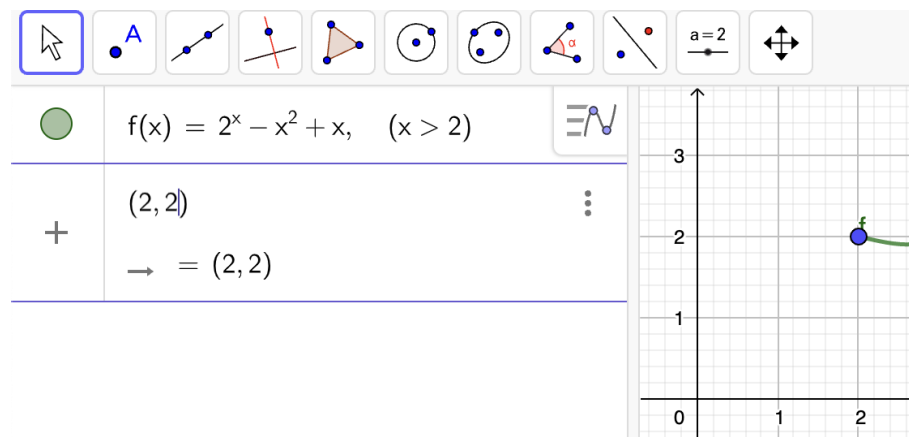
Vi skriver:



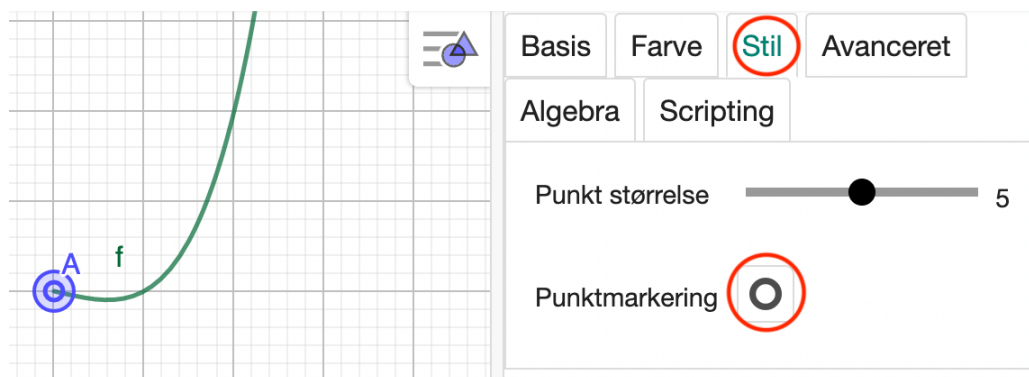
og vi får grafen:



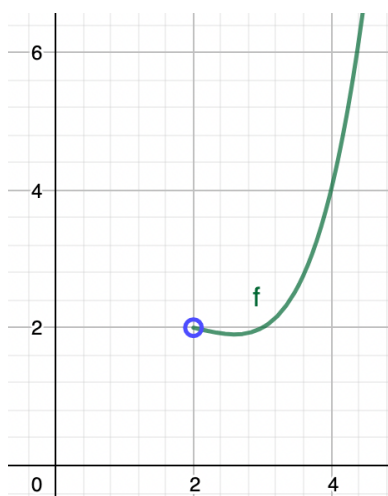
Vi tilføjer nu et punkt. Vi kan se at grafen ender i punktet (2, 2), så vi skriver det ind:



Vi højreklikker nu på punktet og vælger **Instillinger**. Under "Stil", kan vi ændre punktet til at være et åbent punkt:



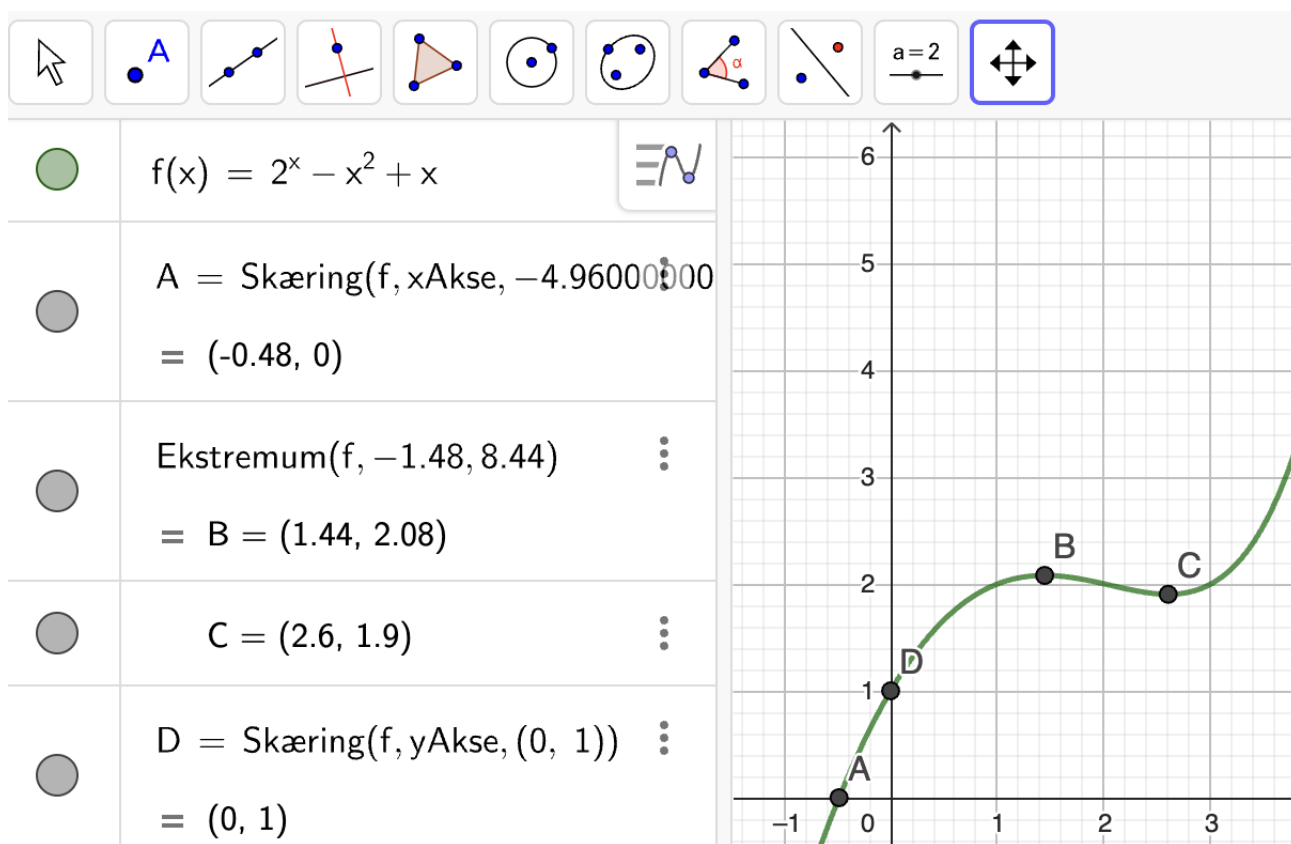
Grafen ender med at se sådan her ud:



Desværre kan GeoGebra ikke lave funktionsundersøgelse for begrænsede funktioner. Derfor er man nødt til at indtaste funktionen uden begrænsning, og så må man se bort fra de resultater som ligger udenfor der hvor funktionen er defineret.

Eksempel 11.6.4

Vi vil bestemme ekstrema for funktionen fra ovenstående eksempel (eksempel 11.6.3). Vi taster funktionen ind **uden begrænsninger** og vælger **Særlige punkter**:



GeoGebra siger at f har ekstrema i $x = 1,44$ og $x = 2,6$. Men vi husker nu, at vi ignorerede begrænsningerne, da vi tastede funktionen ind. Funktionen er kun defineret for $x > 2$, og da $1,44$ dermed ligger udenfor definitionsmængden, har funktionen kun ét ekstremum, og det er et globalt minimum i $x = 2,6$ med minimumsværdi $1,9$.

Øvelse 11.6.3

Lav ved hjælp af GeoGebra en funktionsundersøgelse for funktionen $f(x) = 2e^x - 5x^2$, hvor $x \in [-2; 3[$. Dvs. du skal bestemme:

- Definitionsmængde
- Værdimængde
- Nulpunkter
- Fortegn
- Monotoniforhold
- Ekstrema

Øvelse 11.6.4

Når man tegner funktioner som er begrænset skal man huske at få begrænsningerne med og markere endepunkterne rigtigt.

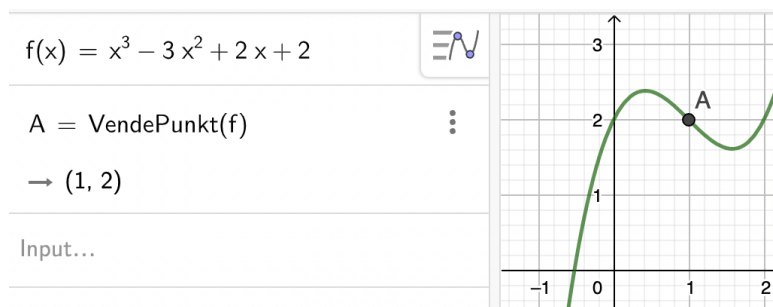
a) Tegn funktionen fra ovenstående øvelse i GeoGebra

Krumningsforhold og vendetangenter i GeoGebra (A)

Har man et polynomium kan man bestemme krumningsforholdene ved hjælp af kommandoen **VendePunkt**.

Eksempel 11.6.5

Vi vil bestemme krumningsforhold og vendetangenter for funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ og skriver **VendePunkt(f)**



Vi ser at f har et vendepunkt i $(1, 2)$. Vi skriver nu $f''(0)$ og $f''(2)$ for at undersøge fortegnet for f'' på begge sider af vendepunktet.

$a = f''(-1)$	$\vdots$
$= -12$	
$b = f''(2)$	$\vdots$
$= 6$	

Vi ser at f'' skifter fra negativ til positiv i $x = 1$. Det må betyde at:

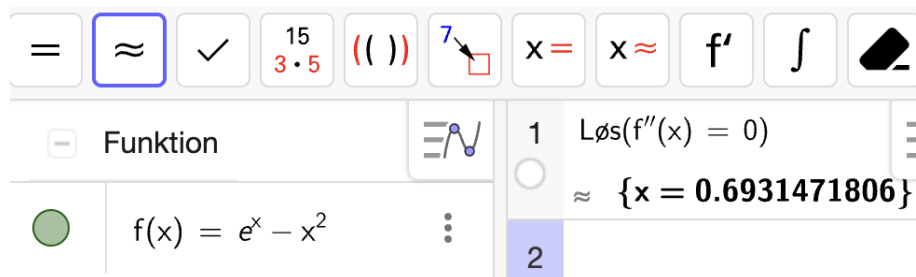
f er konkav på $] -\infty; 1]$

f er konveks på $[1; \infty[$

Kommandoen **VendePunkt** virker kun for polynomier, hvis man bruger den i algebravinduet. I CAS-vinduet virker kommandoen for vilkårlige funktioner. Kan man ikke få den til at virke, kan man bestemme krumningsforhold ved at bruge CAS til at løse ligningen $f''(x) = 0$.

Eksempel 11.6.6

Vi vil bestemme krumningsforhold for funktionen $f(x) = e^x - x$. Vi skriver funktionen ind som normalt, hvorefter vi åbner et CAS-vindue og skriver $\text{Løs}(f''(x)=0)$:



Vi ser at f har muligt vendepunkt i $x = 0,69$. Vi tjekker nu om f'' skifter fortegn omkring det mulige vendepunkt:

$$a = f''(0)$$

$$= -1$$

$$b = f''(1)$$

$$= 0.7182818285$$

Vi ser at f'' skifter fortegn fra minus til plus, så punktet er et vendepunkt og

f er konkav på $] - \infty; 0,69]$

f er konveks på $[0,69; \infty[$

Øvelse 11.6.5

Lad $f(x) = 2^x - x^2$.

a) Bestem krumningsforhold for f

b) Bestem vendetangenter for f

Ekstra

Vi har set at man kan lave funktionsundersøgelse med meget lidt matematisk forståelse ved hjælp af GeoGebra. Vil man vise lidt mere forståelse for hvad man laver, anbefaler jeg at man undlader at bruge **Særlige punkter** og **VendePunkt**. I stedet kan man bruge CAS og kommandoen **Løs**. Den kan bruges til at løse ligningerne:

$f(x) = 0$ (for nulpunkter)

$f'(x) = 0$ (for monotoniforhold og ekstrema)

$f''(x) = 0$ (for krumningsforhold og vendepunkter)

På den måde bliver man fri for det tunge (og nogle gange nærmest umulige) arbejde med at regne i hånden, samtidig med at man får vist matematisk forståelse.

11.7 Beviser til funktionsundersøgelse

Toppunktsformlen

Kan I huske I de gode gamle dage på førsteår, hvor vi lærte at man kan finde toppunktet for et andengradspolynomium ved formelen:

$$T = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a} \right).$$

Vi skal nu se et bevis for denne formel. Vi skal bruge differentialregning til beviset, hvilket også er årsagen til det først kommer nu og ikke under polynomier.

Sætning 4.3.1

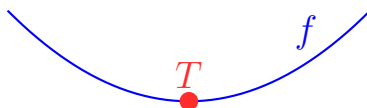
(Toppunktsformlen)

Toppunktet for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ med diskriminant d , kan bestemmes ved:

$$T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a} \right).$$

Bevis

Vi skal finde toppunktet T :



Men det er jo det samme som at finde ekstremum! Det vil vi nu gøre på tilsvarende måde som vi plejer.

Først finder vi $f'(x)$. Vi ved at $f(x) = ax^2 + bx + c$, så:

$$f'(x) = 2ax + b$$

Vi sætter $f'(x) = 0$:

$$2ax + b = 0$$

Vi trækker b fra på begge sider:

$$2ax = -b$$

og dividerer med $2a$:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Vi har hermed fundet ekstremumsstedet, som må være førstekoordinaten til toppunktet. Vi kan se det passer med formelen:

$$T = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a} \right)$$

Vi regner nu andenkoordinaten. Det gør vi også på sædvanligvis, dvs. vi indsætter førstekoordinaten i forskriften:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

Vi reducerer:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\frac{b^2}{4a^2} + b\frac{-b}{2a} + c$$

Vi reducerer:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} + \frac{-b^2}{2a} + c$$

Vi forlænger det midterste led med 2 (Vi ganger med 2 i tæller og nævner) og vi forlænger det sidste led med $4a$:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} + \frac{-2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

Vi sætter på fælles brøkstreg:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

Vi reducerer:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Vi genkender nu tælleren som $-d$ (vi har jo $d = b^2 - 4ac$, så derfor må $-d = -b^2 + 4ac$):

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-d}{4a}$$

Vi har dermed fundet andenkoordinaten til toppunktet. Vi kan se det passer med formelen:

$$T = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a} \right)$$

Ekstrema (svært og mest for A-niveau)

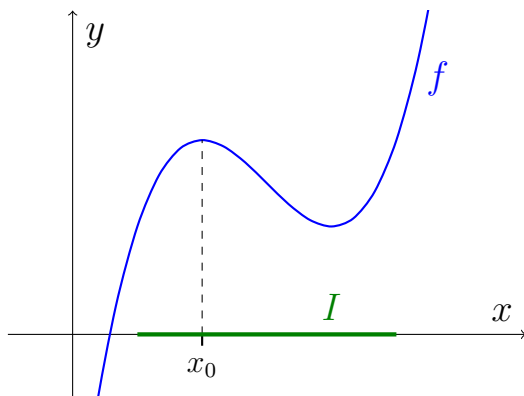
Sætning 11.3.1

Lad f være en differentialbel funktion som er defineret på et åbent interval I .

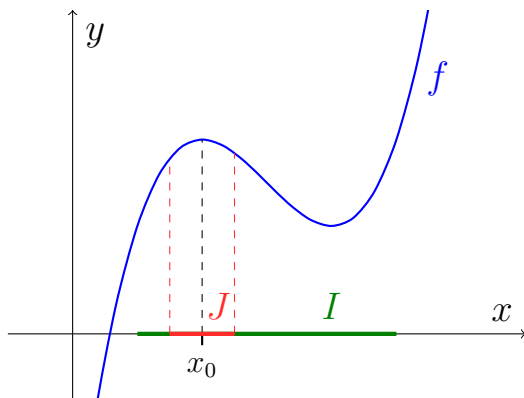
Hvis f har et ekstremum i $x_0 \in I$, så er $f'(x_0) = 0$.

Bevis

Vi vil se på det tilfælde, hvor ekstremum er et maksimum. Beviset er helt tilsvarende, hvis der er tale om et minimum. Så antag at f har et maksimum i $x_0 \in I$:



At f har et maksimum i $x_0 \in I$ betyder at der er et åbent interval J omkring x_0 hvor $f(x_0)$ er større end eller lig med alle de andre funktionsværdier. Altså at $f(x_0) \geq f(x)$ for alle $x \in J$:



Fordi f er differentialbel i x_0 ved vi at følgende grænseværdi eksisterer:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Vi husker at når vi har grænseværdier, så kan Δx både kan være positiv og negativ. Vi vil nu undersøge grænseværdien når Δx er negativ og derefter når Δx er positiv.

Antag at $\Delta x < 0$:

Da $f(x_0) \geq f(x)$ for alle $x \in J$, vil $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$, når Δx kommer tilstrækkelig tæt på nul.

Så er vi tæt på x_0 , vil både tæller og nævner i brøken $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ være negative, hvilket gør brøken positiv.

Heraf kan vi konkludere at $f'(x_0) \geq 0$ da den er givet ved grænseværdien af en brøk som altid er positiv.

Antag nu at $\Delta x > 0$:

Her gælder stadig at $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$, når Δx kommer tilstrækkelig tæt på nul, men nu er $\Delta x > 0$, så brøken $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ bliver negativ.

Heraf kan vi konkludere at $f'(x_0) \leq 0$ da den er givet ved grænseværdien af en brøk som altid er negativ.

Vi har nu vist at $f'(x_0) \geq 0$ og $f'(x_0) \leq 0$, hvilket må betyde at $f'(x_0) = 0$.

Kapitel 12

Beskrivende statistik

Beskrivende statistik handler om analysere og beskrive et datamateriale. Jeg vil gennem kapitlet forklare emnet med udgangspunkt i to eksempler.

1. I det første eksempel har vi spurgt 10 unge (tænk en sporty udgave af en Niels Brock elev) om hvor mange timer om ugen de bruger på sport. Resultatet var:

4, 1, 2, 9, 4, 4, 2, 5, 1, 5

2. I den andet eksempel har vi målt højden, i cm, på 25 unge:

159, 167, 183, 168, 176,
176, 166, 173, 166, 176,
178, 179, 180, 177, 167,
166, 173, 176, 161, 170,
177, 165, 186, 187, 177

Tallene i de to eksempler kaldes *observationer*, og listerne med tal kaldes *observationssæt*. Vi vil **ikke** betragte observationssættene som stikprøver. Dvs. vi vil ikke bruge observationssættene til at sige noget generelt om tid sport og højde. Vi vil kun analysere, hvordan det ser ud indenfor de to grupper vi har spurgt.

De to eksempler adskiller sig ved mængden af forskellige observationer. I første eksempel er der kun fem forskellige observationer, mens der i det andet eksempel er mange forskellige observationer. Har man mange forskellige observationer, som i det andet eksempel, kan man blive tvunget til at ”gruppere” observationerne (dvs. samle dem i intervaller) for at lette beregningerne, og for at kunne lave nogle mere overskuelige diagrammer. Vi starter med det mest simple, nemlig det første eksempel, som altså ikke skal grupperes.

12.1 Ugrupperede observationer

Vi tager udgangspunkt i en undersøgelse, hvor vi har spurgt 10 unge om, hvor meget tid de bruger på sport om ugen. De har svaret

4, 1, 2, 9, 4, 4, 2, 5, 1, 5

Denne liste kaldes *observationssættet* og hvert enkelt tal kaldes en *observation*.

Frekvenstabeller

Vi starter med at lave en *frekvenstabel*. Den ser således ud (forklaring følger bagefter):

Observation (x_i)	Hyppighed (h_i)	Frekvens (f_i)	Summeret frekvens (F_i)
1	2	0,2	0,2
2	2	0,2	se øv. 12.1.4
4	se øv. 12.1.2	0,3	0,7
5	2	0,2	0,9
9	1	se øv. 12.1.3	1

Observation (x_i)

Første søjle viser de **forskellige** observationer. Fordi der er fem forskellige observationer er der fem tal i denne søjle, selvom der er ti observationer i alt. Vi skriver observationerne i rækkefølge fra mindste til største. Vi ser at der står (x_i) efter "Observationer". Det betyder at den første observationen i søjlen betegnes x_1 , den næste x_2 osv.[12.1.4](#)

Eksempel: $x_3 = 4$ fordi den tredje observation er 4.

Øvelse 12.1.1

Med udgangspunkt i frekvenstabellen.

a) Aflæs x_4

Hyppighed (h_i)

Næste søjle viser hyppigheden, som er antallet af gange den enkelte observation optræder i observationssættet.

Eksempel: $h_5 = 1$, da den femte observation er 9 og vi kun har ét nital blandt i vores oprindelige liste med observationer.

Øvelse 12.1.2

Med udgangspunkt i observationssættet.

- a) Bestem h_3

Frekvens (f_i)

Frekvensens kaldes også den relative hyppighed fordi den viser, hvor stor en del den enkelte hyppighed udgør ud af det samlede antal observationer. Formlen for frekvens er

$$f_i = \frac{h_i}{n}$$

Eksempel $f_4 = \frac{2}{10} = 0,2$:

At $f_2 = 0,2$ betyder at 20% af de unge brugte 3 timer på sport (da $x_2 = 3$).

Øvelse 12.1.3

Med udgangspunkt i tabellen

- a) Bestem f_5
b) Fortolk f_5

Summeret frekvens (F_i)

Summeret frekvens, også kaldet kumuleret frekvens, er frekvensen lagt sammen med af alle de foregående frekvenser. Altså

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 \\ F_2 &= f_1 + f_2 \\ F_3 &= f_1 + f_2 + f_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Eksempel: $F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 0,2 + 0,2 + 0,3 = 0,7$

At $F_3 = 0,7$ betyder at 70% af de unge dyrkede sport højst 4 timer om ugen.

Øvelse 12.1.4

Med udgangspunkt i frekvenstabellen

- a) Bestem F_2
- b) Fortolk F_2

Outliers

En outlier er en observation, som afviger meget fra de andre. Er der en eller flere outliers, kan det skyldes fejl i datamaterialet, men sådan er det ikke altid. Hvis det er en fejl, bør man sortere outlieren fra, inden man laver statistik. Problemet er så bare, hvordan man afgør om der er tale om en fejl. Hvis man f.eks. undersøger, hvor langt elever har til deres skole, og der er en som svare 800 km, er det nok en fejl (måske mente eleven 800 m), og man bør sortere dette datapunkt fra. I andre tilfælde kan det være sværere at afgøre.

I vores observationssæt ligger observationen 9 lidt lang væk fra de andre og **kan** karakteriseres som en outlier, men der er ingen fast definition på hvad en outlier er og jeg ville personligt ikke karakterisere den som en outlier. Der findes flere mere eller mindre tekniske metoder til at afgøre om en observation er en outlier, men de giver forskellige resultater, da det i sidste ende er subjektivt. Outlier eller ej, så bør man ikke sortere observationen 9 fra, da vi ikke har grund til at tro, at der er noget galt med den observation.

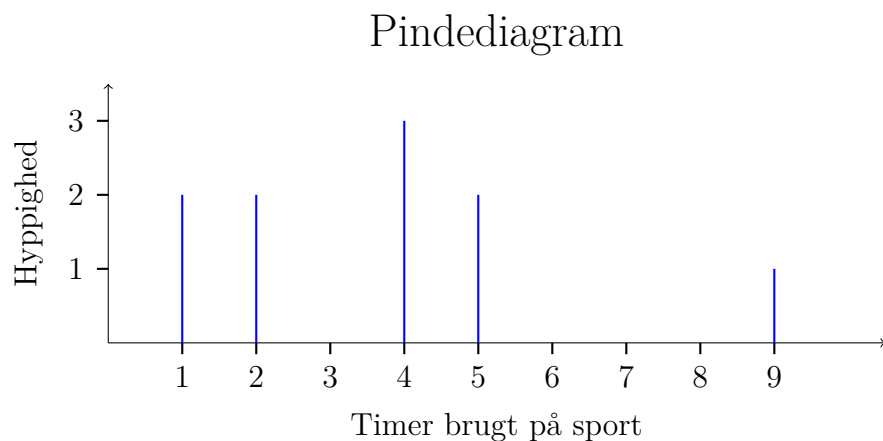
Diagrammer for ugrupperede observationer

Ud fra frekvenstabellen kan vi nu tegne to diagrammer. Tabellen så altså således ud:

Observation (x_i)	Hyppighed (h_i)	Frekvens (f_i)	Summeret frekvens (F_i)
1	2	0,2	0,2
2	2	0,2	0,4
4	3	0,3	0,7
5	2	0,2	0,9
9	1	0,1	1

Pindediagram

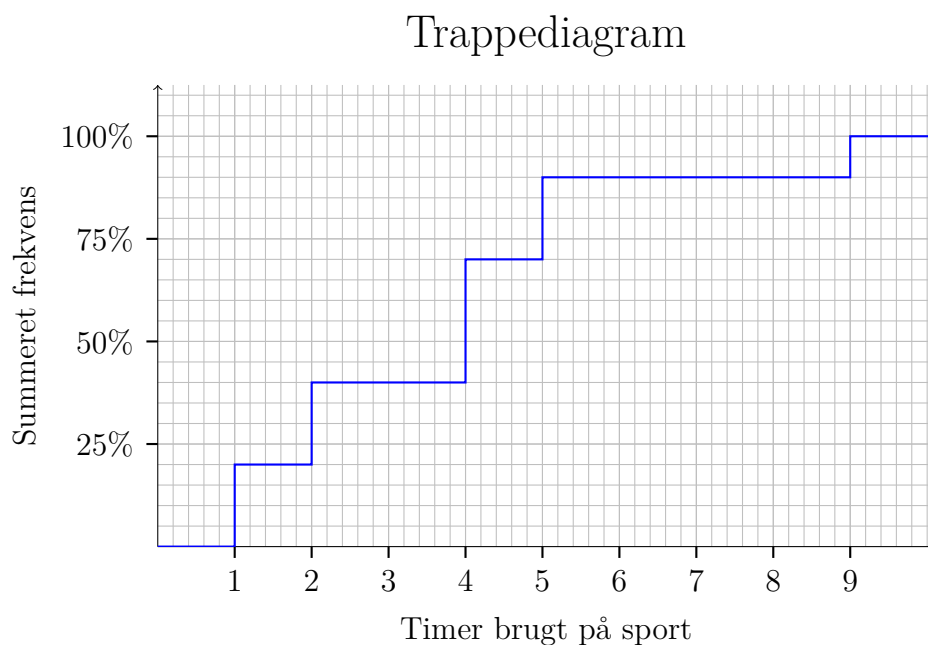
Vi kan illustrere fordelingen af tidsforbrug med et pindediagram, som viser hyppighederne af hver observation.



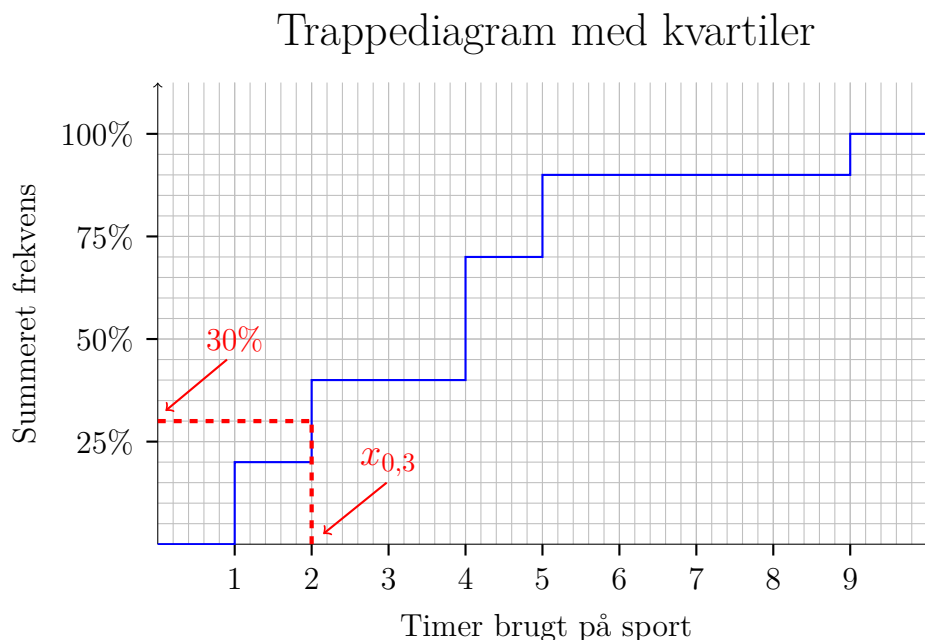
Ved at kigge på diagrammet kan vi få et hurtigt overblik over tidsforbruget. Pindediagrammer er ikke gode hvis man har for mange observationer, så der kommer uoverskuelig mange pinde. I det tilfælde er det bedre at gruppere observationerne (mere om det senere).

Trappediagram

Trappediagrammet bliver brugt til at illustrere den summerede frekvens. Vi afsætter et punkt for hver observation, hvor andenkoordinaten er den summerede frekvens. Derefter forbinder vi punkterne med linjer som vist her:



Trappe diagrammet kan bruges til at bestemme en procentdel af observationerne. Går vi ud fra f.eks. 30% på andenaksen får vi observationen på 2. Denne observation kaldes 30%-fraktilen. At 30%-fraktilen er 2 betyder at mindst 30% af observationer er på 2 eller derunder. Vi betegner 30%-fraktilen med $x_{0,3}$ (da $30\% = 0,3$) og den er vist her:



Vi vil vende tilbage til fraktilerne i næste afsnit.

Øvelse 12.1.5

Med udgangspunkt i observationssættet 7, 0, 4, 7:

- Lav en frekvenstabel.
- Tegn et pindediagram med papir og blyant.
- Tegn et trappediagram med papir og blyant.
- Aflæs fraktilen $x_{0,62}$ på trappediagrammet.
- Forklar betydningen af $x_{0,62}$.

12.2 Deskriptorer for ugrupperede observationer

En deskriptor er det tal som indeholder information om observationssættet. Du kender sikkert gennemsnit, median og typetal fra folkeskolen. Det er alle sammen eksempler på deskriptorer.

Vi vil nu bestemme deskriptorer for eksemplet med tid brugt på sport blandt de 5 unge. Vi vil tage udgangspunkt i frekvenstabellen fra sidste afsnit

Observation (x_i)	Hyppighed (h_i)	Frekvens (f_i)	Summeret frekvens (F_i)
1	2	0,2	0,2
2	2	0,2	0,4
4	3	0,3	0,7
5	2	0,2	0,9
9	1	0,1	1

Typetal

Typetallet er den observation som optræder flest gange. Her er det observationen 4, som har hyppigheden 3. Er der to eller flere observationer som deler den højeste hyppighed, er der bare flere typetal.

Største og mindsteværdi

Størsteværdien (max) er den største observation og mindsteværdien (min) er den mindste observation. Vi har

$$\min = 1$$

$$\max = 9$$

Variationsbredde

Variationsbredden er afstanden fra mindste til størsteværdi. Vi har altså

$$\max - \min = 9 - 1 = 8$$

Variationsbredden er altså 8.

Der der dyrker mest sport, dyrker altså sport i 8 timere længere end den som dyrker mindst sport.

Fraktiler (x_p)

Vi mødte fraktilerne i sidste afsnit, hvor vi aflæste dem på trappediagrammet. Mere præcist er p -fraktilen defineret som den **mindste** observation som har en summeret frekvens på **mindst** p .

Eksempel: Vil vi bestemme $x_{0,8}$ skal vi altså finde den mindste observation, som har en summeret frekvens på mindst 0,8. Vi kunne aflæse den på trappediagrammet, men det gider vi ikke at tegne, så vi kigger bare i frekvenstabellen og ser at den første observation som har en summeret frekvens på over 0,8 er 5. Så $x_{0,8} = 5$.

Alt $x_{0,8} = 5$ betyder at mindst 80% af de unge dyrkede sport højst 5 timer om ugen.

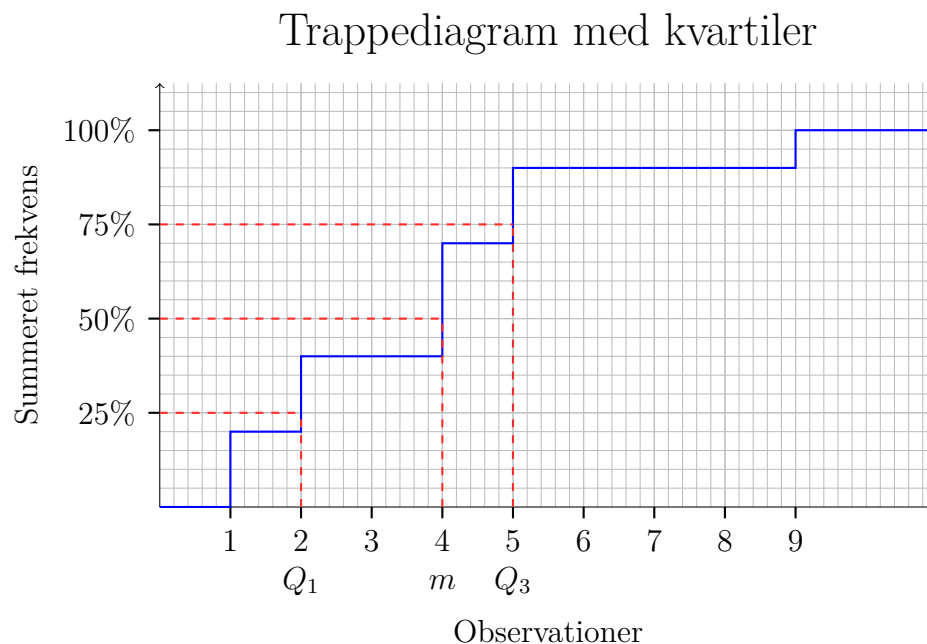
Kvartilsæt og median

Vi definerer kvartilerne og medianen som nogle særlige fraktiler.

- Fraktilen $x_{0,25}$, kaldes også nedre kvartil og betegnes med Q_1 .
- Fraktilen $x_{0,50}$, kaldes også medianen og betegnes med m .
- Fraktilen $x_{0,75}$, kaldes også øvre kvartil og betegnes med Q_3 .

Nogle lærebøger definerer kvartiler/median lidt anderledes, og måske har du lært en anden metode i folkeskolen. Men det betyder dog ikke, at kvartilerne pludselig får en helt anden betydning. De betyder stadig nogenlunde det samme og med store datasæt gør det ikke rigtig nogen forskel.

Her er kvartilerne illustreret på trappediagrammet:



De tre kvartiler tilsammen kaldes kvartilsættet og opskrives som (Q_1, m, Q_3)

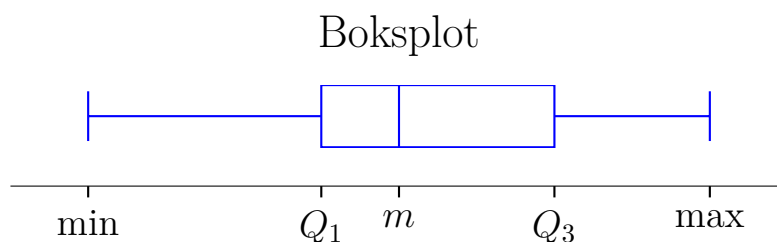
Vi aflæser medianen til at være 4 og kvartilsættet til at være (2, 4, 5). Det betyder:

- Mindst 25% af de unge dyrkede sport i højst 2 timer om ugen.
- Mindst halvdelen af de unge dyrkede sport i højst 4 timer om ugen.
- Mindst 75% af de unge dyrkede sport i højst 5 timer om ugen.

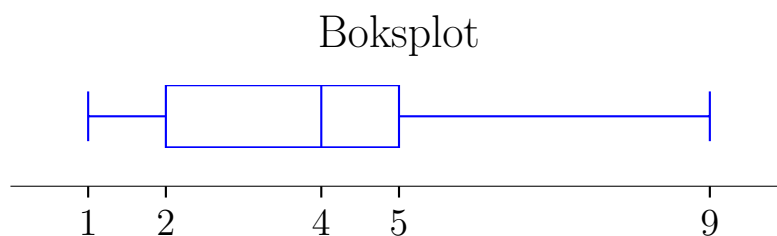
Ofte vil man tillade en mere simpel omend lidt upræcis fortolkning og skrive:

- En ud af fire af de unge dyrkede sport under 2 timer om ugen.
- Halvdelen af de unge dyrkede sport under/over 4 timer om ugen.
- En ud af fire af de unge dyrkede sport over 5 timer om ugen

Kvartilsættet (Q_1, m, Q_3) kan illustreres sammen med mindsteværdien, min, og størsteværdien, max, i et *boksplot*:



For vores observationer vil det se således ud:



Kvartilsættet hedder kvartilsættet fordi det deler observationerne i kvarte og det bliver tydeligt, når man betragter boksplottet. De første 25% af observationerne ligger mellem 1 og 2, de næste 25% ligger mellem 2 og 4, osv.

Kvartilafstand

Kvartilafstanden er afstanden mellem nedre og øvre kvartil, dvs. $Q_3 - Q_1$. Vi regner kvartilafstanden til at være:

$$5 - 2 = 3$$

Kvartilafstanden er altså 3, hvilket viser spændet i tidsforbrug blandt de midterste 50%, dvs. bredden af boksen i boksplottet. Den kan opfattes om et udtryk for den typiske forskel i tid brugt på sport blandt de 10 unge.

Gennemsnit

Gennemsnittet er pr. definition summen af observationerne delt med antallet af observationer. Præcis som I har lært i folkeskolen. Vi betegner gennemsnittet med $\bar{x}$. Gennemsnittet kan også regnes ud fra frekvenstabellen vha. sætningen:

Sætning 12.2.1

Gennemsnittet $\bar{x}$ kan bestemmes ved følgende formel:

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_k \cdot f_k,$$

hvor $x_1, x_2, \dots, x_k$ er de forskellige observationer og $f_1, f_2, \dots, f_k$ er de tilhørende frekvenser.

Vha. formelen regner vi gennemsnittet for vores observationssæt:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_k \cdot f_k \\ &= 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,1 \\ &= 3,7\end{aligned}$$

Varians

Variansen er en deskriptor som fortæller noget om hvor spredte observationerne er. Vi vil ikke gå i detaljer med hvordan den skal fortolkes, fordi vi primært vil bruge den som mellemregning til at finde standardafvigelsen, som er beskrevet som næste deskriptor. Variansen betegnes σ^2 (bogstavet er græsk og udtales "sigma") og kan beregnes vha. sætningen:

Sætning 12.2.2

Variansen σ^2 kan bestemmes ved følgende formel:

$$\sigma^2 = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \cdots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot f_k$$

hvor $\bar{x}$ er gennemsnittet $x_1, x_2, \dots, x_k$ er de forskellige observationer og $f_1, f_2, \dots, f_k$ er de tilhørende frekvenser.

Vi regner variansen for vores observationssæt.

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot f_3 \\ &\quad + (x_4 - \bar{x})^2 \cdot f_4 + (x_5 - \bar{x})^2 \cdot f_5 \\ &= (1 - 3,7)^2 \cdot 0,2 + (2 - 3,7)^2 \cdot 0,2 + (4 - 3,7)^2 \cdot 0,3 \\ &\quad + (5 - 3,7)^2 \cdot 0,2 + (9 - 3,7)^2 \cdot 0,1\end{aligned}$$

Standardafvigelse

Standardafvigelsen (kaldes også spredningen) er en deskriptor, som kun få elever kan finde ud af at udtale rigtigt.

Øvelse 12.2.1

Læs navnet på ”standardafvigelse” igen. Står der:

- a) standard**af**givelse?
- b) standard**af**vigelse?

Standardafvigelsen er (løst fortolket) et mål for hvor meget observationerne typisk afviger fra gennemsnittet. Den kan regnes ved formlen:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{5,21} = 2,28$$

Den gennemsnitlige tid brugt på sport er altså 4 men en typisk elev bruger 2 timer mere eller mindre end dette.

Standardafvigelsen er både meget vigtig og til stor forvirring for mange elever. Er man skrap, kan man læse mere om den i afsnit [12.7](#). Ellers må man vente til kapitlet om normalfordeling (kapitel [15](#)), hvor den bliver lidt mere håndgribelig.

Øvelse 12.2.2

Betragt observationssættet 7, 0, 4, 7

- a) Lav en frekvenstabel (hvis du ikke har gemt den fra sidste afsnit)
- b) Bestem typetallet
- c) Bestem største og mindsteværdi
- d) Bestem variationsbredden
- e) Bestem 0,2-fraktilen
- f) Bestem kvartilsættet
- g) Bestem medianen
- h) Bestem kvartilafstanden
- i) Bestem gennemsnittet
- j) Bestem variansen
- k) Bestem standardafvigelsen

Centralmål og spredningsmål

Når vi laver statistik er vi især interesseret i:

1. At få et overblik over hvordan observationerne fordeles sig.
2. At bestemme den typiske observation.
3. At bestemme hvor spredte observationerne er.

Det første punkt klares med diagrammerne. For ugrupperede observationer vil vi som regel lave et pindediagram. De to næste punkter klare vi med deskriptorer. En deskriptor som viser den typiske observation kaldes et *centralmål*, fordi den viser hvor midten, dvs. den centrale observation, ligger. Et centralmål kaldes også et positionsmål. En deskriptor som viser hvor spredt observationerne er kaldes et spredningsmål. Vi har:

Centralmål: Gennemsnit, median, typetal

Spredningsmål: Variationsbredde, kvartilafstand, varians, standardafvigelse.

Når vi skal beskrive et observationssæt vil vi typisk vælge et diagram, et centralmål og et spredningsmål. I mange tilfælde vil et godt valg være et pindediagram, gennemsnittet og standardafvigelsen. Vi vil som regel ikke vælge variansen da stan-

dardafvigelsen har de samme fordele som variansen, men giver et klarere billede af den typiske spredning. Hvilke deskriptorer man vælger afhænger af situationen. F.eks. er gennemsnittet et dårligt centralmål til at beskrive den typiske indkomst for en dansker. Det skyldes at der er nogle få meget rige mennesker som hiver gennemsnittet langt op, så her er medianen et bedre valg. Hvis man derimod skal bage en kage med to kilo æbler er det bedst at tage udgangspunkt i gennemsnitsvægten af æblesorten, når man skal finde ud af hvor mange æbler man skal købe.

12.3 Grupperede observationer

Nu vil vi lave en frekvenstabel for de målte højder blandt de 25 unge:

159, 167, 183, 168, 176,
 176, 166, 173, 166, 176,
 178, 179, 180, 177, 167,
 166, 173, 176, 161, 170,
 177, 165, 186, 187, 177

Da der er mange forskellige observationer er det smart at grupperer observationerne. Det betyder at vi samler observationerne i intervaller, så vi ikke længere holder styr på værdien af den enkelte observation – kun i hvilket interval den befinder sig i. Frekvenstabellen kommer til at se således ud (forklaring følger)

Interval	intervalmidtpunkt(m_i)	Hyp. (h_i)	Frekv. (f_i)	Sum. frekv. (F_i)
]150; 160]	155	1	0,04	0,04
]160; 170]	165	9	0,36	0,40
]170; 180]	175	12	0,48	0,88
]180; 190]	185	3	0,12	1

Interval

Vi har valgt at inddele observationerne i 4 intervaller. Det er en forholdsvis grov inddeling, men vi er dovne, og en grov inddeling giver os mindst arbejde. Intervallerne skal tilsammen dække alle observationerne.

Intervalmidtpunkt

Det er midten af intervallet. I vores eksempel har vi lavet ”pæne” intervaller, så det er oplagt, hvor midten er. Ellers kan vi finde midtpunktet med formlen:

$$m_i = \frac{\text{venstre endepunkt} + \text{højre endepunkt}}{2}$$

Eksempel: Midtpunktet af intervallet $]160; 170]$ regnes ved:

$$m_2 = \frac{160 + 170}{2} = 165$$

Hyppighed

Her tæller vi hvor mange observationer der ligger i det pågældende interval.

Eksempel: Det første interval hedder $]150; 160]$. Når vi finder hyppigheden hørende til dette interval skal vi altså tælle alle observationerne der er over 150 men under eller lig med 160. Der er kun en enkelt observation, nemlig 159 som ligger i dette interval så $h_1 = 1$.

Frekvens og summeret frekvens

Intet nyt her.

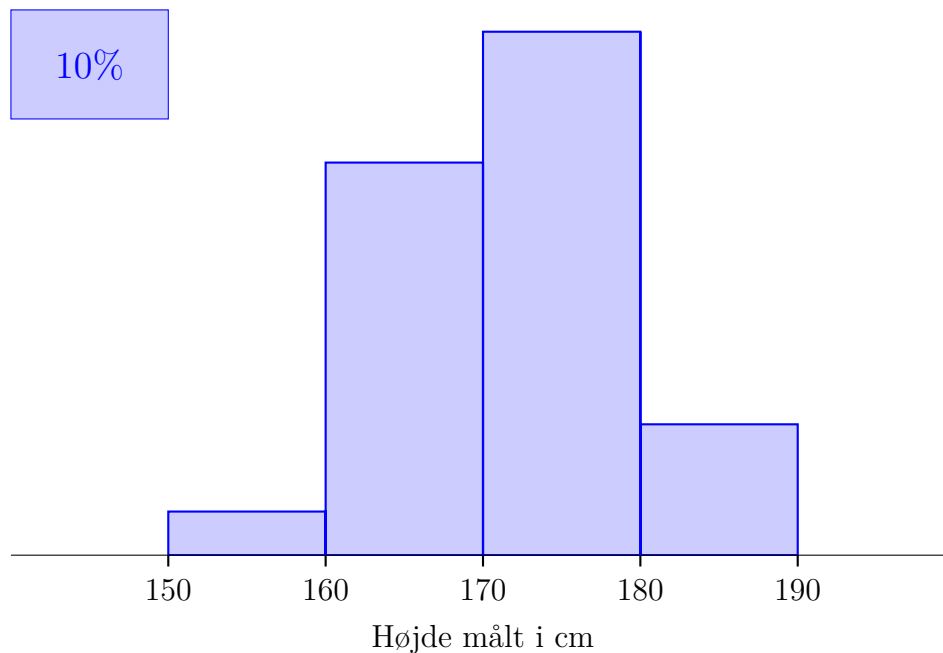
Diagrammer for grupperede observationer

Vi kan ikke tegne de samme diagrammer for grupperede observationer som for ugrupperede. Vi kan f.eks. ikke tegne et pindediagram fordi vi ikke har placeringen af de enkelte observationer. Vi ved kun hvilke intervaller de befinder sig i. I stedet tegner vi et histogram. Vi tager igen udgangspunkt i frekvenstabellen:

Interval	intervalmidtpunkt(m_i)	Hyp. (h_i)	Frekv. (f_i)	Sum. frekv. (F_i)
$]150; 160]$	155	1	0,04	0,04
$]160; 170]$	165	9	0,36	0,40
$]170; 180]$	175	12	0,48	0,88
$]180; 190]$	185	3	0,12	1

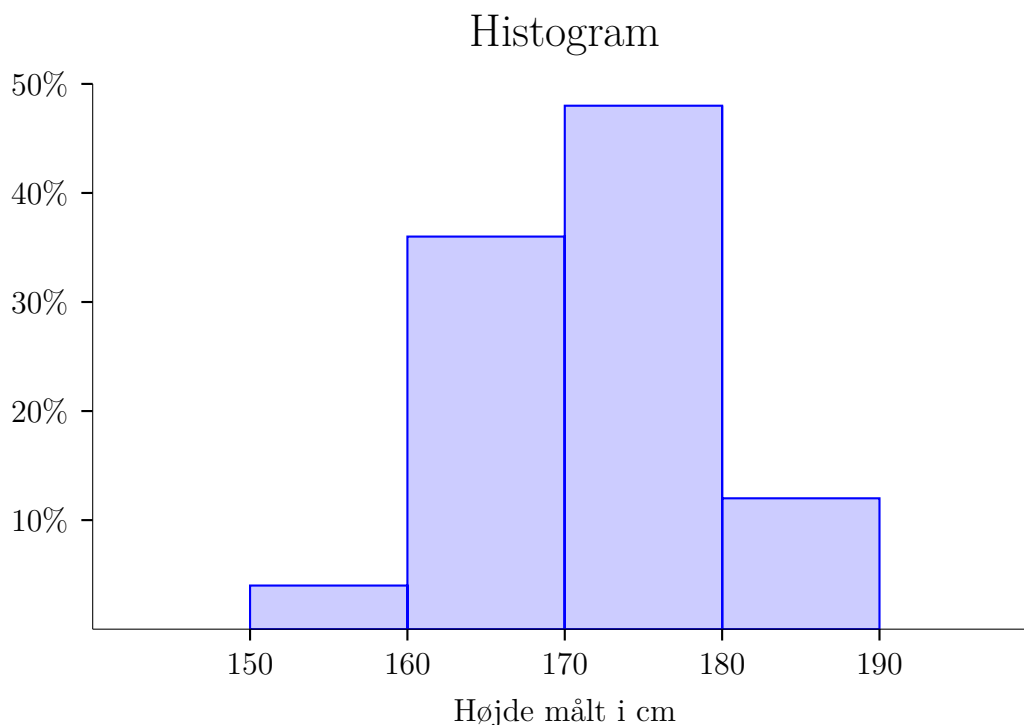
Histogrammet ser således ud (forklaring følger):

Histogram



Vi ser at der er boks øverst til venstre, hvor der står 10%. Det er fordi det er arealet og ikke højden af søjlerne som har betydning. Ud fra hvert interval er der nemlig tegnet en søjle som har et areal der svarer til frekvensen. Vi kan vurdere denne frekvens ved at sammenligne med boksen, som altså har et areal på 10%. Kigger vi f.eks. på søjlen over intervallet $]180; 190]$, ses det at den har et areal som er en anelse større end den 10%-boksen, så frekvensen for intervallet er altså lidt over 10%. Kigger vi i frekvenstabellen kan vi se at den må være på 12%. Histogrammet har tilsvarende funktion som pindediagrammet. Det giver et overblik over fordelingen af observationer.

Meget ofte har vi intervaller med samme bredde. I det tilfælde er det i orden at bruge frekvensen som højde af søjlerne. Gør vi det ser histogrammet således ud:



Det er lidt nemmere, end hvis man skal tænke i arealer. **Men husk man må kun gøre det på den måde, når intervallerne har samme bredde!**

Sumkurve

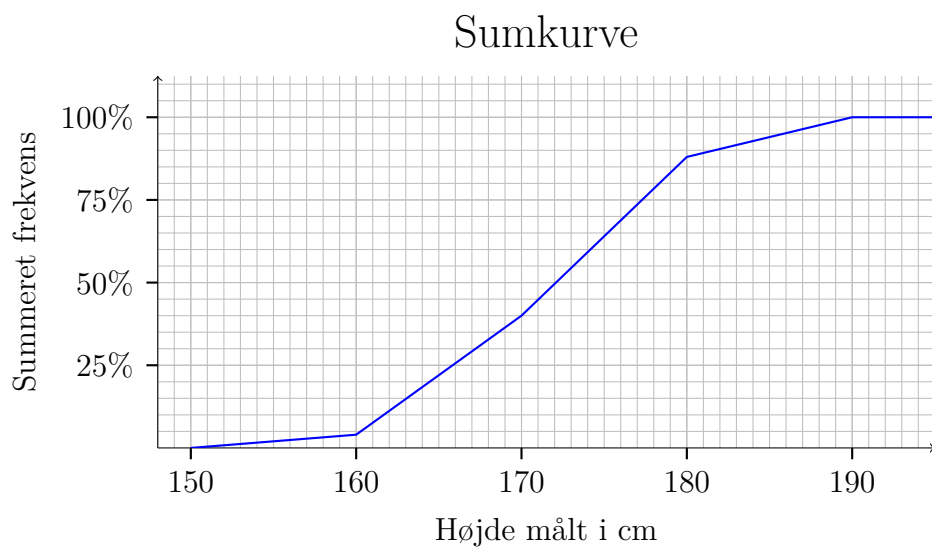
Sumkurven er den grupperede udgave af trappediagrammet. Man laver en sumkurve på følgende måde:

1. Man afsætter et punkt, med venstre intervalendepunkt fra første interval som førstekoordinat og 0 som andenkoordinat.
2. Man fortsætter ved at afsætte punkter, så man har de højre intervalendepunkter som førstekoordinat og de summerede frekvenser som andenkoordinater.
3. Til sidst forbinder man punkterne med linjestykker.

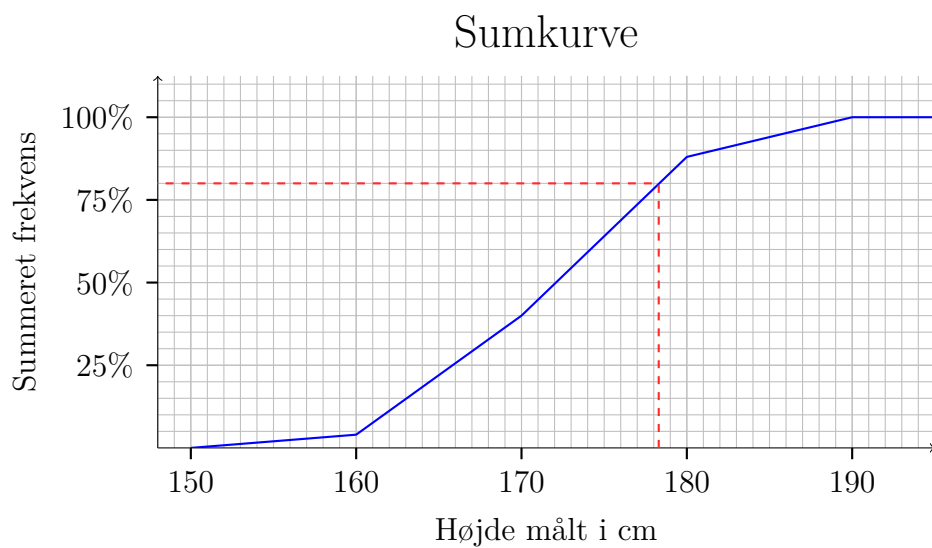
Med udgangspunkt i samme frekvenstabel:

Interval	intervalmidtpunkt(m_i)	Hyp. (h_i)	Frekv. (f_i)	Sum. frekv. (F_i)
]150; 160]	155	1	0,04	0,04
]160; 170]	165	9	0,36	0,40
]170; 180]	175	12	0,48	0,88
]180; 190]	185	3	0,12	1

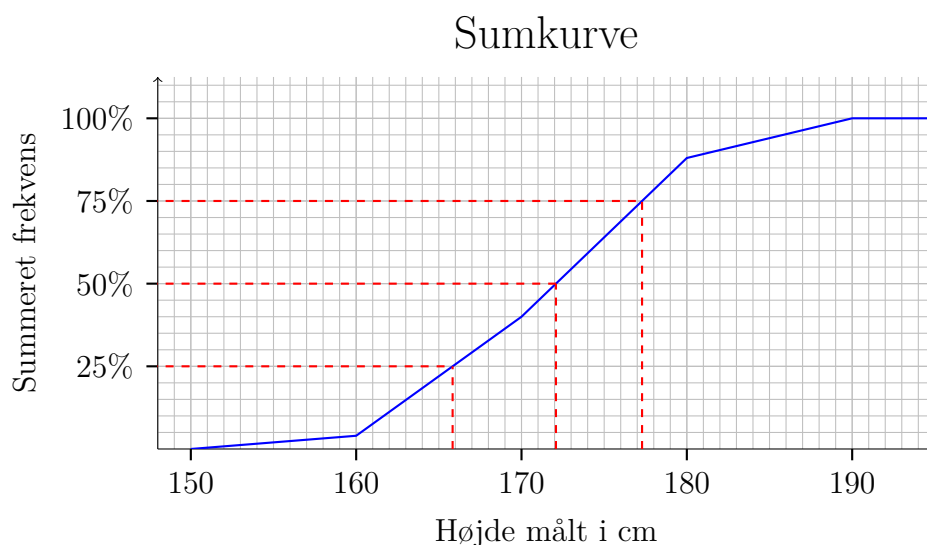
Får vi:



Vi bruger sumkurven til at aflæse fraktilerne. Som eksempel har vi her aflæst $x_{0,8}$ til at være ca. 178,3:



Her er kvartilsættet markeret:



Vi aflæser kvartilsættet til at være (166, 172, 177), hvilket løst sagt betyder at en fjerdedel af de unge var under 166 cm, halvdelen var under 172 og en fjerdedel var over 177 cm. Ved ugrupperede observationer kunne vi også aflæse kvartilsættet i frekvenstabellen, men der ikke muligt for grupperede observationer. Vi er tvunget til at lave en sumkurve.

Øvelse 12.3.1

Betragt observationssættet:

11, 11, 12, 13, 14,
15, 21, 21, 23, 24,
25, 25, 27, 28, 30,
30, 32, 33, 39, 40

- Lav en frekvenstabel hvor du inddeler observationerne i intervallerne $]10, 20]$, $]20, 30]$ og $]30, 40]$.
- Tegn et histogram med papir og blyant.
- Tegn en sumkurve med papir og blyant.
- Bestem 40%-fraktilen og forklar hvad den betyder.
- Bestem kvartilsættet og giv en løs fortolkning.
- Bestem kvartilafstanden.

12.4 Deskriptorer for grupperede observationer

Vi vil tage udgangspunkt i frekvenstabellen for højden på de 25 unge:

Interval	intervalmidtpunkt(m_i)	Hyp. (h_i)	Frekv. (f_i)	Sum. frekv. (F_i)
]150; 160]	155	1	0,04	0,04
]160; 170]	165	9	0,36	0,40
]170; 180]	175	12	0,48	0,88
]180; 190]	185	3	0,12	1

Er man god til at regne deskriptorer for ugrupperede observationer er det nemt at tilpasse sig til de grupperede observationerne, når man blot husker på at bruge intervalmidtpunkterne som observationer.

Typeinterval

Typeintervallet er det interval som optræder flest gange. Det er intervallet]170; 180], som har hyppigheden 12. Er der to eller flere intervaller som deler den højeste hyppighed, er der bare flere typeintervaller.

Fraktiler (x_p)

Ligesom ved ugrupperede observationer er p -fraktilen den **mindste** observation, som har en summeret frekvens på **mindst** p . Vi kan dog ikke aflæse den ud fra frekvenstabellen, da vi ikke har de enkelte observationer. I stedet må vi aflæse den på sumkurven som forklaret i afsnit [12.3](#).

Kvartiler, kvartilsæt og median

Bortset ændringen i den måde man finder fraktiler (og dermed også kvartiler) er der ingen ændringer i forhold til ugrupperede observationer. I sidste afsnit aflæste vi kvartilsættet (på sumkurven) til at være (166, 172, 177).

Kvartilafstand

Igen ingen forskel i forhold til ugrupperede observationer, så kvartilafstanden bliver

$$177 - 166 = 11$$

Så spændet i højde hos den midterste halvdel er på 11 cm.

Gennemsnit

Vi regner gennemsnittet med formlen:

$$\bar{x} = m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + \cdots + m_k \cdot f_k$$

Vi ser at det er samme formel som for ugrupperede observationer, bortset fra at intervalmidtpunktet erstatter observationerne. Hvis observationerne ligger jævnt fordelt i intervallet vil midtpunktet nemlig være en god repræsentant for observationerne. For vores observationer bliver det:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + \cdots + m_k \cdot f_k \\ &= 155 \cdot 0,04 + 165 \cdot 0,36 + 175 \cdot 0,48 + 185 \cdot 0,12 \\ &= 171,8\end{aligned}$$

Varsians

Variansen betegnes σ^2 regnes med formlen:

$$\sigma^2 = (m_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (m_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \cdots + (m_k - \bar{x})^2 \cdot f_k$$

Igen ser vi, at det er samme formel som for ugrupperede observationer bortset fra at intervalmidtpunktet erstatter observationerne. For vores observationer bliver det:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (m_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (m_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \cdots + (m_k - \bar{x})^2 \cdot f_k \\ &= (155 - 171,8)^2 \cdot 0,04 + (165 - 171,8)^2 \cdot 0,36 \\ &\quad + (175 - 171,8)^2 \cdot 0,48 + (185 - 171,8)^2 \cdot 0,12 \\ &= 53,76\end{aligned}$$

Standardafvigelse

Standardafvigelsen er stadig kvadratroden af variansen. Så for vores observationer bliver det:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{53,76} = 7,33$$

Så de unge har altså en gennemsnitshøjde på 171,8, men den typiske unge har altså en højde som afviger med ca. 7 cm fra dette.

Øvelse 12.4.1

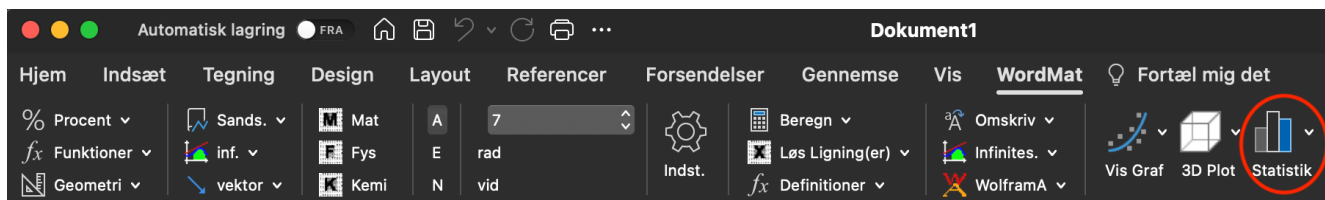
Vi vender tilbage til observationssættet fra øvelse 12.3.1:

11, 11, 12, 13, 14,
15, 21, 21, 23, 24,
25, 25, 27, 28, 30,
30, 32, 33, 39, 40

- Lav en frekvenstabel hvor du inddeler observationerne i intervallerne $]10, 20]$, $[20, 30]$ og $[30, 40]$. Du må godt genbruge den du lavet i øvelse 12.3.1.
- Bestem typeintervallet
- Bestem gennemsnittet.
- Bestem variansen.
- Bestem standardafvigelsen fortolk den.

12.5 WordMat statistik

Det er besværligt at lave statistik med papir og blyant. Derfor vil vi fremover primært bruge et værktøj til at lave statistik. Valget er faldet på WordMat-statistik, som er et Excel-ark som er en del af WordMat-pakken. Har man WordMat installeret kan man åbne statistikdelen ved at klike her:



Tryk "Aktivér Makroer" og du vil nu se et Excel-ark dukke op.

Man behøver dog ikke at installere WordMat for at kunne bruge det. Du kan downloade det [her](#).

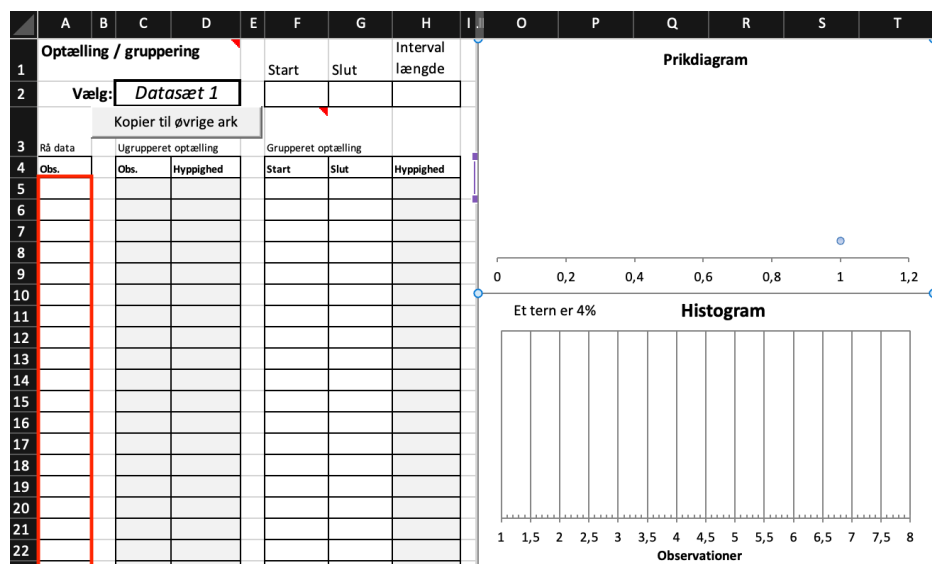
Øvelse 12.5.1

Åben Word.

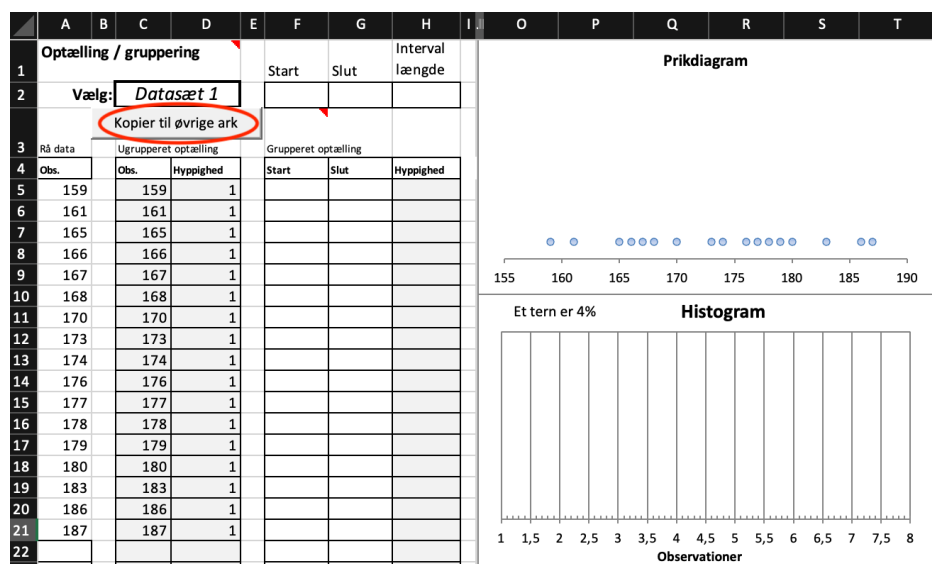
- Åben WordMat-statistik.

Vi vil tage udgangspunkt i observationssættet med højder på unge som vi tidligere

har behandlet. Jeg har været flink og skrevet det ind i Excel. Download det [her](#). Du skal paste observationerne fra Excel filen ind under observationer:



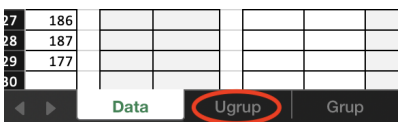
Vi copy-paster observationerne fra [Excel-arket](#) ind og trykker på "Kopier til øvrige ark":



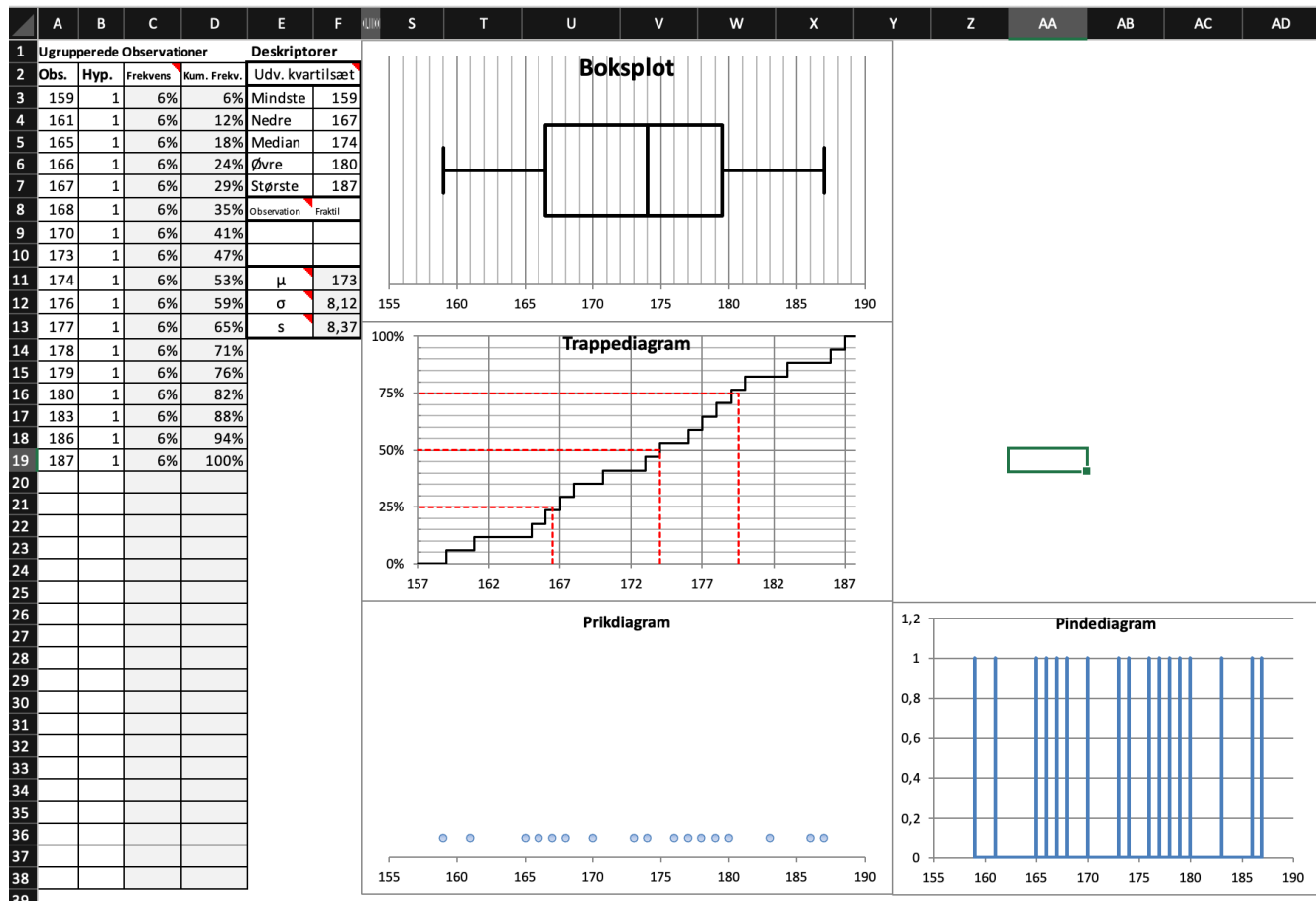
Ugrupperede observationer i WordMat

Vi vil starte med at behandle observationerne som ugrupperede observationer. Tidligere i kapitlet har vi behandlet disse observationer som grupperede, men fordi vi nu ikke selv skal lave beregninger, kan vi ligeså godt regne på dem som ugrupperede observationer. Når man grupperer smider man nemlig information væk, og det vil vi helst ikke, hvis der ikke grund til det.

Vi trykker på fanen "Ugrup":



Og får dette:



Vi ser:

- Frekvenstabellen. Den summerede frekvens hedder her "Kum. Frekv." (kumuleret frekvens).
- En boks med Deskriptorer. Den er rimeligt selvforklarende, men altså:
Mindste: Mindsteværdien min.
Nedre: Den nedre kvartil Q_1
Median: Medianen m
Øvre: Den øvre kvartil Q_3
Største: Størsteværdien max.
 μ : Gennemsnittet.

σ : Standardafvigelsen.

s: Estimat af standardafvigelse ud fra stikprøve. Denne vil du høre mere om i et senere kapitel.

- Et bokspot, et trappediagram, et pindediagram og et prikdiagram (som vi dog ikke har lært om).

Vi kan tilmed finde fraktiler. Her har jeg fundet 10%-fraktilen ved at skrive 10% under "Fraktil":

Deskriptorer	
Udv. kvartilsæt	
Mindste	159
Nedre	167
Median	174
Øvre	180
Største	187
Observation	Fraktil
161	10%
μ	173
σ	8,12
s	8,37

Jeg ser at 10%-fraktilen er 161.

Vha. WordMat-statistik kan vi altså finde alle de besværlige deskriptorer. Det er nemt at finde resten ud fra deskriptorerne fra WordMat.

Øvelse 12.5.2

Med udgangspunkt i screenshottet ovenover.

- Bestem variationsbredden
- Bestem kvartilafstande
- Bestem variansen

Grupperede observationer i WordMat

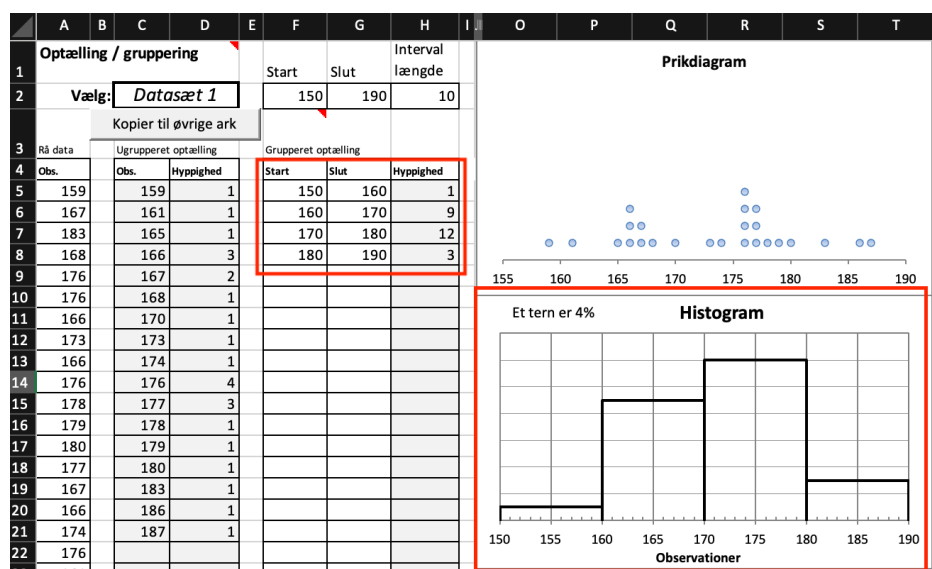
Der er en enkelt ting vi ikke er helt tilfredse med. Vi mangler et godt diagram. Når man har mange forskellige observationer er pindediagrammet nemlig ikke længere godt. Vi ser at vi har en masse pinde med samme højde og det er svært at overskue. Vi har brug for et histogram. Det er heldigvis nemt at lave. Vi klikker på fanen "data" for at komme tilbage til vores data:



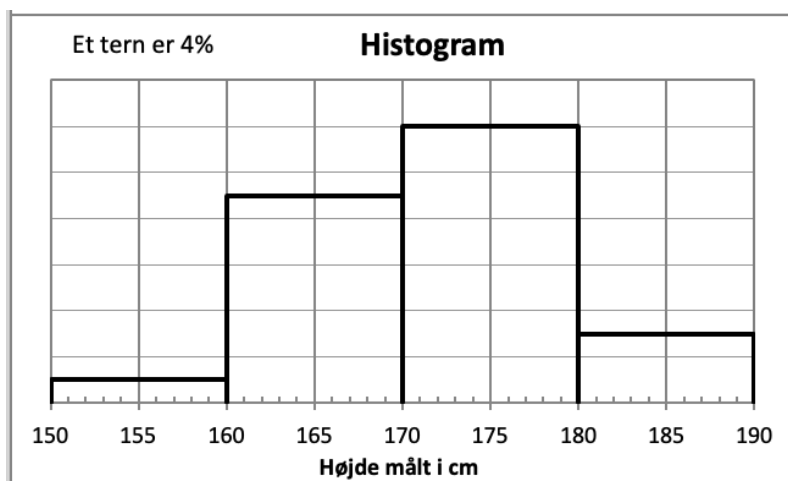
Vi kan gruppere data her. Vi skal bruge første intervalendepunkt fra første interval, sidste intervalendepunkt fra sidste interval og så længden på intervallerne. Læg mærke til hvordan man helt præcis skal skrive tallene ind. Af en eller anden grund går det altid galt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Optælling / gruppering					Start	Slut	Interval længde	
2		Vælg:	Datasæt 1			150	190	10	
3		Kopier til øvrige ark							
3	Rå data	Ugrupperet optælling				Grupperet optælling			

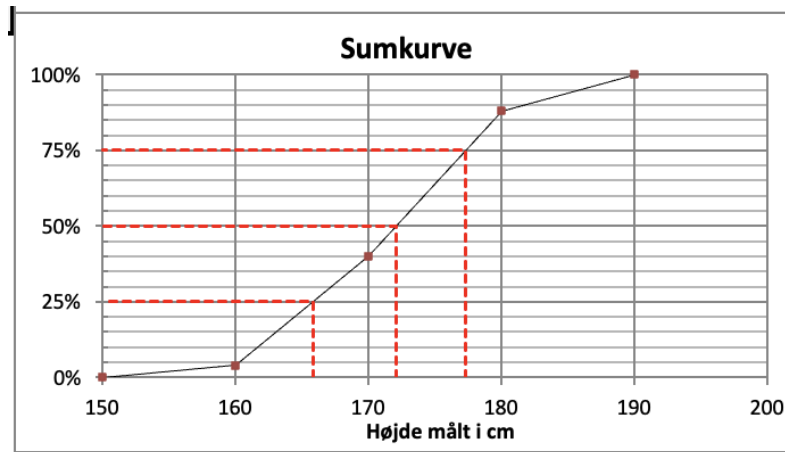
WordMat inddeler nu selv data i intervaller og vi får et histogram som vi kan bruge som diagram:



Vi skal lige ændre titlen på akserne så den passer til vores data (det er højde vi har målt):



Hvis vi klikker på fanen "Grup" kan vi se en sumkurve også:



Vi kan også se deskriptorer for grupperede observationer, men der er ingen grund til at bruge dem, da de bare er en upræcis udgave af de ugrupperede observationer. Når der ikke er nogen tidsbesparelse, kan man ligeså godt gøre det så præcist som muligt. Hurra for opfindelsen af computeren.

Øvelse 12.5.3

På en rideskole havde de en konkurrence om hvem der havde den hurtigste hest. Du kan se en oversigt over tiderne [her](#). Du skal nu lave en komplet statistisk analyse af tiderne. Du må gerne (og bør) bruge WordMat-statistik.

- a) Vurder om der er nogle outliers
- b) Grupper observationerne med start på 70, slut på 100 og en intervalbredde på 5
- c) Lav et diagram som viser fordelingen af tider.
- d) Bestem og fortolk mindste og størsteværdien.
- e) Bestem og fortolk variationsbredden.
- f) Bestem og fortolk typeintervallet.
- g) Bestem og fortolk kvartilsættet.
- h) Bestem og fortolk kvartilafstanden.
- i) Bestem gennemsnittet.
- j) Bestem variansen.
- k) Bestem og fortolk standardafvigelsen. Inddrag gennemsnittet i din fortolkning.

12.6 Beviser til statistik

Vi starter med at skrive den sætning op, vi vil bevise:

Sætning 12.2.1

Gennemsnittet $\bar{x}$ kan bestemmes ved følgende formel:

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_k \cdot f_k,$$

hvor $x_1, x_2, \dots, x_k$ er de forskellige observationer og $f_1, f_2, \dots, f_k$ er de tilhørende frekvenser.

Bevis

Gennemsnittet betyder alle observationerne lagt sammen divideret med antallet af observationer. Vi starter med at finde summen af observationerne. Vi husker, at $x_1, x_2, \dots, x_k$ betegner de **forskellige** observationer, og hver enkelt observation

optræder potentielt flere gange, så derfor skal vi gange hver observation med dens hyppighed for at finde summen af observationerne:

$$\text{Sum af observationer} = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \cdots + x_k \cdot h_k$$

Da der er n observationer betyder det, at gennemsnittet må være givet ved:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \cdots + x_k \cdot h_k}{n}$$

Vi deler brøken op:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot h_1}{n} + \frac{x_2 \cdot h_2}{n} + \cdots + \frac{x_k \cdot h_k}{n}$$

Sætter x 'erne ned foran:

$$\bar{x} = x_1 \frac{h_1}{n} + x_2 \frac{h_2}{n} + \cdots + x_k \frac{h_k}{n}$$

Men hyppighed delt med samlet hyppighed er jo frekvens:

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_k \cdot f_k$$

og sætningen er bevist.

12.7 Ekstra statistik

I dette afsnit skal vi først se på en smart måde at opskrive summer på, derefter skal vi se på beregning af gennemsnit og varians uden først at sortere observationssættet. Til sidst skal vi se et argument for hvorfor standardafvigelse er et godt spredningsmål.

Summationstegn

Når vi arbejder med statistik har vi ofte behov for at opskrive lange summer. Det kan gøres på en mere effektiv måde end det jeg har gjort igennem kapitlet. Lad os springe direkte ud i et eksempel:

$$\sum_{i=1}^3 4 \cdot i$$

Tegnet Σ kaldes et summationstegn skrivemåden betyder at vi skal regne det der står efter tegnet, dvs. $4 \cdot i$, for $i = 1$ op til $i = 3$ og så lægge det hele sammen.

Altså

$$\sum_{i=1}^3 4 \cdot i = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 24$$

Eksempel 12.7.1

Vi vil regne summen $\sum_{i=1}^4 (i^2 - 3)$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 (i^2 - 3) &= (1^2 - 3) + (2^2 - 3) + (3^2 - 3) + (4^2 - 3) \\ &= -2 + 1 + 6 + 13 \\ &= 18\end{aligned}$$

Øvelse 12.7.1

Regn følgende summer:

- a) $\sum_{i=1}^5 i$
- b) $\sum_{i=4}^6 i^2 - i$

Øvelse 12.7.2

Opskriv følgende summer med summationstegn

- a) $3 + 6 + 9 + 12 + 15$
- b) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ (måske lidt svær)

Eksempel 12.7.2

Har vi tre tal x_1, x_2 og x_3 , så er:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3$$

Har vi n forskellige tal $x_1, x_2, \dots, x_n$, så er:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Vi ser af eksemplet at vi kan opskrive lange summer på kort form og samtidig slippe af med ” $+\dots+$ ”, som jo er en lidt upræcis skrivemåde, da det kan være uklart hvad de tre prikker står for.

Øvelse 12.7.3

Lad der være givet to lister med tal $x_1, x_2, \dots, x_k$ og $h_1, h_2, \dots, h_k$ og betragt summen:

$$\sum_{i=1}^k (x_i \cdot h_i)$$

a) Opskriv summen (som i ovenstående eksempel).

Eksempel 12.7.3

Gennemsnittet $\bar{x}$ kan bestemmes ved følgende formel:

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_k \cdot f_k,$$

hvor $x_1, x_2, \dots, x_k$ er de forskellige observationer og $f_1, f_2, \dots, f_k$ er de tilhørende frekvenser. Vi kan skrive formelen på en smartere måde:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k (x_i \cdot f_i)$$

Øvelse 12.7.4

Variansen σ^2 kan bestemmes ved følgende formel:

$$\sigma^2 = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot f_k$$

hvor $\bar{x}$ er gennemsnittet $x_1, x_2, \dots, x_k$ er de forskellige observationer og $f_1, f_2, \dots, f_k$ er de tilhørende frekvenser.

a) Opskriv formelen for varians med summationstegn.

Gennemsnit og varians direkte fra observationssæt

I kapitlet har vi konsekvent bestemt deskriptorer ud fra frekvenstabellen. Men nogle af deskriptorerne kan beskrives mere grundlæggende direkte ud fra observationssættet. Lad os først se på gennemsnittet. Det er defineret ved:

Definition 12.7.1

Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ være et observationssæt. Da er gennemsnittet givet ved:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

I definitionen betegner n det samlede antal af observationer. Optræder den samme observation flere gange i observationssættet, optræder den altså også flere gange i summen. Så bruger man denne definition får man altså en længere sum end hvis regner gennemsnittet ud fra frekvenstabellen. Men definitionen **er** den grundlæggende definition (dvs. summen af observationerne delt med antallet af observationer). Definitionen skrives af typografiske årsager også som

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Den grundlæggende definition af varians lyder:

Definition 12.7.2

Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ være et observationssæt med gennemsnit $\bar{x}$. Da er variansen σ^2 givet ved:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Fra formlen ses hvad variansen udtrykker. Udtrykket $x_i - \bar{x}$ viser afvigelsen med den i 'te observation og gennemsnittet (regnet med fortegn). Det sættes i anden og vi får det som hedder *den kvadratiske afvigelse fra gennemsnittet* (og fortegnet mister sin betydning). Det samme gøres for alle observationerne, summen findes og der divideres med n . Vi får dermed den *den gennemsnitlige kvadratiske afvigelse fra gennemsnittet*.. Definitionen skrives af typografiske årsager også som

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Det er dog ikke helt den formel som står i formelsamlingen. Der står

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Formlen fra formelsamlingen udtrykker noget lidt andet end min formel. Formlen bruges til at estimere (anslå) variansen for en population (dvs. en stor gruppe) på baggrund af en stikprøve. Vi vil vende tilbage til den problemstilling når vi skal lære om konfidensintervaller i et senere kapitel.

Eksempel 12.7.4

Vi vil bestemme gennemsnittet for observationssættet 7, 0, 4, 7:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{1}{4}(7 + 0 + 4 + 7) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 18 \\ &= 4,5\end{aligned}$$

Øvelse 12.7.5

Betragt observationssættet 7, 0, 4, 7

- a) Bestem vha. definition [12.7.2](#) variansen for observationssættet.
- b) Bestem standardafvigelsen.

Mere om standardafvigelse

Så variansen er den gennemsnitlige kvadratiske afvigelse (dvs. afvigelserne er sat i anden) fra gennemsnittet. Standardafvigelsen er kvadratroden af variansen. Som vist her:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Man kunne godt tro at kvadratroden ville ophæve kvadraterne og man så ville få den gennemsnitlige afvigelse fra gennemsnittet. Det vil dog ikke ske. Alligevel tænker vi lidt på standardafvigelsen som om den er den gennemsnitlige afvigelse fra gennemsnittet. Den gennemsnitlige afvigelse fra gennemsnittet har dog sit eget navn, MAD, og kan regnes ved

$$\text{MAD} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Vi husker at de to streger betyder numerisk værdi. Altså at man skal ændre fortegnet til plus, hvis det er minus.

Øvelse 12.7.6

Betragt observationssættet 7, 0, 4, 7

- a) Regn MAD.
- b) Sammenlign MAD med standardafvigelsen som du fandt i øvelse [12.7.5](#).

I ovenstående øvelse så vi at standardafvigelsen var lidt højere end den gennemsnitlige afvigelse fra gennemsnittet (MAD). Dette gælder også generelt. Man kan undre sig over hvorfor man ikke bare bruger MAD, når den nu er nemmere at fortolke. Det er der flere dybtliggende grunde til. Men det vil være for meget at komme ind på dem her. Tænk på det som tradition. Ahh okay I får et enkelt argument:

Argument for standardafvigelse over MAD (Svært)

Lad os lege at vi synes at standardafvigelsen er skrald, og hellere vil bruge MAD som spredningsmål. Nu mangler vi så bare at finde et godt centralmål som passer med MAD. Lad os tage udgangspunkt i et eksempel, hvor vi ser på observations-sættet 1, 1, 10. Gennemsnittet er 3 så vi får:

$$\begin{aligned}\text{MAD} &= \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} \\ &= \frac{|1 - 3| + |1 - 3| + |10 - 3|}{3} \\ &= 3,7\end{aligned}$$

Altså den gennemsnitlige afvigelse fra gennemsnittet MAD, er 3,7. Lad os prøve noget sjovt. Vi bytter gennemsnittet $\bar{x}$ ud med medianen m i formlen for MAD. Resultatet kalder vi MAD_m :

$$\text{MAD}_m = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - m|}{n}$$

Lad os prøve at regne MAD_m for observationssættet 1, 1, 10. Medianen er 1, så vi får.

$$\begin{aligned}\text{MAD}_m &= \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - m|}{n} \\ &= \frac{|1 - 1| + |1 - 1| + |10 - 1|}{3} \\ &= 3.\end{aligned}$$

Vi ser at MAD_m er mindre end MAD. Det er ikke noget tilfælde og det gælder generelt, at $\text{MAD}_m \leq \text{MAD}$. Men hvis $\text{MAD}_m \leq \text{MAD}$, må det være fordi observationerne som helhed ligger tættere på medianen end gennemsnittet. Dvs. medianen ligger mere i midten end gennemsnittet. Så hvis man mener at MAD er det "bedste" spredningsmål er man lidt nødt til at acceptere medianen som det "bedste" centralmål. Generelt fortrækker vi dog gennemsnittet som centralmål,

så måske skulle man prøve at finde et andet spredningsmål, som passer bedre til det. Her viser det sig at variansen er det simpleste naturlige centralmål, som gør gennemsnittet til midten af observationerne. Variansen i sig selv, er dog lidt svær at forholde sig til fordi den er regnet ud fra afvigelser i anden. Ved at tage kvadratroden får vi et resultat som ligger mellem mindsteværdien og størsteværdien, og som vi (noget løst) kan fortolke som den typiske afvigelse fra gennemsnittet.

Kapitel 13

Grundlæggende sandsynlighedsregning

I dette kapitel skal vi se på, hvordan man bestemmer simple sandsynligheder, som f.eks. sandsynligheden for at slå to 6'ere på en gang med to terninger.

Derudover skal vi indføre begreber og metoder, som danner grundlag for de følgende kapitler.

Vi starter kapitlet med et afsnit om kombinatorik, som handler om at bestemme antallet af måder, noget kan gøres på. Det kunne f.eks. være, hvor mange måder man kan vælge to elevrådsrepræsentanter i en Niels Brock klasse.

13.1 Kombinatorik

Kombinatorik handler om, hvor mange forskellige måder noget kan gøres på. Alt-så hvor mange kombinationer man kan lave. Måske kender i tælletræer fra folke-skolen? Kombinatorik er et spændende emne, men vi skal kun kigge på enkelte begreber, som danner forudsætning for at vi kan forstå den mere avancerede sand-synlighedsregning som kommer senere.

Definition 13.1.1

Vi definerer $n!$ ved:

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Tallet $n!$ kaldes *n-fakultet*

Ovenstående definition gælder når $n > 1$. Vi definerer $1! = 1$ og $0! = 1$.

Eksempel 13.1.1

Vi udregner $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Øvelse 13.1.1

Bestem ved hovedregning

a) $5!$

b) $0!$

Vi bruger n -fakultet til at bestemme antallet af mulige rækkefølger man kan opstille n elementer.

Eksempel 13.1.2

Har man 20 elever som gerne vil købe en billet til et fest, så kan man finde ud af, hvor mange muligheder der er for at danne køen til elevcenteret. På den første plads kan der stå 20 elever. For hver af de 20 muligheder er der 19 muligheder for den efterfølgende elev, dvs. $20 \cdot 19$ i alt. For hver af de $20 \cdot 19$ muligheder er der nu 18 muligheder for den næste, dvs. $20 \cdot 19 \cdot 18$ i alt osv.

I sidste ende får vi altså antallet af muligheder til at blive:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 20!$$

Øvelse 13.1.2

a) Bestem antallet af måder man kan opstille 10 i elever i en kø til kantinen.

Vi skal nu se på et lidt mere kompliceret kombinatorisk problem. Forstil jer at der kun er to billetter tilbage til en skolefest og der er 5 elever som gerne vil med. Hvor mange måder er der at fordele billetterne på? En mulighed kunne være:

Navn	Wan	Dennis	Jeffrey	Daniel	Jellow
Får billet			×		×

Her får altså Jeffrey og Jellow en billet. Men vi kunne have fordelt de to billetter på mange måde, og vi skal nu se hvordan man finder antallet af måder vi kan fordele billetterne.

Definition 13.1.2

Binomialkoefficienten $K(n, r)$ er antallet af måder man kan sætte r krydser på n pladser.

Sætning 13.1.1

Binomialkoefficienten $K(n, r)$ kan bestemmes ved formlen

$$K(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Eksempel 13.1.3

Ved hjælp af sætning 13.1.1 kan vi bestemme antallet af måder, vi kan fordele billetterne til skolefesten. Vi har to krydser så $r = 2$ og vi har 5 pladser så $n = 5$. Vi udregner:

$$\begin{aligned} K(n, r) &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{5!}{2!(5-2)!} \\ &= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{120}{12} = 10 \end{aligned}$$

Altså er der 10 måder billetterne kan fordeles på.

Øvelse 13.1.3

- a) På hvor mange måder, kan man fordele 3 billetter til 6 mennesker?

Øvelse 13.1.4 (Svær)

En elev fra Niels Brock skal holde fødselsdagsfest for klassen.

Eleven har 8 store kasser med slik. I hver kasse er der netop en type slik og der er ikke to kasser med samme type.

Eleven vil gerne lave slikposer med 4 forskellige stykker slik i hver, og der må ikke være to ens poser. Der skal være en pose til hver elev.

- a) Kan det lade sig gøre?

13.2 Endelige sandsynlighedsfelter

Sandsynlighedsregning handler om at regne sandsynligheder for forskellig ting der kan ske. Når der sker noget tilfældigt kalder vi det et *stokastisk eksperiment*. Det kan f.eks. være kast med en terning eller en mønt.

Øvelse 13.2.1

- a) Nævn tre stokastiske eksperimenter.

Definition 13.2.1

For et stokastisk eksperiment definerer vi

Udfald Et *udfald* er resultatet af det stokastiske eksperiment. Vi betegner udfaldene med lille u .

Udfaldsrum Et *udfaldsrum* er mængden bestående af alle udfald. Vi betegner udfaldsrummet med U .

Eksempel 13.2.1

Vi kaster en terning.

Udfaldene er: $u_1 = \square$, $u_2 = \square$, $u_3 = \square$, $u_4 = \square$, $u_5 = \square$ og $u_6 = \square$

Udfaldsrummet er: $U = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$.

Øvelse 13.2.2

Antag at vi kaster en mønt. Bestem:

- a) Udfaldene
b) Udfaldsrummet

Til udfaldene i udfaldsrummet hører sandsynligheder. Det er mest simpelt at arbejde med endelige udfaldsrum, så det vil vi begrænse os til i første omgang.

Definition 13.2.2

Lad $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ være et endeligt udfaldsrum. Vi definerer:

Sandsynlighedsfunktion: En *sandsynlighedsfunktion* er en funktion P som til et hvert udfald u knytter sandsynligheden for dette udfald $P(u)$. Funktionen skal opfylde:

1. $P(u) \geq 0$ for alle $u \in U$
2. $P(u_1) + P(u_2) + \dots + P(u_n) = 1$

Sandsynlighedsfelt: Udfaldsrummet U sammen med sandsynlighedsfunktionen P kaldes et endeligt *sandsynlighedsfelt* og betegnes (U, P) .

Øvelse 13.2.3

De to krav i definitionen af en sandsynlighedsfunktion udtrykker velkendte egenskaber ved sandsynligheder.

- a) Hvad betyder kravet $P(u) \geq 0$ for alle $u \in U$?
- b) Hvad betyder kravet $P(u_1) + P(u_2) + \dots + P(u_n) = 1$?

Har vi et sandsynlighedsfelt (U, P) , vil vi ofte beskrive det med et sildeben for sandsynlighedsfunktionen. Sådan en tabel kalder vi en *sandsynlighedstabel*.

Eksempel 13.2.2

Sandsynlighedsfunktionen for et terningkast kan beskrives ved følgende sandsynlighedstabel.

u						
$P(u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Øvelse 13.2.4

Vi kaster en mønt.

- a) Opskriv en sandsynlighedstabel for sandsynlighedsfeltet.

Øvelse 13.2.5

Ved kommunalvalget i 2013 gik det således for sig på Læsø:

Socialdemokraterne (A)	23,1%
Læsø Liste	24,4%
Samarbejdslisten	11,6%
Venstre (V)	16,1%
Læsø Borgerliste	10,1%
Dansk Folkeparti (O)	9,2%
Det Konservative Folkeparti (C)	5,5%

Vi tager nu en tilfældig borger på Læsø som har stemt på et parti til kommunalvalget.

- a) Opskriv sandsynlighedstabellen, der beskriver denne borgers stemme.

Øvelse 13.2.6

Lad $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ være et udfaldsrum og betragt tabellen:

u	u_1	u_2	u_3	u_4
$P(u)$	0,5	-0,1	0,4	0,1

Tabellen kan ikke være en sandsynlighedstabel, da P ikke opfylder kravene i definition 13.2.2.

- a) Hvilke krav er det P ikke opfylder?

Øvelse 13.2.7

En elev laver en snydeterning. Sandsynlighedstabellen for et kast med denne terning ser således ud:

u						
$P(u)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	?

- a) Bestem sandsynligheden for at slå en 6'er.

Ekstra

Kan man finde ud af at bruge summationstegn kan definitionen af et sandsynlighedsfelt udtrykkes mere klart:

Definition 13.2.3

Lad U være et endeligt udfaldsrum. Vi definerer:

Sandsynlighedsfunktion: En *sandsynlighedsfunktion* er en funktion P som til et hvert udfald u knytter sandsynligheden for dette udfald $P(u)$. Funktionen skal opfylde:

1. $P(u) \geq 0$ for alle $u \in U$
2. $\sum_{u \in U} P(u) = 1$

Sandsynlighedsfelt: Udfaldsrummet U sammen med sandsynlighedsfunktionen P kaldes et endeligt *sandsynlighedsfelt* og betegnes (U, P) .

Skrivemåden $\sum_{u \in U} P(u)$ betyder at vi skal tage alle udfaldene u i U og lægge deres sandsynligheder sammen.

13.3 Hændelser

Lad os sige at vi spiller et spil med terning og har brug for at slå en 5'er eller en 6'er for at vinde. I det tilfælde er vi ligeglade om vi slår 5 eller 6, bare vi får en af de to. En sådan begivenhed kaldes en hændelse. Mere præcist:

Definition 13.3.1

Lad der være givet et udfaldsrum U . En *hændelse* A er en delmængde af U .

Så i forhold til vores spil, hvor vi var interesserede i at slå 5 eller 6, så er vi altså interesserede i hændelsen $A = \{\text{5'er}, \text{6'er}\}$.

Nogle gange vil vi tillade os at beskrive en hændelse med ord, i stedet for at opskrive de udfald som hændelsen består af. F.eks. kunne vi beskrive hændelsen $A = \{\text{5'er}, \text{6'er}\}$ som $A = \text{"Mindst en 5'er"}$.

Eksempel 13.3.1

Trækker vi et kort fra et kortspil er det et stokastisk eksperiment. Udfaldsrummet består af de 52 kort som er i kortspillet. Følgende er eksempler på hændelser

i dette udfaldsrum:

- $A = \text{"En hjerter"}$.
- $B = \text{"Et rødt kort"}$ (altså en hjerter eller en ruder. Ikke det røde kort i fodbold)

Der er 52 kort i et kortspil og en fjerdedel af dem er hjertere, så der er 13 udfald i hændelsen A . Halvdelen af kortene er røde så der er 26 udfald i B .

Øvelse 13.3.1

Antag at vi kaster en terning.

- a) Opskriv hændelsen $A = \text{"Et lige antal øjne"}$ som en mængde. Altså skriv A på formen $A = \{\dots\}$.

Sandsynligheden for en hændelse

Sandsynligheden for at en hændelse indtræffer regnes ved at lægge sandsynlighederne for de enkelte udfald sammen. Altså hvis $A = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$ så er

$$P(A) = P(u_1) + P(u_2) + P(u_3) \dots$$

Eksempel 13.3.2

Vi ser på igen på vores snydeterning

u						
$P(u)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Vi vil bestemme sandsynligheden for hændelsen $A = \{\square, \text{6 eyes}\}$. Vi regner:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\square) + P(\text{6 eyes}) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Så $P(A) = \frac{1}{3}$.

Øvelse 13.3.2

Med udgangspunkt i snydeterningen fra ovenstående eksempel.

- a) Bestem sandsynligheden for at slå 4, 5 eller 6

Disjunkte hændelser

Nogle gange er vi interesserede i mere end en enkelt hændelse. Det kunne være at man trak et kort fra et kortspil og ville have et kort der enten er "en spar" eller "en hjerter". Skal man regne sandsynligheden for dette er det afgørende om hændelserne "overlapper" hinanden.

Definition 13.3.2

To hændelser kaldes disjunkte, hvis de ikke har nogle udfald tilfælles.

Eksempel 13.3.3

Vi kaster en terning. Hændelserne $A = \{\square, \boxplus\}$ og $B = \{\square, \boxtimes, \boxdot\}$ er disjunkte, da de to hændelser ikke har nogle udfald til fælles.

Øvelse 13.3.3

Afgør, hvilke af følgende par af hændelser som er disjunkte:

- a) Vi kaster med en terning. $A = \{\boxplus\}$ og $B = \text{"Et lige antal øjne"}$.
- b) Vi kaster to terninger. Hændelse $A = \text{"summen af antal øjne er større end 4"}$. Hændelse $B = \text{"den første terning er en 1'er"}$.
- c) Vi trækker et kort fra et almindeligt spil kort. Hændelse $A = \text{"en spar"}$ og hændelse $B = \text{"et billedkort"}$.

Vi har en sætning vi kan bruge til at beregne sandsynligheder for disjunkte hændelser:

Sætning 13.3.1

Lad der være givet to disjunkte hændelser A og B . Da er sandsynligheden for at enten den ene eller den anden indtræffer givet ved $P(A) + P(B)$.

Eksempel 13.3.4

Sandsynligheden for at få enten $A = \{\boxplus\}$ eller $B = \text{"et ulige antal øjne"}$ med

en almindelig terning er:

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

da der er tale om to disjunkte hændelser.

Øvelse 13.3.4

Antag at vi kaster en almindelig terning. Bestem som i eksempel 13.3.4 sandsynligheden for at få en af hændelserne i følgende par af hændelser.

- a) $A = \{\square, \square\}$ og $B = \{\square, \square\}$.
- b) $A = \{\square, \square\}$ og $B = \text{"lige antal øjne"}$.

Komplementære hændelser

Komplementære hændelser er hændelser som er hinandens modsætninger. Altså:

Definition 13.3.3

Lad A og B være to hændelser. Hændelsen A kaldes komplementær til hændelsen B , hvis A består af alle de udfald som ikke er i B .

Ud fra definitionen er det klart at hvis A er komplementær til B så er B også komplementær til A .

Eksempel 13.3.5

Ved kast med en terning er hændelserne $A = \{\square\}$ og $B = \text{"ikke en 6'er"}$ komplementære.

Øvelse 13.3.5

Bestem, hvilke af følgende par af hændelser som er komplementære

- a) Vi kaster en terning $A = \text{"et lige antal øjne"}$ og $B = \text{"et ulige antal øjne"}$.
- b) Vi kaster en mønt $A = \text{"plat eller krone"}$ og $B = \text{"krone"}$
- c) Vi kaster to terninger $A = \text{"Vi får to 5'ere eller to 6'ere"}$ og $B = \text{"summen er større"}$

For to komplementære hændelser A og B , kan sandsynligheden for hændelsen A

bestemmes med formlen

$$P(A) = 1 - P(B).$$

Eksempel 13.3.6

Ved kast med en terning er sandsynligheden for $A = \text{"ikke en 6'er"}$ givet ved

$$P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

da $P(6) = \frac{1}{6}$ og A er den komplementære hændelse til hændelsen "en 6'er".

Øvelse 13.3.6

En elev udtænker et snedigt spil, således at eleven har 58% chance for at vinde penge fra sin dansklærer.

- a) Vi kigger på hændelsen: "Eleven vinder". Hvad er den komplementære hændelse?
- b) Hvad er sandsynligheden for den komplementære hændelse?
- c) Hvad er sandsynligheden for at eleven taber?

Uafhængige hændelser

Forestil dig, at du er på kasino og spiller roulette. Forestil dig, at den bliver sort 10 gange i træk. Så må chancen for den bliver rød næste gang vel være stor eller hvad? Nej sandsynligheden for rød er den samme uanset, hvad den tidligere er landet på fordi de enkelte runder er "uafhængige".

Definition 13.3.4

To hændelser kaldes *uafhængige*, hvis indtræffelse af den ene ikke påvirker sandsynligheden for den anden.

Eksempel 13.3.7

Hvis vi slår med to terninger er følgende hændelser uafhængige:

$A = \text{"Den første terning bliver en 6'er"}$

$B = \text{"Den anden terning bliver 6'er"}$

Årsagen til de er uafhængige er, at den første ternings resultat ikke ændrer sandsynlighederne for de forskellige udfald for den anden terning.

Eksempel 13.3.8

Vælg en tilfældig dag i år 2020. Følgende hændelser er ikke uafhængige.

A = "Det regnede på denne dag".

B = "Det regnede dagen efter denne dag".

Årsagen til de ikke er uafhængige er at den første hændelse "ændrer på" sandsynligheden for den anden. Regnvejrsdage har det med at klumpe sig sammen, så hvis vi ved at det regnede på en bestemt dag, øger det sandsynligheden for at det også regnede dagen efter (eller dagen før).

Sandsynligheden for at to uafhængige hændelser A og B begge indtræffer er givet ved $P(A) \cdot P(B)$.

Eksempel 13.3.9

Vi bestemmer sandsynligheden for at få to 6'ere i to kast med en almindelig terning. Sandsynligheden for den første terning bliver en 6'er er $\frac{1}{6}$ og sandsynligheden for den anden terning bliver en 6'er er $\frac{1}{6}$. Altså kan vi bestemme sandsynligheden for at de begge bliver 6'ere:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Der er altså $\frac{1}{36}$ sandsynlighed for at få to 6'ere.

Øvelse 13.3.7

Afgør hvilke af følgende par af hændelser som er uafhængige

- a) Vi kaster en mønt og en terning. A = "krone" og B = "en 6'er".
- b) Vi trækker to kort fra et almindeligt spil kort. A = "Første kort er en klør" og B = "Andet kort er en klør"

Øvelse 13.3.8

Antag vi kaster en mønt og en terning på en gang.

- a) Bestem sandsynligheden for at man får krone og en 6'er.

Symmetriske sandsynlighedsfelter

Kaster man en almindelig terning er der lige stor sandsynlighed for alle udfald. Sådan et sandsynlighedsfelt kaldes et *symmetrisk sandsynlighedsfelt*.

Definition 13.3.5

Et symmetrisk sandsynlighedsfelt er et sandsynlighedsfelt hvor alle udfald har samme sandsynlighed.

Eksempel 13.3.10

Et terningkast giver et symmetrisk sandsynlighedsfelt, da alle udfald har samme sandsynlighed.

Øvelse 13.3.9

I eksemplet oven over står der at et terningkast giver et symmetrisk sandsynlighedsfelt.

a) Gælder et også hvis det er en snydeterning?

I et symmetrisk sandsynlighedsfelt kan man regne sandsynligheden for en hændelse A ved hjælp af formlen:

$$P(A) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}}$$

Eksempel 13.3.11

Vi kaster en almindelig terning. Vi vil regne sandsynligheden for hændelsen $A = \text{"et lige antal øjne"}$. Vi kan regne sandsynligheden ved at sige:

$$P(A) = P(\text{☐}) + P(\text{☒}) + P(\text{⊞})$$

Men det er faktisk nemmere at bruge formlen for symmetriske sandsynlighedsfelter:

$$P(A) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}}$$

Der er 6 mulige udfald på en terning og 3 af disse er gunstige (viser et lige antal øjne). Så vi får

$$P(A) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Øvelse 13.3.10

Bestem sandsynligheden for følgende hændelser.

- a) En rollespilsnørd spiller et "pen and paper" rollespil. Han slår med et 8-siddet terning. Hvad er sandsynligheden for at slå over en 2'er?
- b) Vi trækker et kort fra et almindeligt kortspil. Hvad er sandsynligheden for at få en hjerter?

Ekstra

I formelsamlingen optræder en del udtryk hørende til dette afsnit. Jeg vil nu gennemgå dem en ad gangen.

$$P(A) = \sum_{u \in A} P(u) \quad (92)$$

Dette er bare en mere fancy måde at skrive, at sandsynligheden for hændelsen A , findes ved at lægge sandsynligheden for de enkelte udfald u i A sammen. Man kan I øvrigt undrer sig lidt over denne formel, for er P defineret på udfald eller hændelser? Det havde bedre at bruge to forskellige bogstaver og skrive

$$P(A) = \sum_{u \in A} p(u)$$

Her ville p være sandsynlighedsfunktionen tilhørende sandsynlighedsfeltet og P ville være funktionen der knytter sandsynligheder til hændelser. Men i formelsamlingen hedder begge funktioner P , så det gør de også her. Næste formel:

$$P(U) = 1 \quad (94)$$

Udfaldsrummet U er en delmængde af sig selv og derfor kan man betragte U som en hændelse. Da udfaldsrummet består af alle de mulige udfald er $P(U) = 100\% = 1$ (selvfølgelig). Hændelsen U kaldes også den *sikre hændelse*. Næste formel:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (95)$$

Vi husker at $\emptyset$ er den tomme mængde. Dvs. det er en hændelse med ingen elementer i. Da alle udfald ligger udenfor denne hændelse er den umulig at få. Derfor kaldes den også den *umulige hændelse*. Næste formel:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (96)$$

Her betegner $\bar{A}$ den komplementære hændelse til A og formlen er bare formlen for komplementære hændelser. Næste formel:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (97)$$

Denne formel kaldes additionsformlen. Hændelsen $A \cup B$ er foreningsmængden af hændelsen A og hændelsen B , og består af alle udfaldene i A sammen med alle udfaldene i B . Dvs. $P(A \cup B)$ er sandsynligheden for at enten A eller B (eller begge) indtræffer. Den sandsynlighed har vi allerede set på i tilfældet hvor A og B er disjunkte, men her er altså den generelle formel. Formlen er den samme som for disjunkte hændelser bortset fra det sidste led $P(A \cap B)$. Dette led udtrykker sandsynligheden for at både A og B indtræffer, og den sandsynlighed trækker vi fra, fordi vi er kommet til at tælle den med to gange (en gang som en del af $P(A)$ og en gang som en del af $P(B)$).

Næste formel gælder kun for symmetriske sandsynlighedsfelter. Man kan sige, at den er definitionen på et symmetrisk sandsynlighedsfelt:

$$P(u_1) = P(u_2) = \dots = P(u_n) = \frac{1}{n} \quad (98)$$

Her er n antallet af udfald i udfaldsrummet. Et symmetrisk sandsynlighedsfelt er karakteriseret ved at alle udfald har samme sandsynlighed. Hvis der er n udfald og summen af sandsynlighederne skal være 1, så må hvert udfald have sandsynligheden $\frac{1}{n}$. Ligesom der er 6 udfald ved et terningkast og sandsynligheden for hvert udfald er $\frac{1}{6}$.

Øvelse 13.3.11

Vi kaster en almindelig terning og ser på hændelserne $A = \{\square, \blacksquare\}$ og $B = \{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$.

- Bestem sandsynligheden for at enten A eller B (eller begge) hændelser indtræffer.

13.4 Stokastiske variable

Vi har før set på terningkast som stokastiske eksperimenter. Sandsynlighedstabellen for et terningkast ser således ud:

u						
$P(u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Hvis vi betegner antallet af øjne med X , så får vi en variabel, som afhænger af udfaldet af terningkastet. En sådan variabel kaldes en *stokastisk variabel*. Variablen X kan antage værdierne 1, 2, 3, 4, 5, 6 med en sandsynlighed på $\frac{1}{6}$ for hver værdi. Vi har en særlig måde at betegne sandsynligheder for en stokastisk variabel. Sandsynligheden for at den stokastiske variabel giver f.eks. 2 betegnes med

$P(X = 2)$. Vi har altså at $P(X = 2) = \frac{1}{6}$. Vi kan nu opskrive sandsynlighedstabel for X :

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

En sandsynlighedstabel for en stokastisk variabel kaldes også en *sandsynlighedsfordeling*. Vi skal senere se på sandsynlighedsfordelinger, som ikke kan beskrives med en tabel, men dem vil vi ikke bekymre os om nu.

Øvelse 13.4.1

Vi kaster en almindelig terning og lader X være antallet af øjne.

a) Bestem $P(X = 4)$.

Det kunne godt se ud som om der ikke rigtig er nogen forskel på et sandsynlighedsfelt og en stokastisk variabel. Sandsynlighedstabellen for den stokastiske variabel der betegner antallet af øjne ved et terningkast ser ud til at være den samme som sandsynlighedstabellen for udfaldsrummet ved terningkastet – bare skrevet lidt anderledes. Men der er to afgørende forskelle.

1. Stokastiske variable har altid talværdier, mens udfald kan være hvad som helst. Kaster vi en mønt er udfaldene ”plat” og ”krone” og da de to udfald ikke er tal, kan de ikke være værdier for en stokastisk variabel.
2. Et stokastisk eksperiment har altid et fast udfaldsrum, men der er mange måder at tilknytte en stokastisk variabel (se nedenstående eksempel).

Eksempel 13.4.1

Antag at vi kaster en terning. Definer den stokastiske variabel X til at være 2 gange antallet af øjne. Så får vi tabellen:

x	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Øvelse 13.4.2

Antag vi kaster en mønt. Lad X være den stokastiske variabel er 0 når udfaldet er ”plat” og 1 når udfaldet er ”krone”.

- a) Opskriv sandsynlighedsfordelingen for den stokastiske variabel som er defineret ved værdien.

Nogle vil vi kigge på stokastiske variable alene ud fra deres sandsynlighedsfordeling uden at have et bagvedliggende eksperiment.

Eksempel 13.4.2

Betragt den stokastiske variable givet ved følgende sandsynlighedsfordeling:

x	3	9	30
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Hvilken praktisk situation beskriver tabellen? Umiddelbart ikke nogen. Men gør ikke noget. Vi behøver kun at kende sandsynlighedstabellen – så kan vi arbejde med X .

Sandsynlighederne for en stokastisk variabel skal selvfølgelig give 1 når man lægger dem sammen.

Øvelse 13.4.3

Betragt sandsynlighedsfordeling:

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	?	$\frac{1}{8}$

- a) Bestem den manglende sandsynlighed

Middelværdi, varians og standardafvigelse for stokastiske variable

Stokastiske variable har talværdier og derfor kan vi regne på dem.

Definition 13.4.1

Lad X være en stokastisk variabel med sandsynlighedsfordelingen:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Vi definerer *middelværdien* $E(X)$ ved

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n.$$

Middelværdien betegnes også med μ . Vi definerer *variansen* $\text{Var}(X)$ ud fra middelværdien μ ved

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n.$$

Variansen betegnes også med σ^2 . Vi definerer *standardafvigelsen* $SD(X)$ ud fra variansen $\text{Var}(X)$ ved:

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Standardafvigelsen betegnes også med σ .

Vi skal nu se et eksempel, hvor vi regner middelværdi, varians og standardafvigelse. Senere vil vi se på, hvilken betydning disse tal har.

Eksempel 13.4.3

Vi vil regne middelværdi, varians og standardafvigelse for den stokastiske variabel givet ved følgende sandsynlighedsfordeling:

x	3	4	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Vi regner først middelværdien:

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 1 + 2 + 2 \\ &= 5 \end{aligned} \tag{13.1}$$

Vi konkluderer at middelværdien er 5. Vi husker at middelværdien også kaldes μ , så $\mu = 5$.

Vi regner så variansen. Her skal vi bruge resultatet vi lige har regnet. Altså at $\mu = 5$.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \cdots (x_n - \mu)^2 \cdot p_n \\
 &= (3 - 5)^2 \cdot \frac{1}{3} + (4 - 5)^2 \cdot \frac{1}{2} + (12 - 5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + \frac{49}{6} \\
 &= \frac{8}{6} + \frac{3}{6} + \frac{49}{6} \\
 &= \frac{60}{6} \\
 &= 10
 \end{aligned} \tag{13.2}$$

Variansen er altså 10.

Vi regner til sidst standardafvigelsen $SD(X)$. Her skal vi bruge variansen vi lige har regnet. Altså at $\text{Var}(X) = 10$.

$$\begin{aligned}
 SD(X) &= \sqrt{\text{Var}(X)} \\
 &= \sqrt{10} \\
 &\approx 3,16
 \end{aligned} \tag{13.3}$$

Standardafvigelsen $SD(X)$ er hermed 3,16.

Øvelse 13.4.4

Betragt den stokastiske variabel X givet ved følgende sandsynlighedsfordeling:

x	6	9
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

- Bestem middelværdien
- Bestem variansen
- Bestem standardafvigelsen

Øvelse 13.4.5

I denne øvelse skal du regne på en terning. Der bliver en del regneri, så jeg anbefaler at du bruger Exel. Ellers bare spring opgaven over, hvis du ikke kan finde ud af det. Vi får brug for facit senere, så tjek dem ud uanset hvad.

- a) Bestem middelværdien
- b) Bestem variansen
- c) Bestem standardafvigelsen

Lad os til slut se på betydningen af middelværdi, varians og standardafvigelse. Vi tager udgangspunkt i terningkastet I lige har regnet på.

Middelværdien for terningkastet var 3,5. Det betyder at hvis kaster terningen mange gange, så vil det gennemsnitlige antal øjne komme tæt på 3,5. Jeg har lige simuleret 100 terningkast i Excel og det gav et gennemsnit på 3,48. Det kan undrer at middelværdien ikke er 3 ved et terningkast, da det jo er halvdelen af 6, men husk på man ikke kan slå 0 med terningen.

Variansen bruger vi til at finde standardafvigelsen og den er er lidt svær at fortolke, så for os er den mest en mellemregning. Dog skal man vide, at variansen er stor når der er stor spredning i observationerne.

Standardafvigelsen for terningen var 1,71. Når vi slår mange gange med terningen vil vi få et gennemsnit på ca. 3,5 (middelværdien), men hvor tæt på gennemsnittet vil de enkelte terningslag ligge? Slår vi f.eks. 1, så er afstanden til middelværdien $3,5 - 1 = 2,5$. Lad os lave en tabel:

Resultat af kast	1	2	3	4	5	6
Afstand til middelværdi	2,5	1,5	0,5	0,5	1,5	2,5

Standardafvigelsen af et mål for den typiske afstand til middelværdien. Den er altså et kompromis mellem afstandene i tabellen. Lidt som et gennemsnit. Vi kan se at vores værdi for standardafvigelsen på 1,71 ligger som et pænt kompromis mellem afstandene. Hmm bare tænk på standardafvigelsen som gennemsnittet af afstandene til middelværdien – det er ikke helt korrekt som I kan se, hvis I regner gennemsnittet ud, men det er tilstrækkeligt i forhold til den forståelse I bør have på dette niveau.

Ekstra

Middelværdi, varians og standardafvigelse kan defineres pænere ved hjælp af summationstegn:

Definition 13.4.2

Lad X være en stokastisk variabel med sandsynlighedsfordelingen:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Vi definerer *middelværdien* $E(X)$ ved

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i,$$

variansen $\text{Var}(X)$ ved

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot p_i,$$

og *standardafvigelsen* $SD(X)$ ved

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Jeg anbefaler at man bruger summationstegn hvis man forstår notationen.

Øvelse 13.4.6

- a) Regn middelværdien for den stokastiske variabel fra eksempel 13.4.3 ved hjælp af summationstegn. Altså opskriv regnestykket som det skal se ud, hvis man bruger definition 13.4.2 i stedet for definition 13.4.1.

Kapitel 14

Binomialfordelinger

Binomialfordelinger er en type sandsynlighedsfordelinger, der ofte optræder i praktiske sammenhænge. Er vi f.eks. interesseret i sandsynligheden for at slå 3 6'er i 10 forsøg, skal vi have fat i en binomialfordeling.

14.1 Introduktion til binomialfordelinger

En binomialfordeling er en sandsynlighedsfordeling for en bestemt slags stokastisk variabel. Så vi starter lige med en repetitionsøvelse for at huske, hvad en stokastisk variabel er.

Øvelse 14.1.1

Vi betegner som udgangspunkt vores stokastiske variable med X .

- a) Nævn et eksempel på en stokastisk variabel.
- b) Nævn et til eksempel
- c) Nævn et til eksempel

Vi kigger nu på et stokastisk eksperiment, hvor vi kaster en terning 5 gange. Vi er kun interesserede i at slå 6'ere (måske er det en slags pakkeleg, vi leger) så derfor betragter en 6'er som en succes og alt andet som fiasko. Gennemføre vi eksperimentet kunne resultatet se således ud:

Forsøg nr.	1	2	3	4	5
Succes (s) eller fiasko (f)	f	f	s	s	f

Vi kan se i tabellen at vi startede med to fiaskoer (dvs. ikke 6'ere), hvorefter vi fik to succeser (dvs. 6'ere) og så en fiasko. Vi knytter nu en stokastisk variabel X til eksperimentet. Variablen X defineres som antallet af succeser i de 5 forsøg. Dvs. i tabellen ovenover er $X = 2$ fordi vi har fået to succeser i de 5 forsøg. Variablen X siges at være *binomialfordelt* med *antalsparameter* $n = 5$ (fordi der er 5 forsøg) og *sandsynlighedsparameter* $p = \frac{1}{6}$ fordi der er $\frac{1}{6}$ sandsynlighed for succes i et enkelt forsøg.

Øvelse 14.1.2

Antag at vi gennemføre det stokastiske eksperiment beskrevet oven over og får følgende tabel.

Forsøg nr.	1	2	3	4	5
Succes (s) eller fiasko (f)	f	s	f	f	f

- Hvor mange 6'ere har vi fået?
- Hvilken værdi har den binomialfordelte stokastiske variabel X ?

Øvelse 14.1.3

Vi kaster en mønt 10 gange. Lad X være den binomialfordelte stokastiske variabel, der angiver antallet af "krone" i de 10 forsøg.

- Hvad er "succes" i dette eksperiment. Hvad er "fiasko"?
- Hvad er antalsparameteren n ?
- Hvad er sandsynlighedsparameteren p ?
- Hvilke værdier kan X antage.

Øvelse 14.1.4

- En mand køber 6 skrabejulekalendere. På en enkelt skrabejulekalender er der $\frac{1}{3}$ chance for gevinst. Situationen kan beskrives ved hjælp af en binomialfordeling. Hvordan?

Nu hvor vi har forstået hvad en binomialfordelt stokastisk variabel er, kan vi opskrive en mere formel definition.

Definition 14.1.1

En binomialfordelt stokastisk variabel X er en stokastisk variabel, som angiver antallet af succeser i n uafhængige forsøg, hvor hvert forsøg har en successandsynlighed på p .

Tallet n kaldes antalsparameteren og p kaldes sandsynlighedsparameteren.

Vi vil fremover benytte skrivemåden $X \sim b(n, p)$, hvilket betyder at X er en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p

Øvelse 14.1.5

- a) Hvad er en binomial fordelt stokastisk variabel?
- b) Hvad betyder $X \sim b(7, \frac{1}{3})$?

Eksempel 14.1.1

En virksomhed som producerer en vare som de pakker i æsker med 12 i hver. Da det er mennesker der fremstiller varerne er der fejl på nogle af dem. Ligesom at der er fejl på mathhx. Sandsynligheden for at der en defekt på en vare er 0,2%.

Vi er interesserede i, hvor mange varer, der er defekte på i en pakke. Da der er 0,2% sandsynlighed for at få en defekt vare og der er 12 vare i alt har vi en binomialfordeling med $p = 0,002$ (da $0,2\% = 0,002$) og $n = 12$. Altså hvis vi kalder antallet af defekte varer for X har vi $X \sim b(12; 0,002)$

Sandsynligheder for en binomialfordeling

Man beregner sandsynlighederne i en binomialfordeling ved at bruge en sætning:

Sætning 14.1.1

For en binomialfordeling $X \sim b(n, p)$ gælder:

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

Eksempel 14.1.2

Vi bestemmer nu $P(X = 3)$ for en binomialfordelt stokastisk variabel $X \sim b(5; 0,4)$. Vi sætter ind i formlen fra ovenstående sætning.

$$P(X = 3) = K(5, 3) \cdot 0,4^3 \cdot (1 - 0,4)^{5-3}$$

Vi bestemmer $K(5, 3)$ i Excel ved at skrive "=KOMBIN(5;3)" og det giver 10.
Vi regner videre

$$P(X = 3) = 10 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 = 0,23$$

Altså er $P(X = 3) = 0,23$

Øvelse 14.1.6

Lad $X \sim b(10; 0,4)$.

- a) Bestem $P(X = 6)$.

Øvelse 14.1.7

Beregn:

- a) $P(X = 2)$ når $X \sim b(5; 0,5)$
- b) Sandsynligheden for at få en æske med netop en defekt vare (se eksempel 14.1.1)
- c) Sandsynligheden for at få en æske med ingen defekte vare (se eksempel 14.1.1)
- d) Sandsynligheden for at der er gevinst på to af skrabejulekalenderne fra øvelse 14.1.4

Eksempel 14.1.3

Vi vil nu beregne sandsynligheden for at der er højst 1 defekt varer i hver æske (se øvelse 14.1.4). Altså $P(X \leq 1)$.

Hvis $X \leq 1$ må det betyde at $X = 0$ eller $X = 1$ og da det er disjunkte hændelser kan vi finde sandsynligheden ved at sige

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1).$$

Vi fandt $P(X = 0)$ og $P(X = 1)$ i øvelse 14.1.7 så vi får:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \quad (14.1)$$

$$= 0,976262 + 0,023447 \quad (14.2)$$

$$= 0,9997 \quad (14.3)$$

$$= 99,97\% \quad (14.4)$$

Vi kan altså være meget sikre på at der højst er en defekt pr. æske.

Øvelse 14.1.8

Vi kaster en terning.

- a) Bestem sandsynligheden for at få højst to 6'ere i 10 forsøg.

Eksempel 14.1.4

Vi kunne også være interesserede i at finde sandsynligheden for at der er mindst en defekt varer (se eksempel 14.1.1). Det kunne vi gøre ved at sige

$$P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 12),$$

men det ville jo være besværligt at skulle regne så mange sandsynligheder. Det er derfor nemmere at kigge på den komplementære hændelse, som må være at der er ikke nogle defekte varer. Den sandsynlighed regnede vi ud i øvelse 14.1.7, hvor vi fik den til at være: 0,976262. Vi kan derfor regne:

$$P(\text{mindst en defekt vare}) = 1 - P(\text{ingen defekte vare}) \quad (14.5)$$

$$= 1 - 0,976262 \quad (14.6)$$

$$= 0,023738 \quad (14.7)$$

$$= 2,4\% \quad (14.8)$$

Øvelse 14.1.9

- a) Vi kaster en terning. Bestem sandsynligheden for at få mindst en 6'er i 10 forsøg.
- b) Vi kaster en mønt. Bestem sandsynligheden for at få højst 4 gange plat i 5 forsøg.
- c) Bestem sandsynligheden for at få mindst 2 julekalendere med gevinst (se øvelse 14.1.4)

Middelværdi, varians og standardafvigelse

Vi husker at middelværdien for en stokastisk variable svarer til gennemsnittet af den stokastiske variabels værdier, hvis man gennemførte forsøget mange gange. Vi husker også at standardafvigelsen er et mål for, hvor langt fra middelværdien de enkelte værdier vil ligge – vi tænker på det som et gennemsnit af afstandene til middelværdien, selv om det ikke er helt korrekt.

Øvelse 14.1.10

Lad $X \sim b(10; 0,5)$

- Kom med et gæt på middelværdien for X . Altså ingen beregninger her. Gæt ud fra din forståelse af middelværdi.
- Kom med et gæt på standardafvigelsen (svær).

Sætning 14.1.2

Lad $X \sim b(n, p)$. Da er:

Middelværdien givet ved:

$$E(X) = n \cdot p$$

Variansen givet ved

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Standardafvigelsen givet ved

$$SD(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Eksempel 14.1.5

Vi vil nu udregne middelværdi og standardafvigelse for binomialfordeligen $X \sim b(10; 0,5)$ fra øvelse 14.1.10. Vi har

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0,5 = 5$$

og

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \quad (14.9)$$

$$= \sqrt{10 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5)} \quad (14.10)$$

$$= \sqrt{2,5} = 1,58 \quad (14.11)$$

Vi konkluderer at middelværdien er 5 og standardafvigelsen er 1,58

Øvelse 14.1.11

Lad $X \sim b(8; 0,4)$.

- Bestem n og p .
- Beregn $P(X = 1)$.
- Bestem middelværdi, varians og standardafvigelse for X .

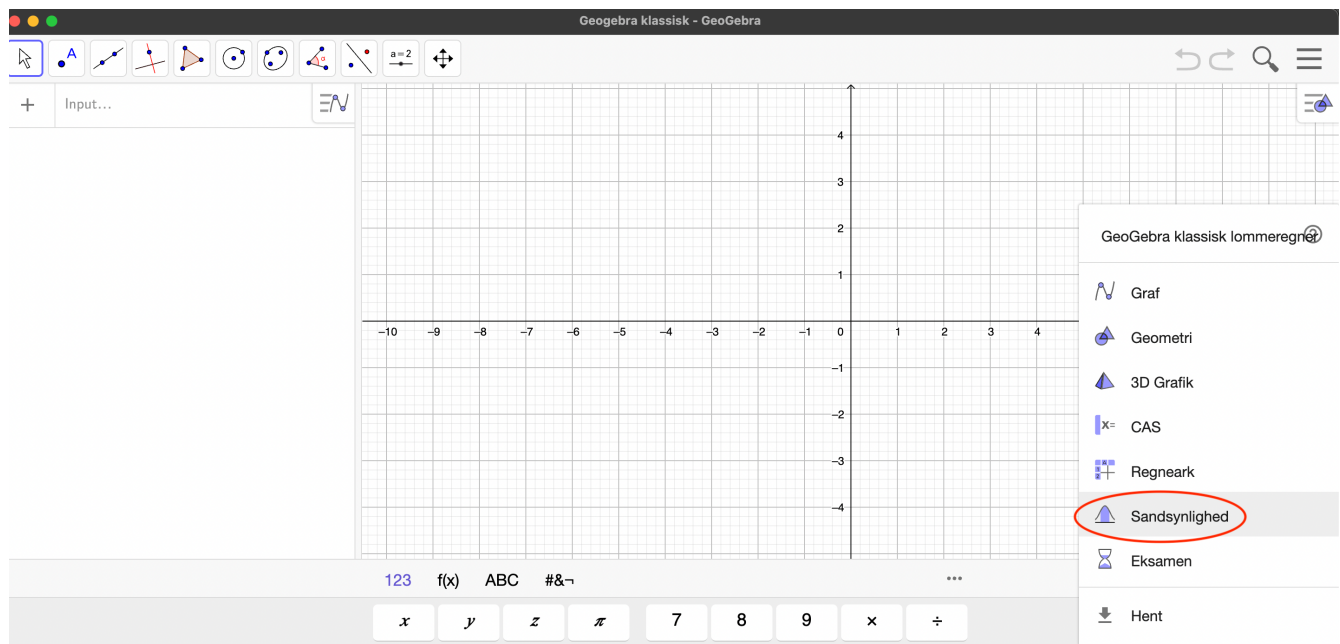
Øvelse 14.1.12

Forestil dig, at du skal slå en terning 12 gange.

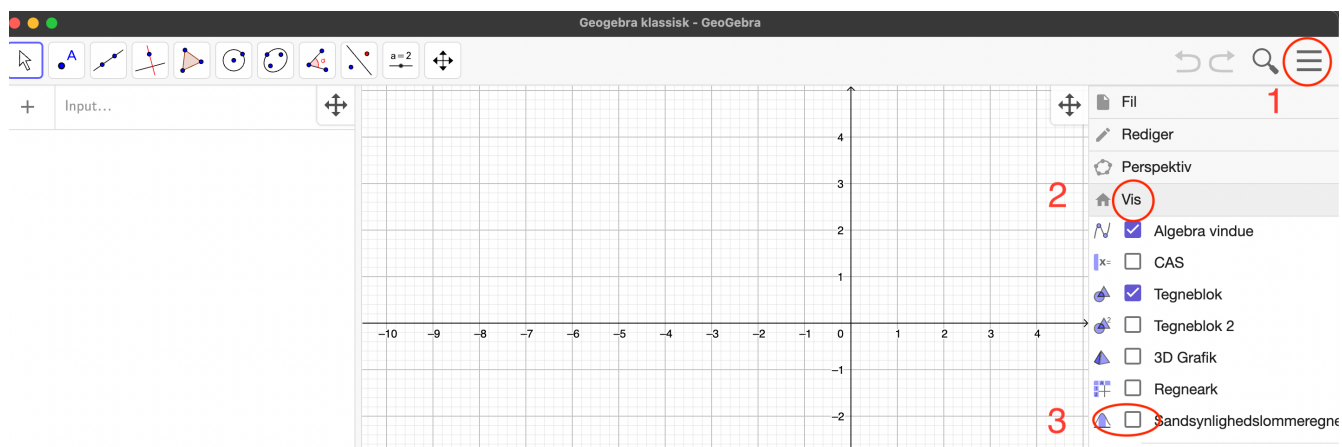
- Hvor mange 6'ere vil du gætte på du får?

14.2 Binomialfordelinger i GeoGebra

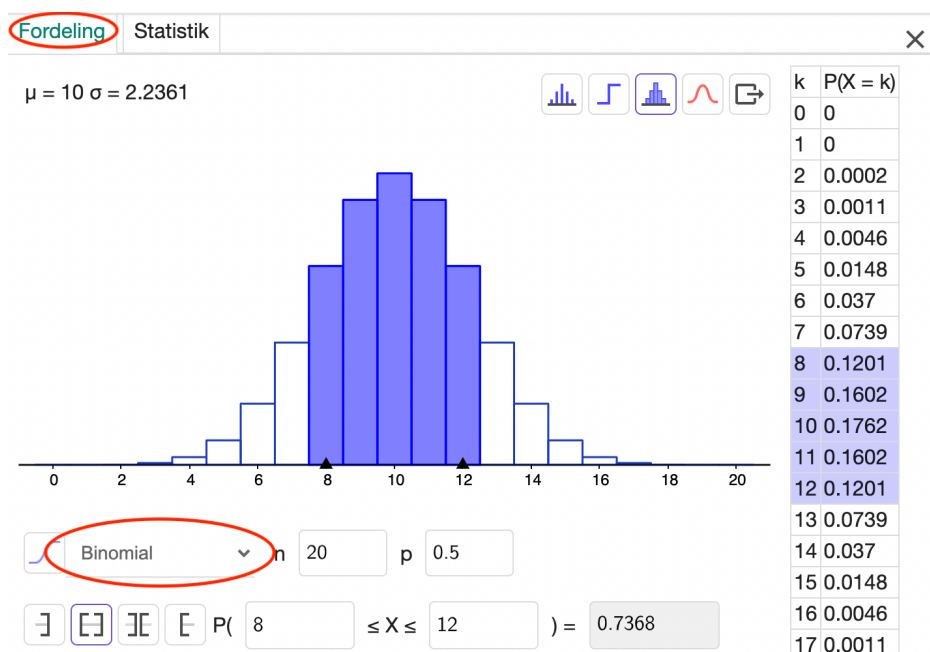
Vi åbner GeoGebra og åbner sandsynlighedslommeregneren:



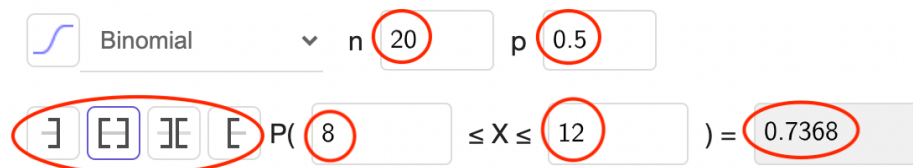
Sandsynlighedslommeregneren kan også åbnes her:



Vi indstiller lommeregnerne på binomialfordeling:



Jeg har markeret de felter/knapper man kan manipulere. Det grå felt til højre (hvor der står 0.7368) kan kun ændres i nogle bestemte situationer (afhænger af knapper til venstre).



Øvelse 14.2.1

a) Ved at prøve dig frem, skal du finde ud af, hvordan lommeregneren virker.

Øvelse 14.2.2

Lad $X \sim b(12; 0,3)$. Ved hjælp af sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra skal du bestemme følgende:

- a) $P(X = 6)$
- b) $P(X \leq 4)$
- c) $P(X \geq 6)$
- d) $P(3 \leq X \leq 9)$ Hvad betyder dette i øvrigt?
- e) Middelværdien
- f) Standardafvigelsen

Øvelse 14.2.3

Peter planter frø (nej ikke hamp din platugle) i en altankasse. Han planter 14 frø og ved, at der er 80% chance for at hver af dem spirer.

- a) Hvad er chancen for at de alle spirer?
- b) Hvad er risikoen for at højst 5 frø spirer?
- c) Hvad er sandsynligheden for at mindst halvdelen spirer?
- d) Hvor mange kan han forvente der spirer?

Sandsynligheder der skal omskrives før de beregnes i GeoGebra

Det er ikke altid man kan sætte sine tal direkte ind i GeoGebra (eller formelen). Forstil dig, f.eks., at du skal bestemme sandsynligheden for at slå mere end 3 6'ere i 10 forsøg. Dvs. $X \sim b(10, \frac{1}{6})$ og vi skal bestemme $P(X > 3)$. I GeoGebra kan man kun vælge " $\geq$ " og ikke " $>$ ". Det er dog ikke noget stort problem da det er nemt at se, $P(X > 3)$ selvfølgelig er det samme som $P(X \geq 4)$ - altså at slå mere end tre 6'ere er det samme som at slå mindst fire 6'ere.

Øvelse 14.2.4

Lad $X \sim b(30; 0,1)$. Bestem

- a) $P(X \leq 3)$
- b) $P(X < 4)$
- c) $P(X > 2)$
- d) $P(1 < X \leq 5)$
- e) Middelværdi, standardafvigelse og varians.

Øvelse 14.2.5

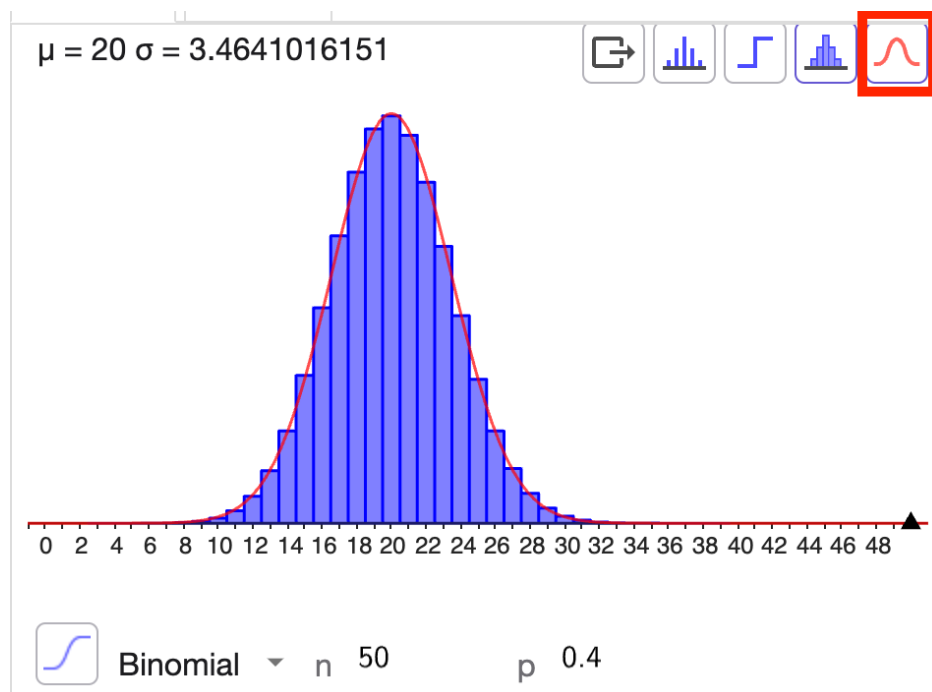
En lærer på Niels Brock laver en multiple choice test inden karaktergivningen uuuuhuhhhh. Der er 5 svarmuligheder til hvert spørgsmål og kun en af dem er rigtig. Der er 20 spørgsmål og for at bestå skal man have **mere end** halvdelen rigtig.

- a) Gør rede for at situationen kan beskrives med en binomialfordeling, bestem X , n og p og opskriv fordelingen på formen $X \sim b(n, p)$.
- b) Hvad er sandsynligheden for at bestå hvis man er blank på alle spørgsmålene (så man gætter)?
- c) Hvor mange kan man forvente at få rigtig, hvis man er blank?

Normalfordelingsapproksimationen til binomialfordelingen (for elever som er startet på HHX i 2023 eller tidligere)

OBS: Hvis du skal have Matematik A, så spring dette afsnit over og vend tilbage til det, efter du har regnet kapitlet om normalfordeling

Den som skal have Matematik A, skal lære om en sandsynlighedsfordeling, der hedder "normalfordelingen". Det skal man ikke på Matematik B, men I nogle tilfælde kan man bruge normalfordelingen til at bestemme sandsynligheder i binomialfordelingen, og det skal vi se på. De to fordelinger ligner nemlig hinanden, når n er stor og p ikke er meget stor eller meget lille. Lad os tage et eksempel med $n = 50$ og $p = 0,4$. Jeg åbner sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra, vælger binomialfordeling og taster $n = 50$ og $p = 0,4$:



Den røde kurve er normalfordelingen, og den har jeg trykket frem ved at trykke på den røde "klokke" (øverst til højre i screenshottet). Vi kan se at den røde kurve (normalfordelingen) ligger tæt op ad de blå bokse (binomialfordelingen).

Vi kan bruge normalfordelingen til at finde sandsynligheder i binomialfordelingen ved at følge opskriften:

1. Bestem middelværdi og standardafvigelse for binomialfordelingen.
2. Omskriv sandsynligheden efter følgende regler:

Binomialfordeling	Normalfordeling
$P(X = r)$	$P(r - 0,5 \leq X \leq r + 0,5)$
$P(X \leq r)$	$P(X \leq r + 0,5)$
$P(X \geq r)$	$P(X \geq r - 0,5)$

3. Åben GeoGebra, og vælg normalfordeling (den er vist valgt på forhånd). Indtast middelværdien og standardafvigelsen, du fandt i punkt 1, og bestem sandsynligheden du fandt i punkt 2.

Vi tager et eksempel.

Eksempel 14.2.1

Vi vil bestemme sandsynligheden $P(X \leq 23)$ for $X \sim b(50; 0,4)$ ved hjælp af

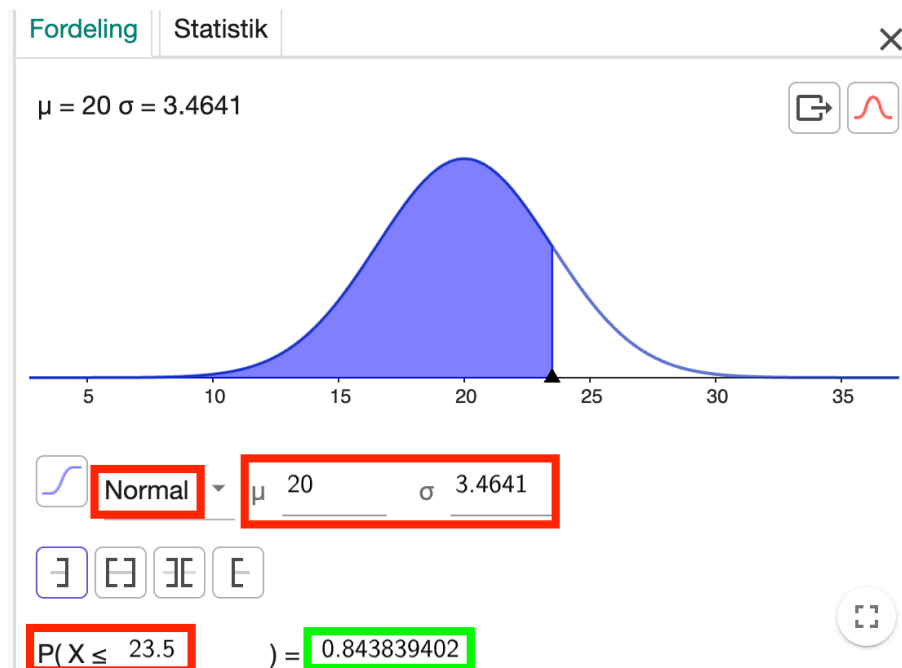
normalfordelingsapproximationen.

Vi bestemmer først middelværdi og standardafvigelse. Vi kunne bruge formler her, men jeg er doven og gør det vha. GeoGebra. Den konkrete binomialfordeling er den samme som jeg brugte i screenshottet lige oven over, og der kan jeg se, at $\mu = 20$ og $\sigma = 3,4641$.

Jeg skal bestemme $P(X \leq 23)$, så ifølge tabellen i punkt 2 i opskriften skal jeg bestemme følgende sandsynlighed i normalfordelingen:

$$P(X \leq 23 + 0,5) = P(X \leq 23,5)$$

i GeoGebra. Jeg åbner sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra, indtaster μ og σ og sætter sandsynligheden til $P(X \leq 23,5)$:



Jeg ser at resultatet (for normalfordelingen) er $P(X < 23,5) = 0,84$ og konkludere at $P(X \leq 23) = 0,84$ for binomialfordelingen.

Øvelse 14.2.6

Vi bliver ved den binomialfordelte stokastisk variabel $X \sim b(50; 0,4)$.

- Bestem vha. normalfordelingsapproximationen $P(X = 23)$
- Bestem den sande værdi af $P(X = 23)$ og sammenlign med normalfordelingsapproximationen.

Normalfordelingsapproximationen bliver nyttig, når vi har binomialfordelinger

med stor antalsparameter. Prøv du f.eks. at indtaste $X \sim b(100000; 0,6)$ i GeoGebra. Fryser din computer? Det gør min i hvert fald...

Øvelse 14.2.7

Lad $X \sim b(100000; 0,6)$.

a) Bestem $P(X \geq 60100)$.

14.3 Beviser til binomialfordeling

Sætning 14.1.1

For en binomialfordeling $X \sim b(n, p)$ gælder:

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

Bevis

Vi vil vise sætningen gennem et eksempel. Det er normalt ikke noget man accepterer i et bevis, da man jo så i princippet ikke kan være sikker på, at sætningen gælder i alle tilfælde. Derfor skal vi hele tiden have i tankerne, at det vi gør også skal virke i andre tilfælde (for alle værdier af n og r).

Vi kigger på tilfældet hvor $n = 5$ og $r = 2$. Vi skal altså have 2 succeser i 5 forsøg. Det kan vi få på flere måder. Hvis vi kalder success for s og fiasko for f kunne det f.eks. se sådan ud.

Forsøg nr.	1	2	3	4	5
Succes/fiasko	s	s	f	f	f

Det kunne også se sådan ud:

Forsøg nr.	1	2	3	4	5
Succes/fiasko	f	s	s	f	f

Eller hvad med sådan?

Forsøg nr.	1	2	3	4	5
Succes/fiasko	s	f	f	s	f

Der er flere muligheder...

Vi vil nu se på sandsynlighederne for de 3 nævnte kombinationer af succes og fiasko. Vi ved at sandsynligheden for succes er p og derfor må sandsynligheden for fiasko være $1 - p$ (fiasko er komplementær til succes). Vi ved også at forsøgene er uafhængige (vi har forudsat at sandsynligheden er fast hver gang), hvilket betyder at vi kan gange sandsynlighederne sammen for at få den samlede sandsynlighed. Derfor må sandsynligheden for det første eksempel være givet ved

$$p \cdot p \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) = p^2 \cdot (1 - p)^3.$$

Det næste eksempel må have sandsynligheden

$$(1 - p) \cdot p \cdot p \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) = p^2 \cdot (1 - p)^3.$$

Det sidste eksempel må have sandsynligheden

$$p \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot p \cdot (1 - p) = p^2 \cdot (1 - p)^3.$$

Ved at tænke os lidt om kan vi godt se, at alle de forskellige mulige kombinationer af 2 succeser og 3 fiaskoer må have samme sandsynlighed nemlig $p^2 \cdot (1 - p)^3$.

Vi mangler nu bare at finde ud af hvor mange måder vi kan få de 2 succeser i de 5 forsøg. Som det ses af tabellerne, er det det samme som at spørge, hvor mange måder man kan placere 2 krydser på 5 pladser og det lærte vi i kombinatorik. Det var jo tallet $K(5, 2)$. Altså kan vi få 2 succeser i 5 forsøg på $K(5, 2)$ forskellige måder og hver af disse kombinationer har sandsynligheden $p^2 \cdot (1 - p)^3$.

Vi kan nu finde den samlede sandsynlighed $P(X = 2)$ ved at gange antallet af kombinationer $K(5, 2)$ med sandsynligheden $p^2 \cdot (1 - p)^3$ for hver af kombinationerne (da sandsynligheden for en hændelse er lig med summen af sandsynlighederne for de enkelte udfald). Vi får så

$$P(X = 2) = K(5, 2) \cdot p^2 \cdot (1 - p)^3.$$

Vi husker nu hvor tallene 2, 3 og 5 kom fra. Tallet 2 kom fra at vi ville have to succeser, så $r = 2$. Tallet 5 kom fra at vi havde 5 forsøg, dvs. $n = 5$. Tallet 3 kom fra at vi havde 3 fiaskoer og det fandt vi ud af ved at sige $5 - 2 = n - r$. Derfor må vi have:

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}.$$

Kapitel 15

Normalfordelinger (A)

Normalfordelinger er vigtig type af sandsynlighedsfordelinger. Af årsager vi ikke skal komme ind på, dukker de op i alle mulige sammenhænge. Her er nogle eksempler:

- I biologiske sammenhænge (højde, vægt osv.)
- Variation af størrelse på ting, som er produceret af maskiner.
- Fejl i målinger.
- I finansielle modeller som f.eks. Black-Scholes modellen.
- I forbindelse med bedømmelsesskalaer.

15.1 Kontinuerte fordelinger

Vi har set flere eksempler på stokastiske variable. F.eks. har vi set stokastiske variable der angav antal øjne ved et terningkast eller et antal succeser ved gentagelse af et forsøg (binomialfordeling). Fælles for alle de stokastiske variable vi har betragtet indtil videre er, at de har et endeligt antal værdier og til hver værdi hører en sandsynlighed. Ved et terningkast er der f.eks. 6 forskellige muligheder for antallet af øjne og hver værdi har sandsynligheden $\frac{1}{6}$. Den type af stokastiske variable kaldes *diskrete* stokastiske variable. Men hvad hvis man nu f.eks. vil opskrive sandsynlighedsfordelingen for vægt, når du vælger en tilfældig voksen dansker? Her er der ikke et bestemt antal muligheder som ved terningen. Man kan veje... 70, 71, 72, 73, ... kg, men man kan jo også veje 70,5 kg eller måske endda 70,54981365756168 kg, hvis man måler med en vægt der er nøjagtig nok. Mulighederne udgør derfor et interval. En sådan sandsynlighedsfordeling kaldes

en *kontinuert fordeling*.

Øvelse 15.1.1

Afgør, hvilke af følgende sandsynlighedsfordelinger der er diskrete og hvilke som er kontinuerte. I de tilfælde der er tale om en kontinuert fordeling, skal du angive, hvad den stokastiske variabel betegner.

- a) Vi måler højden på en tilfældig udvalgt mand.
- b) Vi spørger en tilfældig kvinde på gaden, hvad hun har af indkomst.
- c) Vi måler temperaturen i et klasselokale på Niels Brock.
- d) Vi spørger en gymnasielev, hvor mange gange han/hun/den har været på Mc Donalds i løbet af sidste måned.

Tæthedsfunktioner

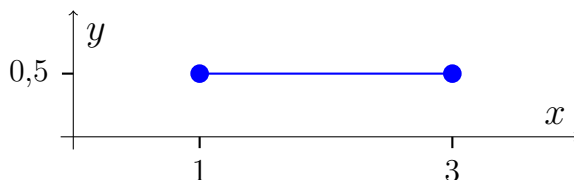
Når man vil opskrive sandsynlighedsfordelingen for en kontinuert fordeling kan man ikke gøre ligesom de diskrete fordelinger, hvor vi lavede en tabel. I stedet kan vi beskrive sandsynlighederne med en *tæthedsfunktion*.

Definition 15.1.1

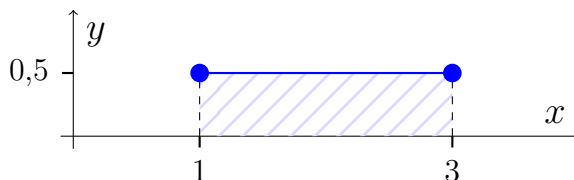
En tæthedsfunktion er en funktion som opfylder at arealet mellem x -aksen og funktionen er 1.

Eksempel 15.1.1

Betragt den stykkevist definerede lineære funktion med grafen:



Funktionen er en tæthedsfunktion. Det tjekker vi ved at regne arealet A mellem grafen og x -akse:



Det er nemt at beregne A da vi har et rektangel.

$$A = \text{højde} \cdot \text{grundlinje} = 0,5 \cdot 2 = 1$$

Da $A = 1$ er det en tæthedsfunktion.

Øvelse 15.1.2

Betrakt funktionen f med forskriften

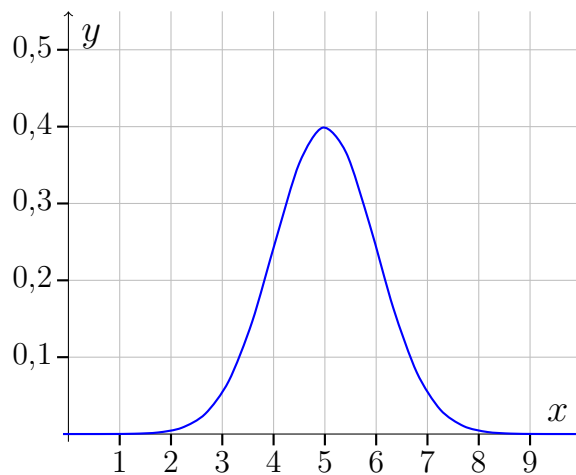
$$f(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

a) Gør rede for at f er en tæthedsfunktion.

De tæthedsfunktioner vi kommer til at arbejde med er noget mere komplicerede end de to eksempler vi har set indtil videre.

Eksempel 15.1.2

Følgende graf er graf for en tæthedsfunktion

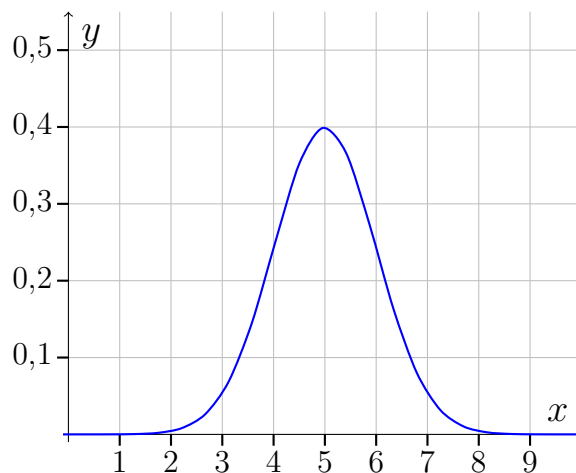


Det er umiddelbart ikke så nemt at tjekke at arealet under grafen er 1, men det er det. Trust me bro.

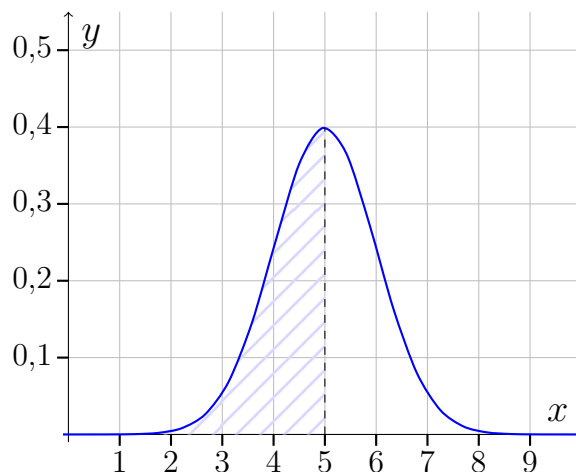
Vi bruger tæthedsfunktioner til at definere kontinuerte stokastiske variable. Sandsynlighederne for disse variable er bestemt ud fra tæthedsfunktionen ved relevante arealer. Det er nemmest at vise med et eksempel.

Eksempel 15.1.3

Betrakt tæthedsfunktionen fra eksemplet før.



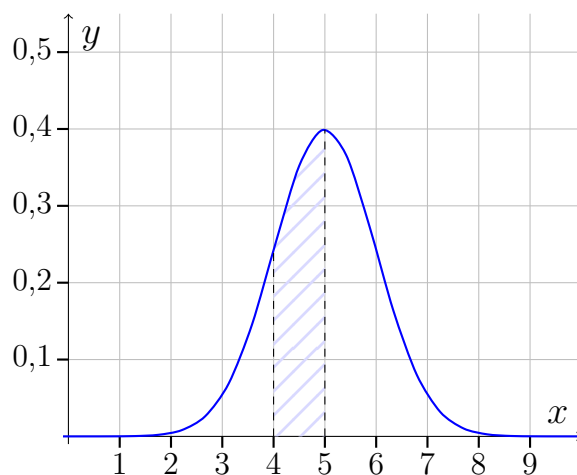
Vi vil nu bestemme $P(X \leq 5)$ for den stokastiske variabel X som er givet ved denne tæthedsfunktion. Sandsynligheden er bestemt ved arealet under grafen svarende til $x \leq 5$:



Vi kan ikke lige regne arealet, men vi kan se at det er ca. halvdelen af det samlede areal under grafen som jo er 1 (da det er en tæthedsfunktion). Derfor må det skraverede areal være ca. 0,5 og vi konkluderer derfor at:

$$P(X \leq 5) \approx 0,5.$$

Vi vil nu bestemme $P(4 \leq X \leq 5)$, så vi skraverer arealet svarende det til $4 \leq x \leq 5$:



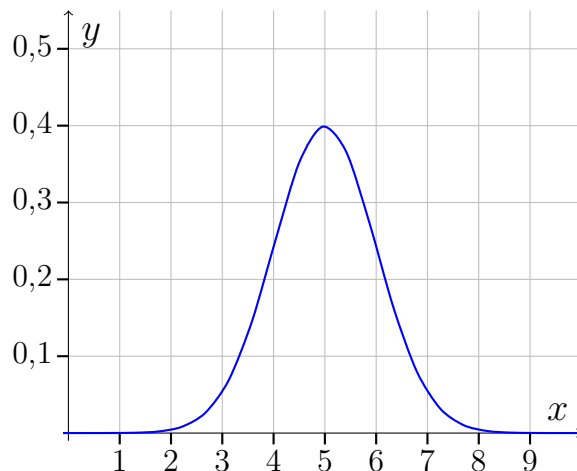
Vi vurderer at det skraverede areal er ca. $\frac{1}{3}$ af arealet under grafen så vi konkludere at

$$P(4 \leq X \leq 5) \approx 0,3$$

Tæthedsfunktionen vi lige har set, er tæthedsfunktion for en såkaldt *normalfordelt* stokastisk variabel. Det skal vi se nærmere på i næste afsnit.

Øvelse 15.1.3

Vi kigger igen på tæthedsfunktionen fra eksempel 15.1.2:

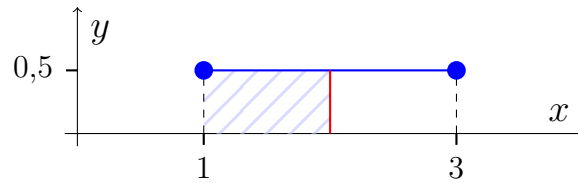


Vurder følgende sandsynligheder

- a) $P(X \geq 5)$
- b) $P(5 \leq X \leq 6)$
- c) $P(X \geq 6)$

Når man har en kontinuert fordeling er der ikke nogen forskel på ”skarpe uligheds-

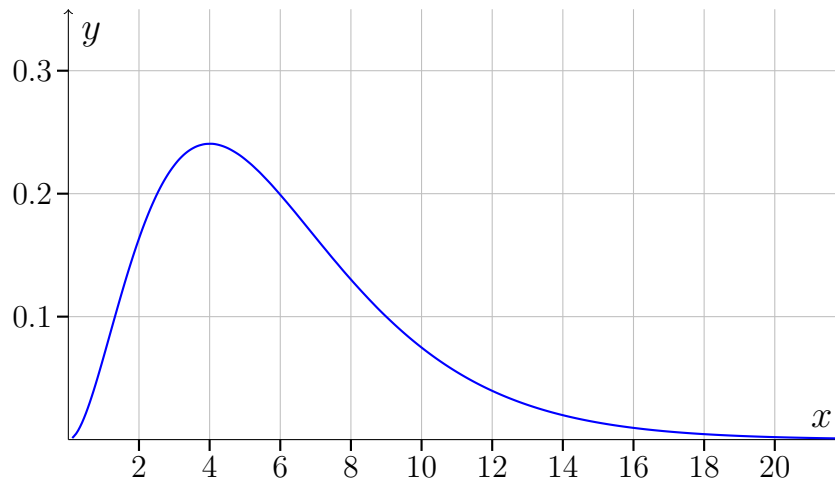
tegn" ($<$) og "bløde ulighedstegn" ($\leq$). Forestil dig, f.eks., at vi har en stokastisk variabel som antager et tilfældigt tal i intervallet $[1; 3]$ som vist med tæthedsfunktionen i 15.1.2. Gør det mon nogen forskel om vi regner $P(X < 2)$ eller $P(X \leq 2)$? Lad os se på det:



Forskellen på $P(X < 2)$ eller $P(X \leq 2)$ er om vi tæller den røde streg med i arealet. Men eftersom en streg har et areal på 0 så gør det ikke nogen forskel. Vi har altså at både $P(X < 2)$ og $P(X \leq 2)$ giver samme sandsynlighed, nemlig 0,5 og det gælder helt generelt for kontinuerte fordelinger at skarpe og bløde ulighedstegn giver samme sandsynlighed.

Øvelse 15.1.4

Betragt følgende graf for en tæthedsfunktion.



Vurder følgende sandsynligheder

- a) $P(2 \leq X \leq 6)$
- b) $P(2 < X < 9)$
- c) $P(X \geq 8)$
- d) $P(X \leq 5,5)$

Tæthedsfunktionen fra ovenstående øvelse er et eksempel på en tæthedsfunktion for en såkaldt χ^2 -fordelt stokastisk variable. Det mærkelige krøllede X er det græ-

ske bogstav *chi* som udtales ”ki”. Vi vil støde på χ^2 -fordelingerne igen, når vi skal lave χ^2 -test, som er et selvstændigt kapitel her på mathhx.

15.2 Introduktion til normalfordeling

Normalfordelingen er meget grundlæggende sandsynlighedsfordeling, men også en teknisk svær sandsynlighedsfordeling. Man kan definere den ved at opskrive forskriften for dens tæthedsfunktion.

Definition 15.2.1

En normalfordelt stokastisk variabel X er en kontinuert stokastisk variabel med en tæthedsfunktion på formen.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

hvor μ og σ er to reelle tal.

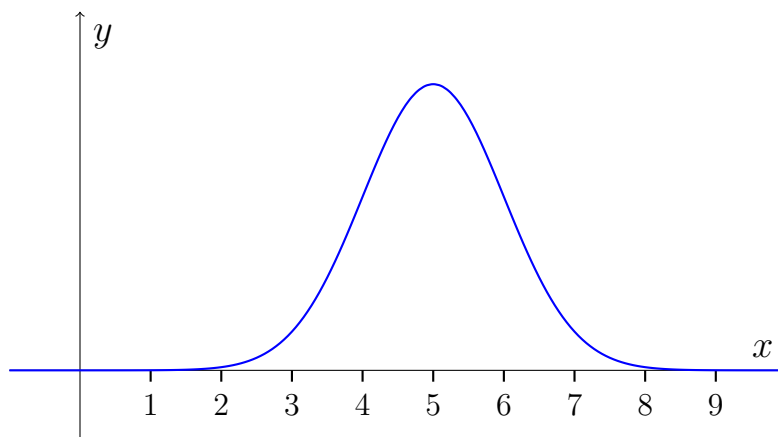
Ud fra definitionen kan vi se, at en givet normalfordelt stokastisk variabel er bestemt ved σ og μ , da det er de to eneste parametre i funktionen ud over x . Man kan vise at disse to parametre er hhv. middelværdi og standardafvigelse for X . MEN forskriften i definitionen er for kompliceret til at vi (gymnasieelever) kan regne på den (måske regner vi lidt på den på A-niveau), så vi skruer ned for ambitionerne og starter forfra. For os er det nok at vide:

- En normalfordelt stokastisk variabel er en kontinuert stokastisk variabel med klokkeformet tæthedsfunktion.
- Normalfordelingen er fastlagt ved middelværdien μ og standardafvigelsen σ .
- Middelværdien er x -værdien til det punkt hvor tæthedsfunktionen har sit maksimum, og tæthedsfunktionen er symmetrisk omkring middelværdien.

Vi benytter skrivemåden $X \sim N(\mu, \sigma)$ til at skrive at X er en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi μ og standardafvigelse σ . I stedet for ”normalfordelt stokastisk variabel ” vil vi nogle gange bare skrive ”normalfordeling”.

Eksempel 15.2.1

Betragt grafen for en tæthedsfunktion

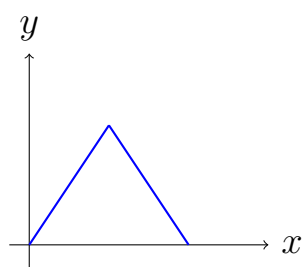


Grafen kan godt være tæthedsfunktion for en normalfordeling. Det kan vi se fordi den er symmetrisk (omkring $x = 5$) og har form som en klokke.

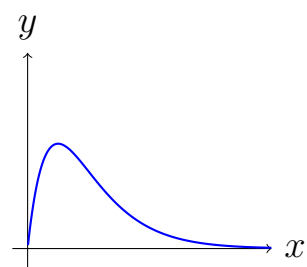
Det er rent faktisk grafen for tæthedsfunktion for normalfordelingen $X \sim N(5, 1)$. Altså normalfordelingen med middelværdi 5 og standardafvigelse 1.

Øvelse 15.2.1

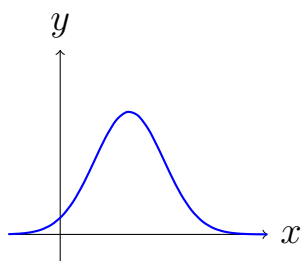
Her ses graferne for 4 tæthedsfunktioner:



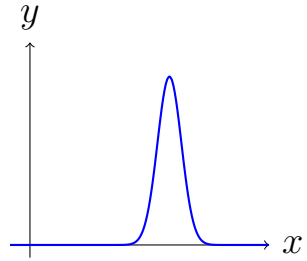
Graf 1



Graf 2



Graf: 3

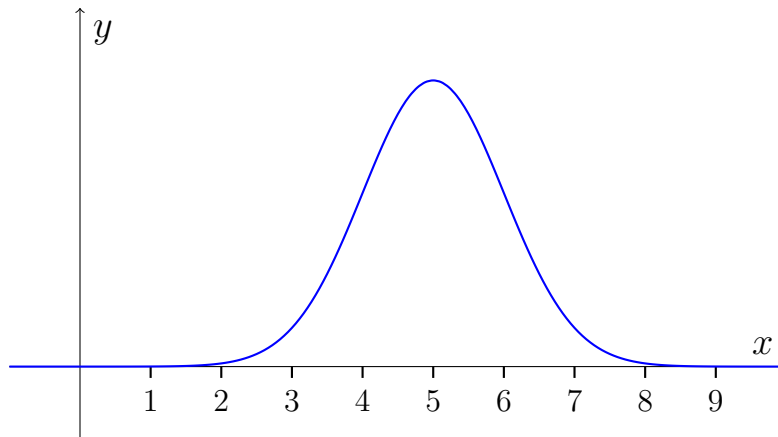


Graf: 4

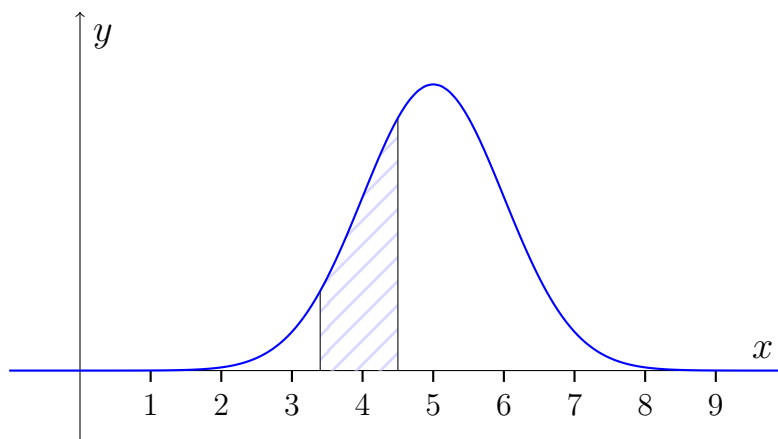
- a) Hvilke af disse grafer kan **ikke** være graf for en tæthedsfunktion for en normalfordeling?

Eksempel 15.2.2

Da en normalfordeling er en kontinuert sandsynlighedsfordeling, finder vi sandsynlighederne som arealer under tæthedsfunktionen. Betragt normalfordeling med tæthedsfunktionen:



Vi bestemmer $P(3,4 \leq X \leq 4,5)$ ved at finde arealet svarende til $3,4 \leq x \leq 4,5$:

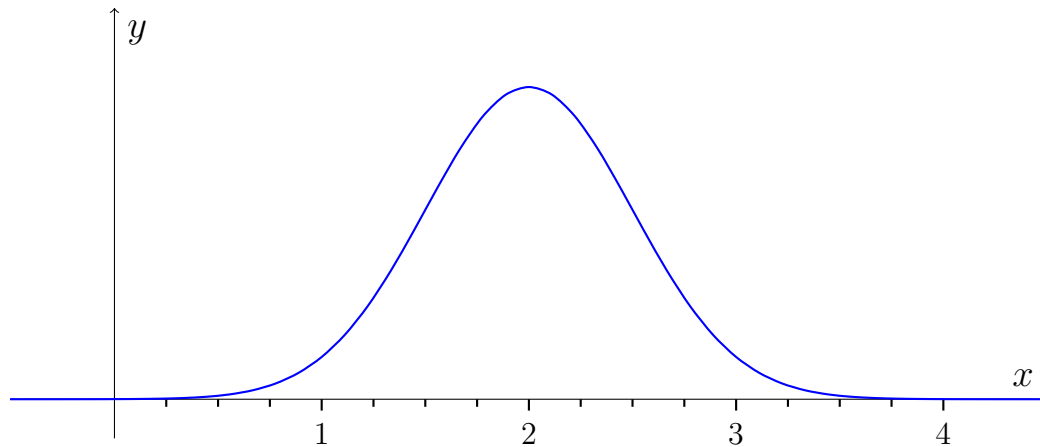


Vi ser at arealet er på ca. $\frac{1}{4}$, så vi konkluderer at

$$P(3,4 \leq X \leq 4,5) \approx 25\%$$

Øvelse 15.2.2

Betragt følgende tæthedsfunktion for en normalfordeling:



Vurder følgende sandsynligheder

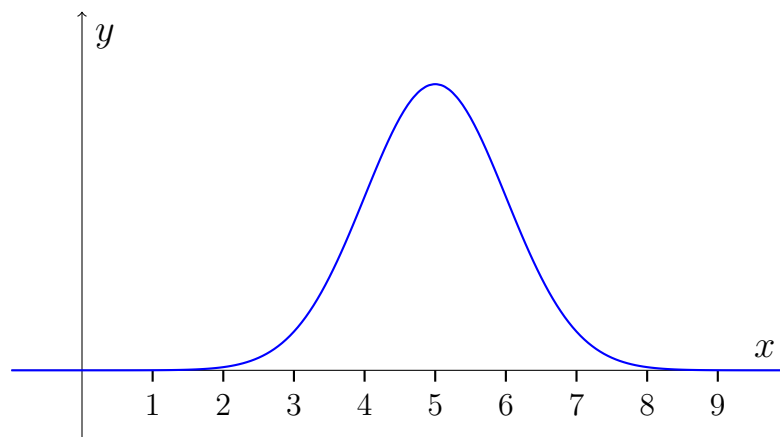
- a) $P(X \leq 2)$
- b) $P(X \geq 2)$
- c) $P(1,5 \leq X \leq 3)$
- d) $P(1 \leq X \leq 1,7)$

Betydning af middelværdi og standardafvigelse

Vi kan vurdere middelværdien og standardafvigelsen ud fra tæthedsfunktionen.

Eksempel 15.2.3

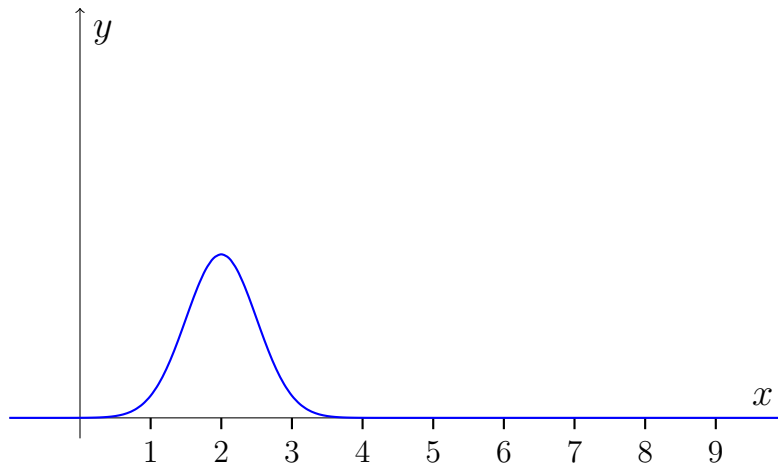
Her ses grafen for tæthedsfunktionen for en normalfordeling



Vi kan se at grafen er symmetrisk omkring $x = 5$, så vi konkludere at $\mu = 5$

Øvelse 15.2.3

Her ses grafen for tæthedsfunktionen for en normalfordeling:



a) Vurder middelværdien

Det er sværere at vurdere standardafvigelsen. Men der findes en regel som kan hjælpe os her:

Sætning 15.2.1

(68-95-99,7-reglen)

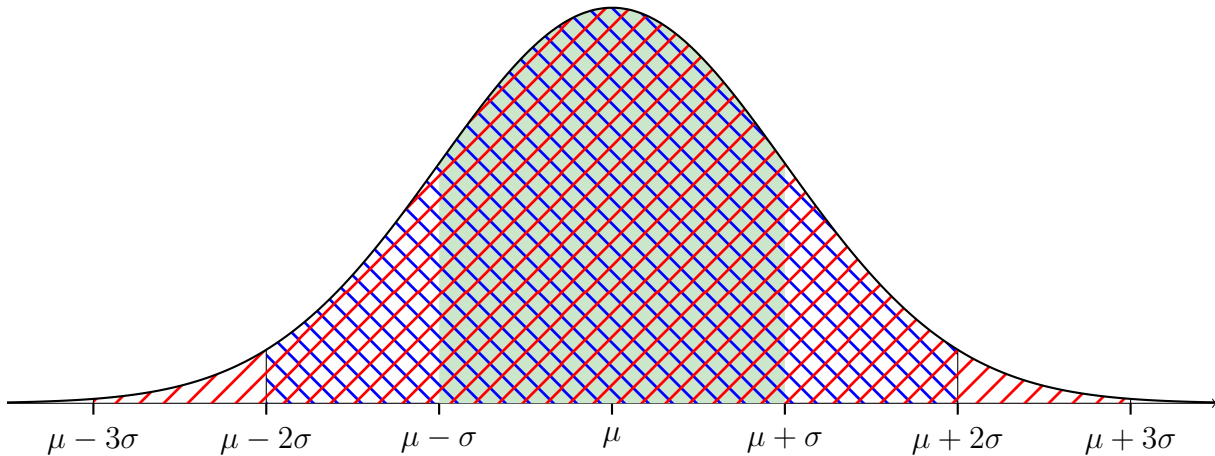
For en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ gælder følgende:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$$

Vi kan illustrere sætningen med tegningen:



Vi har altså:

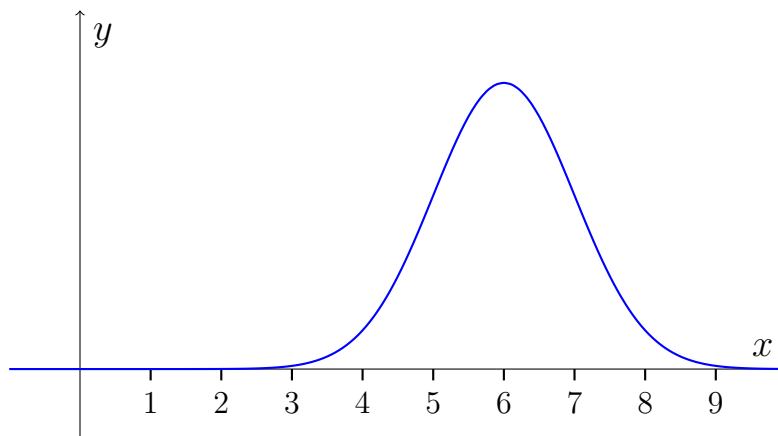
Sandsynligheden for at finde X indenfor en **afstand** af 1σ fra μ er 68%.

Sandsynligheden for at finde X indenfor en **afstand** af 2σ fra μ er 95%.

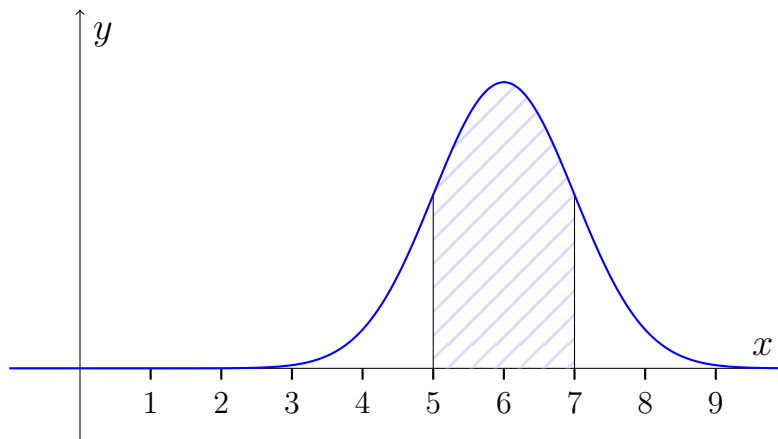
Sandsynligheden for at finde X indenfor en **afstand** af 3σ fra μ er 99,7%.

Eksempel 15.2.4

Betragt grafen for tæthedsfunktionen for en normalfordeling.



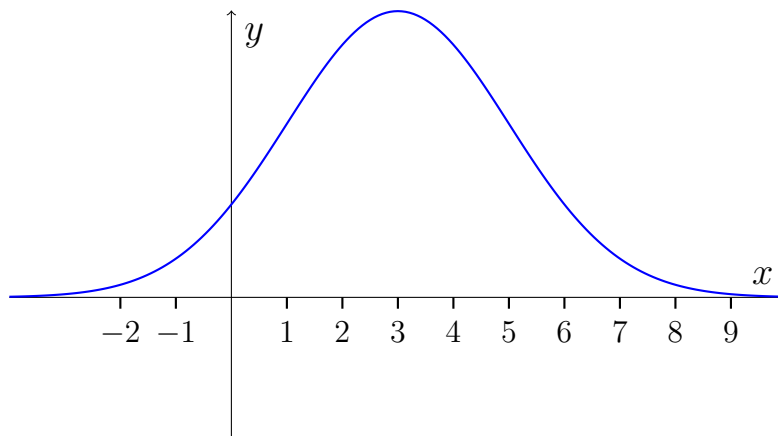
Vi kan se at grafen er symmetrisk omkring $x = 6$, så $\mu = 6$. Vi finder standardafvigelsen ved at se hvor langt vi skal gå fra middelværdien for at få et areal på 68%. Vi prøver at lave et areal på 68% ved at gå symmetrisk ud fra middelværdien:



Sådan, nu ligner det ca. 68%. Vi kan se at vi er gået 1 ud til begge sider, så $\sigma \approx 1$.

Øvelse 15.2.4

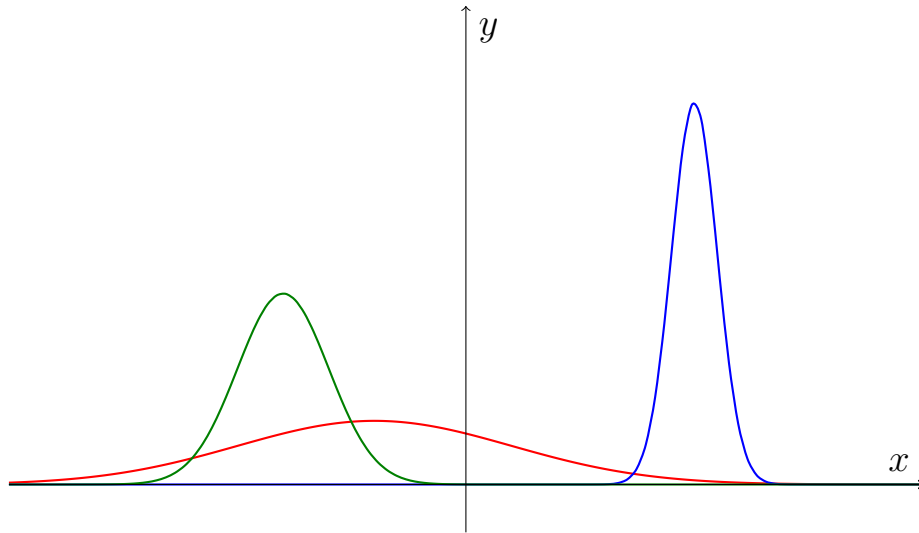
Betragt grafen for tæthedsfunktionen for en normalfordeling.



- Vurder middelværdien.
- Vurder standardafvigelsen.

Øvelse 15.2.5

Her er tre tæthedsfunktioner for tre forskellige normalfordelinger



- a) Placer graferne i rækkefølge ud fra middelværdi, fra mindste til største.
- b) Placer graferne i rækkefølge ud fra standardafvigelse, fra mindste til største.

Øvelse 15.2.6 (Svær)

En Amerikaner vil gerne starte en skofabrik. Hun ved at skostørrelser for mænd er normalfordelt $X \sim N(11; 1,5)$.

- a) Brug 68-95-99,7-reglen til at vurdere hvilken mandestørrelser hun skal producere. Der kan være flere rigtige svar til denne opgave.

Standardnormalfordelingen

Normalfordelingen $Z \sim N(0; 1)$ kaldes *standardnormalfordelingen*. Læg mærke til at vi bruger bogstavet Z i stedet for X , når vi har med standardnormalfordelingen af gøre.

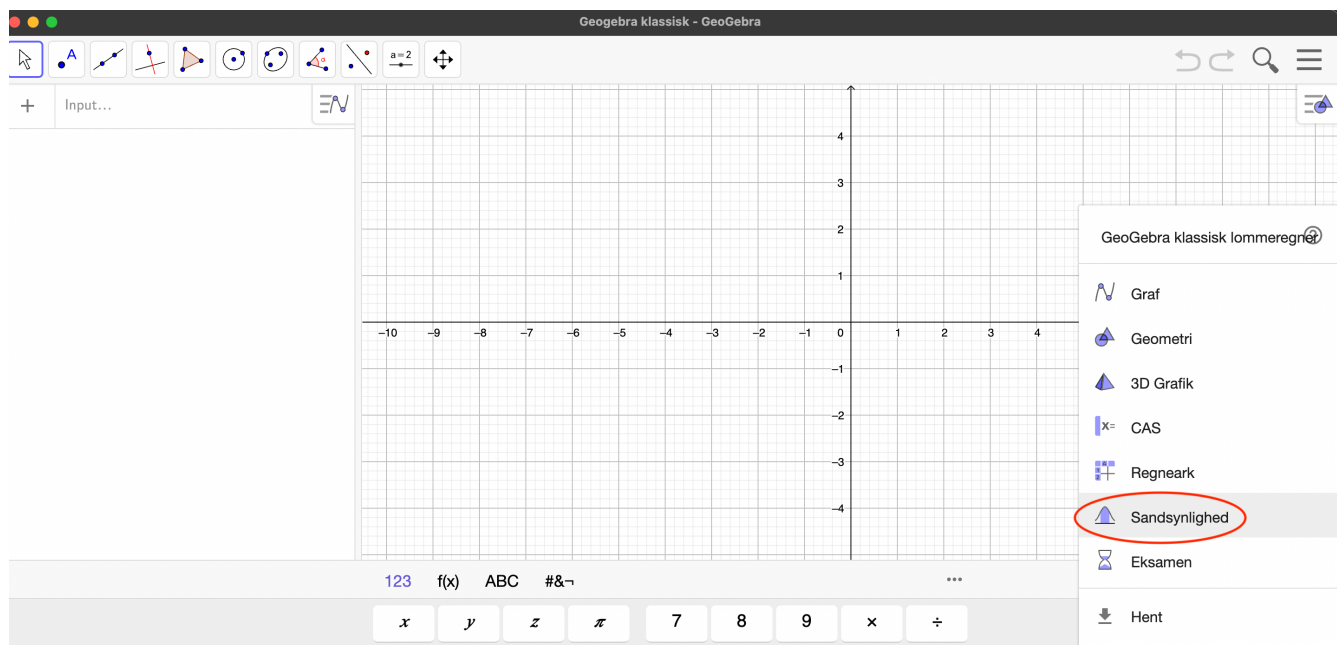
Øvelse 15.2.7

Lad $Z \sim N(0; 1)$.

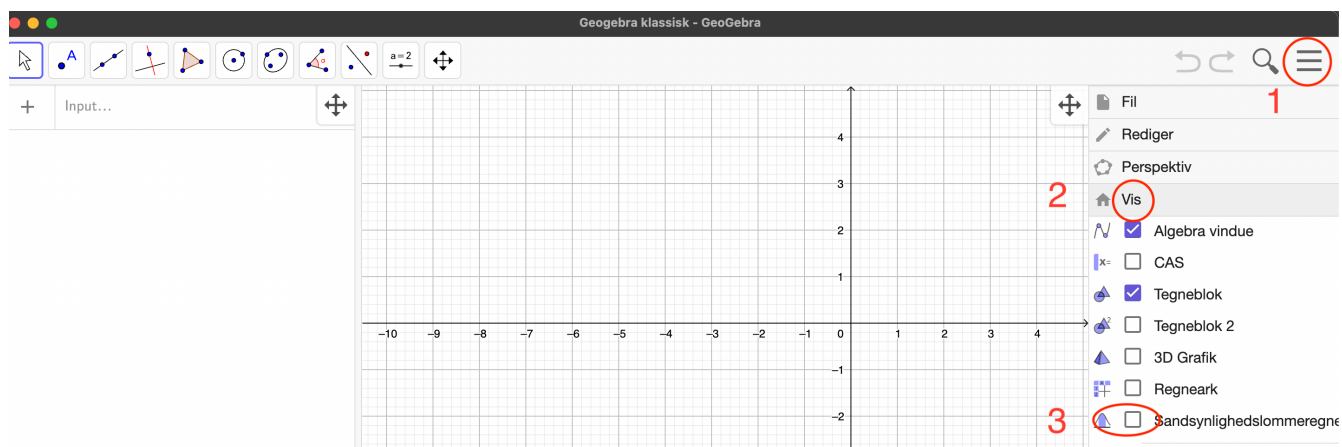
- Hvad kaldes denne fordeling?
- Hvad er dens middelværdi og standardafvigelse?
- Bestem $P(Z \geq 0)$
- Bestem $P(-1 \leq Z \leq 1)$ (VINK: brug 68-95-99,7-reglen)
- Bestem $P(Z \leq -2)$ (VINK: brug 68-95-99,7-reglen)
- Lav en skitse af tæthedsfunktionen.

15.3 Normalfordelinger i GeoGebra

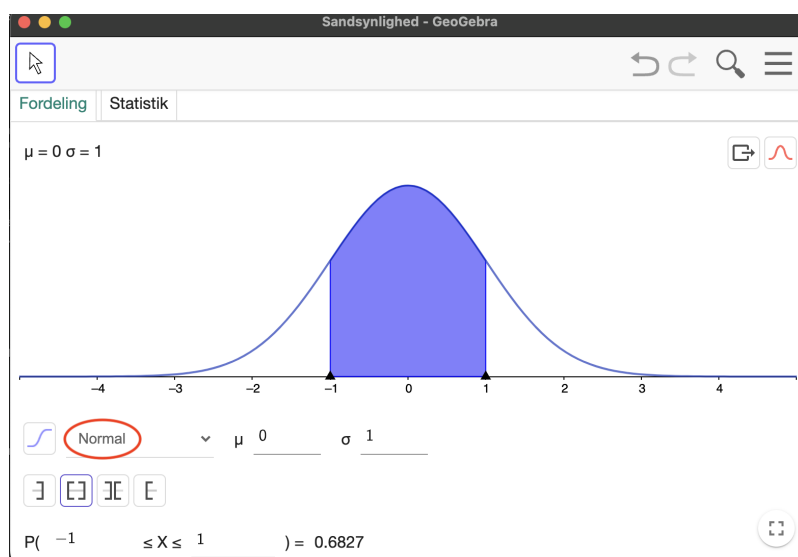
Vi åbner GeoGebra og åbner sandsynlighedslommeregneren:



Sandsynlighedslommeregneren kan også åbnes her:



Vi tjekker at lommeregnerne allerede står på normalfordeling:



Det giver sig selv, hvordan man bruger lommeregneren. Man kan kun vælge "bløde" ulighedstegn ($\leq$) og ikke skarpe ulighedstegn ($<$), men det er ikke noget problem da vi husker at der ikke er nogen forskel på de to ulighedstegn, når vi har med kontinuerte fordelinger at gøre.

Øvelse 15.3.1

For en normalfordeling $X \sim N(2, 5)$, skal du bestemme følgende sandsynligheder i procent vha. sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra:

- a) $P(X \leq 3)$.
- b) $P(X > 10)$
- c) $P(-5 \leq X \leq 5)$.
- d) Sandsynligheden for at X er mindre end eller lig med 1.
- e) Sandsynligheden for at X ligger mellem 3 og 6.

Øvelse 15.3.2

I en intelligenstagstest måler man en persons intelligenskvotient IQ. I dag er testene konstrueret på en måde, så resultaterne er normalfordelte med en gennemsnitlige IQ på 100 og standardafvigelsen på 15. Vi udvælger nu en tilfældig person.

- a) Hvad er sandsynligheden for at personens intelligens er under gennemsnittet?
- b) Hvad er sandsynligheden for at personen har en IQ på under 80?
- c) Hvad er sandsynligheden for at personen har en IQ mellem 80 og 120?

Øvelse 15.3.3

En maskine hælder sukker i en pose. Den er indstillet til at hælde 1050 g i en 1 kg pose, men det faktiske indhold er normalfordelt med en middelværdi på 1050 g og en standardafvigelse på 28 g.

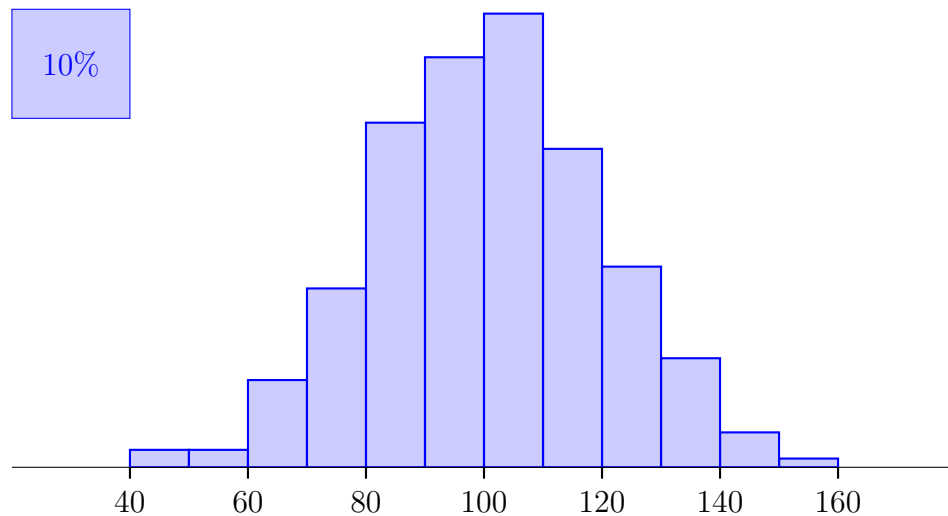
- a) Bestem sandsynligheden for at der er under 1 kg sukker i en pose.
- b) Bestem sandsynligheden for at der er mere end 1080 g i en pose.

15.4 Normalfordelte observationssæt

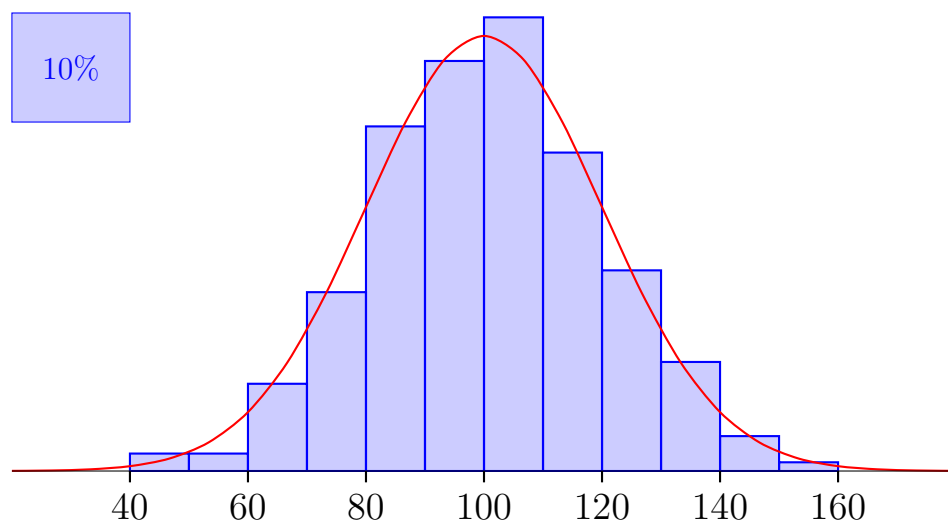
Lad os lege at vi plukker æbler fra en æbleplantage. Her mener jeg frugten æble og ikke computermærket "Apple". Vægten af et æble vil variere fra æble til æble, og derfor kan vægten af et tilfældigt æble beskrives med en stokastisk variable X . Vi antager nu at vægten X målt i gram følger normalfordelingen:

$$X \sim N(100, 20).$$

Lad os sige at vi plukker 500 æbler, og laver et histogram over deres vægt. Hvordan ville vi forvente at histogrammet så ud? Ja det må jo ligne tæthedsfunktionen for X , fordi arealerne af søjlerne i histogrammet viser frekvenserne, og frekvenserne må jo svare til sandsynlighederne. Altså hvis der er 15% sandsynlighed for at et æble vejer mellem 110 og 120 gram, så vil vi jo forvente at 15%, af de æbler vi plukker, vil veje mellem 110 og 120 gram osv. Jeg har simuleret 500 æbler ud fra normalfordelingen med $\mu = 100$ og $\sigma = 20$:



Jeg tilføjer nu tæthedsfunktionen for $X \sim N(100, 20)$:



Vi kan se at histogrammet følger tæthedsfunktionen som forventet.

I ovennævnte eksempel startede vi med at antage at æblerne var normalfordelte.

Men typisk ved man ikke hvordan et givet observationssæt er fordelt. I sådan et tilfælde kan man undersøge om observationssættet er normalfordelt. Vi skal nu se hvordan. Vi vil tage udgangspunkt i det første observationssæt i filen: [her](#). Vi skal også bruge [WordMat-statistik](#) (som I også kan åbne fra Word, hvis I har WordMat installeret – klik WordMat → Statistik).

Vi starter med at åbne [observationssættet](#) og [WordMat-statistik](#) og copy-paste data fra det første observationssæt ind i WordMat-statistik som vist her:

Optælling / gruppering			Start	Slut	Interval længde
Vælg: Datasæt 1					
Kopier til øvrige ark					
Ugrupperet optælling			Grupperet optælling		
Obs.	Obs.	Hyppeghed	Start	Slut	Hyppeghed
11,89	4,446	1			
11,77	5,291	1			
12,37	6,314	1			
9,65	6,347	1			
9,82	6,384	1			

Vi skal nu gruppere materialet. Vi kan se at værdierne (i hvert fald) ligger imellem 0 og 20 så vi vælger det som grænser. Vi sætter intervalbredden til 1, så vi får 20 intervaller. Generelt er det en god ide at lave histogrammet med 10-20 intervaller:

Optælling / gruppering			Start	Slut	Interval længde
Vælg: Datasæt 1			0	20	1
Kopier til øvrige ark					

Efter vi er færdige med at gruppere klikker vi "Kopier til øvrige ark":

Optælling / gruppering			Start	Slut	Interval længde
Vælg: Datasæt 1			0	20	1
Kopier til øvrige ark					

Vi klikker så fanen "Histogram- Fit" i bunden:

27	10,29	7,621	1						
28	8,98	7,662	1						
29	10,00	7,697	1						
30	12,24	7,86	1						
◀ ▶ Data Ugrup Grup GOF Histogram-Fit									

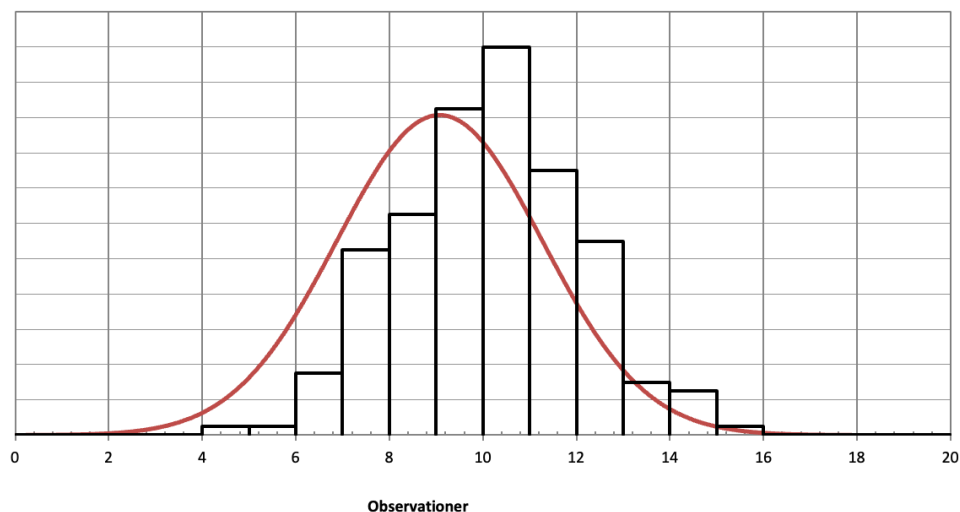
Vi ser at WordMat har tegnet en normalfordelingskurve oven i histogrammet. Den har ikke gjort det specielt godt som vi kan se

Histogramfitning til normalfordeling

Interval			
Fra	Til	Frekvens	
0	1	0%	$\mu = 9,078$
1	2	0%	$\sigma = 2,199$
2	3	0%	
3	4	0%	
4	5	1%	
5	6	1%	
6	7	4%	
7	8	11%	
8	9	0,125	
9	10	19%	
10	11	0,22	
11	12	0,15	
12	13	0,11	
13	14	0,03	
14	15	0,025	
15	16	0,005	
16	17	0	
17	18	0	
18	19	0	
19	20	0	

Et tern er 4%

Histogram



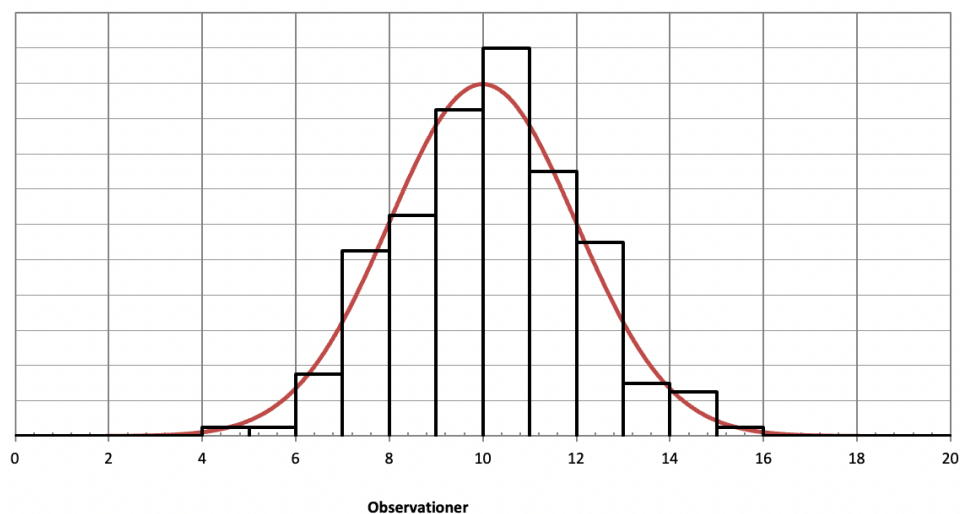
Heldigvis kan vi justere middelværdi og standardafvigelse på normalfordelingen. Vi prøver med $\mu = 10$ og $\sigma = 2$:

Histogramfitning til normalfordeling

Interval			
Fra	Til	Frekvens	
0	1	0%	$\mu = 10$
1	2	0%	$\sigma = 2$
2	3	0%	
3	4	0%	
4	5	1%	
5	6	1%	
6	7	4%	
7	8	11%	
8	9	0,125	
9	10	19%	
10	11	0,22	
11	12	0,15	
12	13	0,11	
13	14	0,03	
14	15	0,025	
15	16	0,005	
16	17	0	
17	18	0	
18	19	0	
19	20	0	

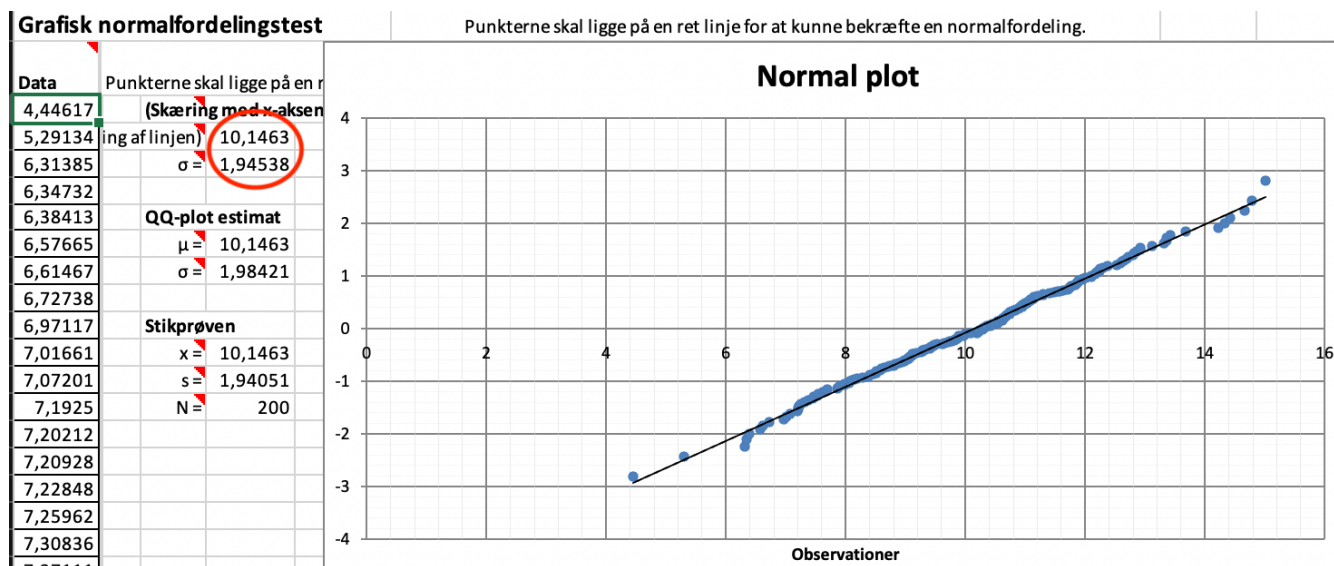
Et tern er 4%

Histogram



Det var meget bedre. Vi kan se at normalfordelingenskurven ligger nogenlunde pænt langs histogrammet og vi kan dermed sige at observationssættet er normalfordelt med $\mu = 10$ og $\sigma = 2$ – sådan ca. altså.

Vi kan finde et mere præcist bud på middelværdien og standardafvigelsen ved at klikke på "Normal-Plot":



Her har WordMat har lavet et såkaldt *normalfordelingsplot* af punkterne. Vi bemærker to ting:

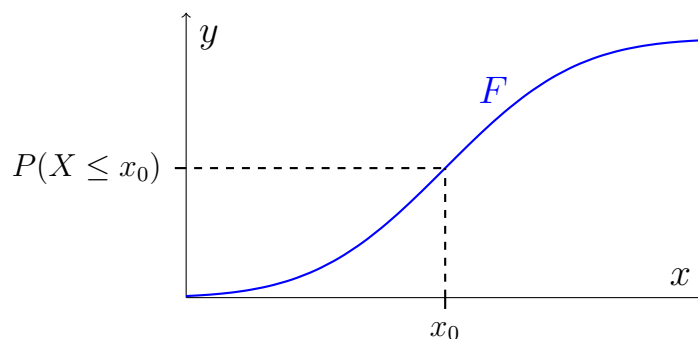
1. Punkterne ligger ca. på en linje. Det betyder at observationssættet er normalfordelt.
2. Vi aflæser $\mu = 10,15$ og $\sigma = 1,95$ ude til venstre (markeret med rødt).

Øvelse 15.4.1

- a) Afgør om de resterende observationssæt er normalfordelte og angiv i givet fald et estimat for deres middelværdi og standardafvigelse.

15.5 Fordelingsfunktioner

Vi har lært at en kontinuert fordeling er bestemt ved dens tæthedsfunktioner. Der findes imidlertid en anden måde man kan beskrive en kontinuert fordeling, nemlig ved dens *fordelingsfunktion*. En fordelingsfunktion for en kontinuert sandsynlighedsfordeling er en funktion F der til ethvert x_0 knytter sandsynligheden $P(X \leq x_0)$:



Sagt på en anden måde: Fordelingsfunktionen F er defineret ved

$$F(x) = P(X \leq x)$$

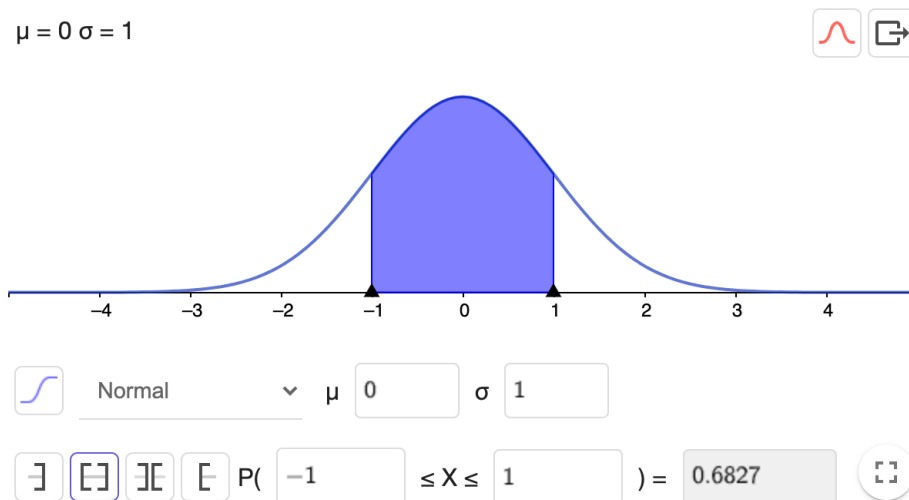
I det følgende vil vi begrænse os til fordelingsfunktioner for normalfordelinger.

Øvelse 15.5.1

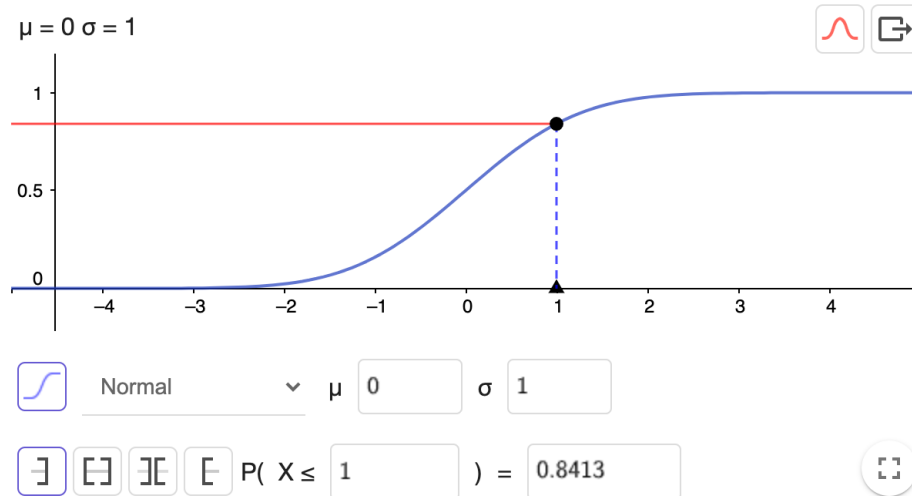
Lad $X \sim N(2, 4)$.

- a) Bestem $F(3)$ ved hjælp af tæthedsfunktionen i GeoGebra. Ja, jeg har ikke vist et eksempel på hvordan man gør, men øvelsen er en test, om man har forstået, hvad en fordelingsfunktion er. Den kan regnes med kendt teknik i GeoGebra.

Man kan finde fordelingsfunktionen i GeoGebra. Vi åbner sandsynlighedslomme-regneren som vi plejer. Her er tæthedsfunktionen for $N(0, 1)$:



Klikker man på knappen til venstre for der hvor der står "Normal" i screenshottet (knappen har en blå graf på sig), får man følgende:



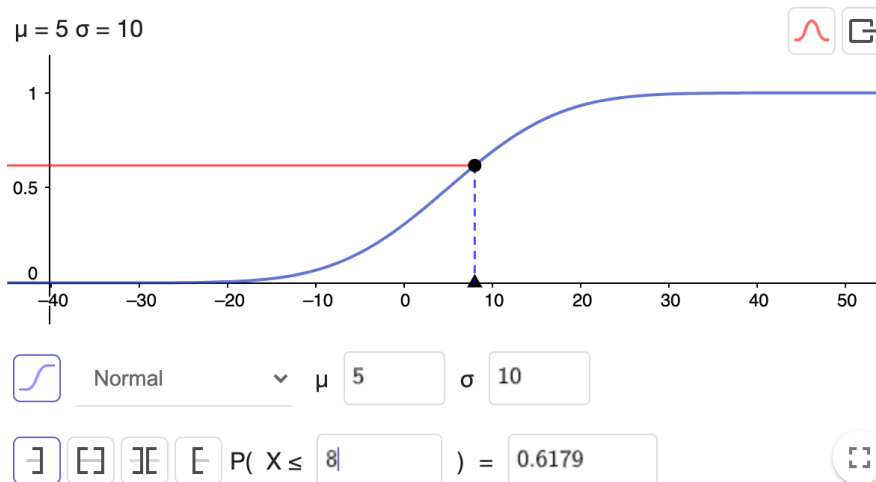
Dette er fordelingsfunktionen, og sådan som den er indstillet i screenshottet, kan vi se at $P(X \leq 1) = 0,8413$. Vi ser at sandsynligheden er markeret med en vandret rød linje. Det er fordi at sandsynlighederne her er bestemt ved funktionsværdier, i stedet for arealer som ved tæthedsfunktionen.

Eksempel 15.5.1

Vi vil bestemme sandsynligheden $P(2 \leq X \leq 8)$ for normalfordelingen $N(5, 10)$ ved hjælp af fordelingsfunktionen. Da fordelingsfunktionen kun kan give os sandsynligheder på formen $P(X \leq x)$ må vi først overveje, hvordan vi kan udtrykke den ønskede sandsynlighed ved hjælp af sandsynligheder på formen $P(X \leq x)$. Det er ikke svært:

$$P(2 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2).$$

Ved hjælp af fordelingsfunktionen bestemmer vi $P(X \leq 8)$ og $P(X \leq 2)$. Her er vist $P(X \leq 8)$:



Vi kan se at $P(X \leq 8) = 0,6179$. Tilsvarende findes $P(X \leq 2) = 0,3821$. Så vi får

$$P(2 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2) = 0,6179 - 0,3821 = 0,2358.$$

Altså har vi at

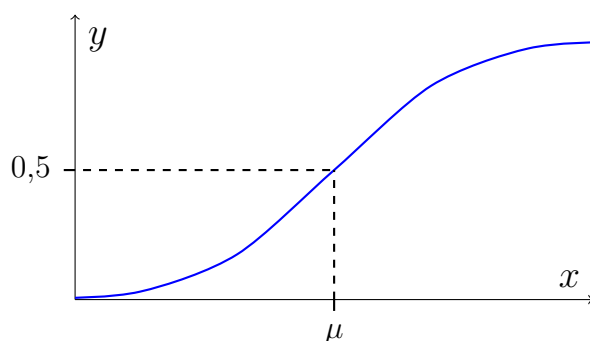
$$P(2 \leq X \leq 8) = 24\%$$

Øvelse 15.5.2

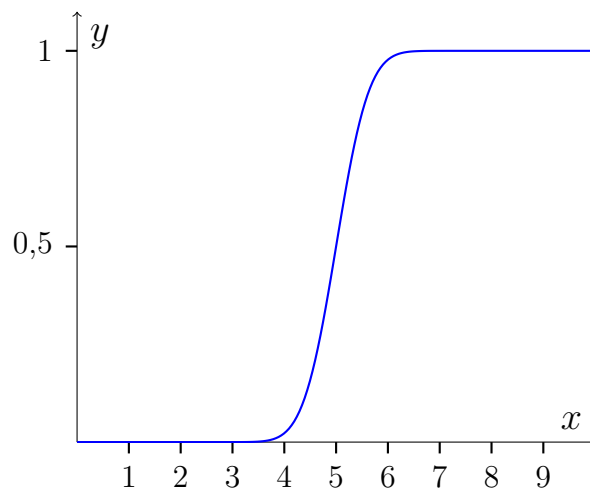
Regn følgende sandsynligheder for fordelingen $N(20, 10)$ ved hjælp af fordelingsfunktionen.

- a) $P(X \leq 15)$
- b) $P(15 \leq X \leq 22)$
- c) $P(X > 12)$

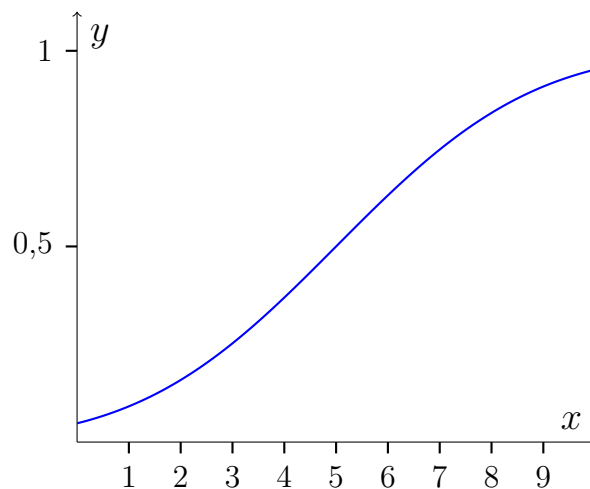
For en fordelingsfunktion for en normalfordeling gælder der altid at $F(\mu) = 0,5$. Det er fordi at en normalfordeling altid er symmetrisk omkring middelværdien så $P(X \leq \mu) = 0,5$.



En fordelingsfunktion med en lille standardafvigelse er stejl i nærheden af middelværdien.



Mens en fordelingsfunktion med stor standardafvigelse er mindre stejl omkring middelværdien:



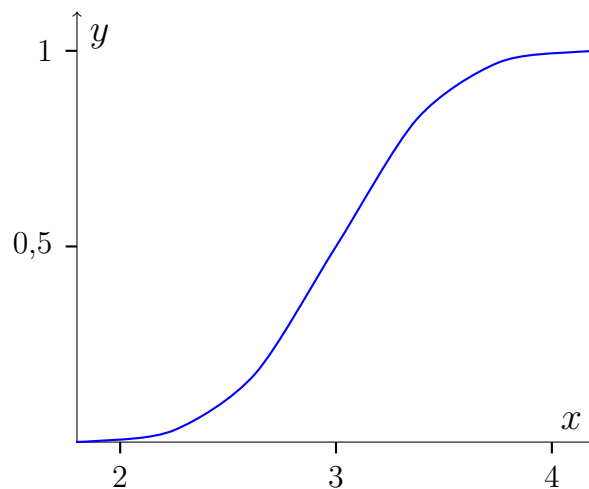
Øvelse 15.5.3 (Svær)

- Forklar hvorfor fordelingsfunktion er stejl i nærheden af middelværdien når standardafvigelsen er lille.

Ekstra

Eksempel 15.5.2

Vi vil komme med vores bedste bud for middelværdien og standardafvigelsen for normalfordelingen givet ved følgende tæthedsfunktion:



Middelværdien μ er nem. Den må være ca. 3. Det kan vi se fordi at det er ved ca. 3 at funktionsværdien er $\frac{1}{2}$.

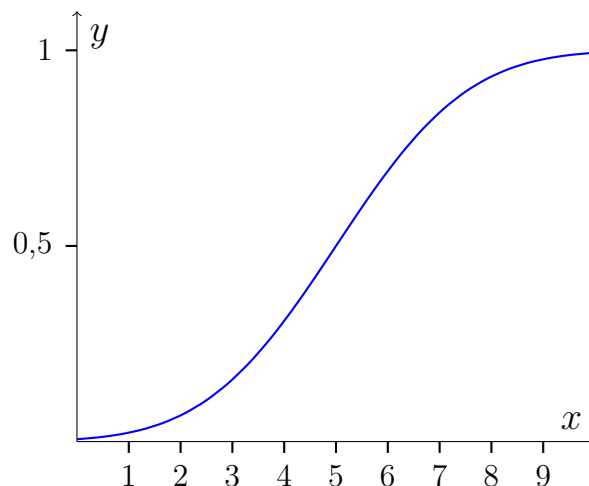
Standardafvigelsen er lidt sværere. Vi ved fra 68-95-99,7-reglen at sandsynligheden

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%.$$

Dvs. at $P(X \leq \mu - 2\sigma)$ må være ca. 2,5%. Det svært at aflæse 2,5% på y-aksen, men det må være ca. ved $x = 2$. Altså er $\mu - 2\sigma \approx 2$ og da $\mu \approx 3$, må det betyde at $\sigma \approx \frac{1}{2}$

Øvelse 15.5.4

Betragt fordelingsfunktionen for en normalfordeling:



- Kom med dit bedste bud på middelværdien.
- Kom med dit bedste bud på standardafvigelsen.

Hvis du er startet på HHX i 2023 eller tidligere skal du huske, at gå tilbage til binomialfordeling og regn afsnittet om normalfordelingsapproksimationen (afsnit [14.2](#))

Kapitel 16

Konfidensintervaller

Konfidensintervaller er et emne inden for statistik. Statistik laves ofte ud fra stikprøver, da man i praksis har begrænsede ressourcer, når man skal lave en undersøgelse. Men det kan være svært at vide, i hvilken grad, man kan stole på resultatet fra stikprøven — især hvis stikprøven er lille. Derfor kan det nogle gange være fordelagtigt at angive et interval i stedet for en værdi. Altså et interval, som med rimelig sikkerhed indeholder den søgte værdi. Et sådan interval kaldes et konfidensinterval (da vi er ”confident”, det indeholder den værdi, vi søger).

16.1 Konfidensintervaller – binomialfordeling

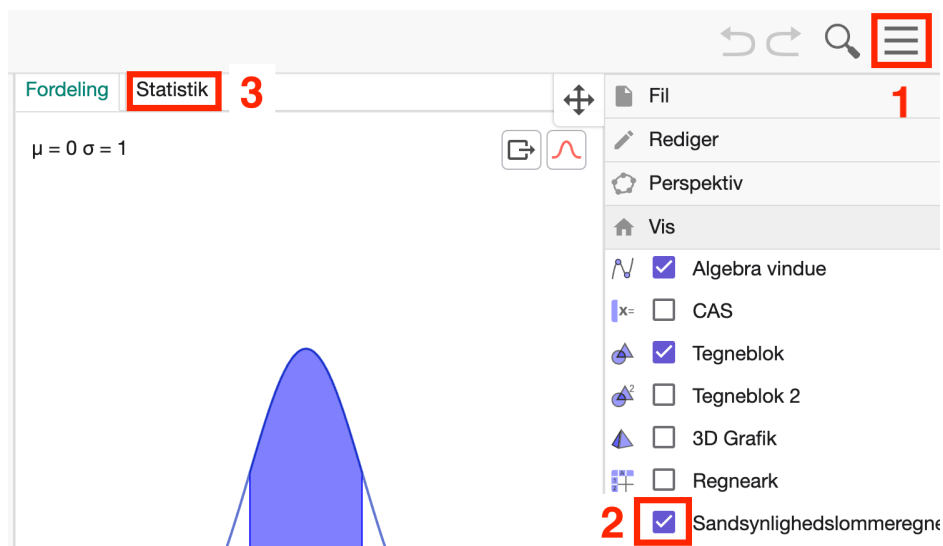
Forstil dig, at du ejer en æbleplantage. En del af æblerne er du nødt til at kassere, da de ikke lever op til kvalitetskravene. Du vil nu gerne undersøge, hvor stor en andel af æblerne, du skal kassere. Samtlige æbler på plantagen kalder vi for *populationen*. Det ville være for stort et arbejde at undersøge hele populationen, så du udtager en *stikprøve*. Lad os sige, at du finder ud af at 10% af æblerne i din stikprøve skal kasseres. Kan du så være sikker på at 10% af æblerne i populationen skal kasseres? Selvfølgelig ikke. Det kunne f.eks. være at din stikprøve tilfældigvis indholdte særlig mange dårlige æbler, og at de 10% derved var misvisende. Vi siger at de 10% er et *estimat* for andelen af dårlige æbler (i populationen) og betegner det med $\hat{p}$. Hvis vi vil udtale os med rimelig sikkerhed, er vi nødt til at angive et interval rundt om vores estimat. Det kunne f.eks. se således ud:

$$[8\%; 12\%]$$

Hvis vi er 95% sikre på, at andelen af dårlige æbler (for populationen) ligger i dette interval, kalder vi intervallet for et 95%-konfidensinterval.

Konfidensintervaller i GeoGebra

Vi skal nu se hvordan vi bestemmer et sådan konfidensinterval i GeoGebra. Lad os sige, at vi har udtaget 500 æbler og 50 af dem var dårlige. Vi åbner sandsynlighedsregneren i GeoGebra og vælger ”Statistik”.



Vi vælger nu ”Z interval for andel”:

Fordeling Statistik

Z interval for andel

Konfidensniveau 0.95

Eksempel

Successer ?

n ?

Vi skal nu udfylde tre felter:

Konfidensniveau	Her skriver vi den sikkerhed (angivet som decimaltal) vi ønsker.
Successer	Her skriver, vi hvor mange dårlige æbler vi har fået.
n	Her skriver vi stikprøvestørrelsen.

Vi vil gerne have 95% sikkerhed, så vi skriver 0,95 som ”Konfidensniveau”. Vi har 50 dårlige æbler i stikprøven, så det skriver vi som ”Successer”. Ved n skriver vi 500, da vi har udtaget en stikprøve på 500 æbler. Det giver:

Fordeling

Statistik

Z interval for andel

Konfidensniveau

0.95

Eksempel

Successer

50

n

500

Resultat

Z interval for andel

Successer

50

n

500

SE

0.0134164079

Nedre grænse

0.0737043238

Øvre grænse

0.1262956762

Interval

0.1 ± 0.0262956762

Nederst ud fra "Interval" står der $0,1 \pm 0,026296$. De 0,1 er vores estimat for andelen af dårlige æbler. Vi har altså

$$\hat{p} = 0,1$$

Det er ikke overraskende at $\hat{p} = 0,1 = 10\%$, da 50 ud af 500 er 10%. Vi kan nu aflæse konfidensintervallet i screenshottet. Det er det lukkede interval fra "Nedre grænse" til "Øvre grænse", hvilket er intervallet:

$$[0,074; 0,126]$$

Det betyder, at vi med 95% sikkerhed kan sige, at mellem 7,4% og 12,6% af alle æblerne i populationen er dårlige. Så vores bedste bud på andelen af dårlige æbler er 10%, men hvis vi skal tage forbehold for usikkerhed, vil vi begrænse os til at sige, at mellem 7,4% og 12,6% af alle æblerne i plantagen er dårlige.

Øvelse 16.1.1

En elev ville undersøge ungdomsarbejdsløsheden i Danmark og spurgte 200 repræsentativt udvalgte unge, om de var i arbejde. Der var 32 ud af de 200 som ikke var i arbejde.

- Angiv et estimat af ungdomsarbejdsløsheden.
- Bestem et 95%-konfidensinterval for ungdomsarbejdsløsheden og forklar, hvad det betyder.
- Bestem et 90%-konfidensinterval for ungdomsarbejdsløsheden og forklar, hvad det betyder.
- Hvilket interval er bredest? 90% eller 95%-konfidensintervallet?

Konfidensintervaller ved beregning

Vi skal nu se på, hvordan man beregner konfidensintervaller ved hjælp af en formel. Før vi opstiller formelen, skal vi se på noget teori, der ligger bag formelen. Vi bliver ved æbleplantagen. Når vi udtager 500 æbler, vil antallet af dårlige æbler være binomialfordelt. Vi husker nemlig, at en binomialfordeling består af n uafhængige forsøg, hvor hvert forsøg har en successandsynlighed på p . I vores tilfælde er $n = 500$, fordi vi udtager 500 æbler. Sandsynlighedsparameteren p , er sandsynligheden for et dårligt æble, og den kender vi ikke. Det er faktisk den, vi gerne vil finde, da sandsynligheden for at få et dårligt æble, må være det samme som andelen af dårlige æbler (i populationen). Altså, hvis der 10% sandsynlighed for at få et dårligt æble, må det være fordi 10% af æblerne er dårlige. Så vi leder efter en formel for et konfidensinterval for sandsynlighedsparameteren i en binomialfordeling.

Før vi kan beregne konfidensintervallet, har vi brug for nogle forskellige størrelser. For det første har vi brug for et estimat for p . Det finder vi med formelen:

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Her er $\hat{p}$ estimatet, x er antal succeser og n er antal forsøg. I eksemplet med æbler har vi $n = 500$, fordi der er 500 æbler i stikprøven, $x = 50$ fordi der var 50 dårlige æbler. Estimatet $\hat{p}$ bliver så:

$$\hat{p} = \frac{50}{500} = 0,1$$

Vi har også brug for nogle ”fraktiler i en normalfordeling”. Dem som afslutter matematik på A-niveau vil lære hvad det betyder. For resten af os, er det bare nogle tal, vi finder i en tabel:

Konfidensniveau	$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576

Tabel 16.1: Fraktiler ud fra konfidensniveauet

I tabellen ser vi fraktilerne, der betegnes med $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, for forskellige konfidensniveauer. Vi husker, at konfidensniveauet betyder den sikkerhed, vi ønsker vores konfidensinterval skal have.

Sætning 16.1.1

Hvis p opfylder at $n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) > 9$ kan et konfidensinterval I for sandsynlighedsparameteren p i en binomialfordeling bestemmes ved formelen:

$$I = \left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Her er :

n : Stikprøvens størrelse

$\hat{p}$: Estimat af sandsynlighedsparameteren p .

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -fraktilen i standardnormalfordelingen.

Kravet $n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) > 9$ skal ses som en tommelfingerregel. Formlen giver ikke det eksakte konfidensinterval, men kun en tilnærmelse. Tilnærmelsen bliver bedre jo højere $n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})$ er. GeoGebra bruger i øvrigt samme formel, så vi bør egentlig også tjekke kravet, når vi bruger GeoGebra.

Øvelse 16.1.2

Mor Jette laver en mønt ud af ler og kaster den 80 gange. Hun får 34 plat. Hun vil nu gerne bestemme et konfidensinterval for sandsynligheden for at slå plat.

- Bestem $\hat{p}$.
- Regn $n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})$ og tjek om kravet $n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) > 9$ er opfyldt.
- Bestem ved beregning et 95%-konfidensinterval for p .
- Mor Jette mener at mønten er fair, men Jessica Priscilla tror ikke på hende. De bliver enige om at spørge dig. Hvad siger du til dem?

Bredden af konfidensintervaller

Når vi bestemmer konfidensintervaller, er der to ting, vi gerne vil have opfyldt:

- Konfidensniveauet er højt. Det betyder nemlig, at vi er meget sikre på at intervallet indeholder den sande værdi for p . I eksemplet med æblerne var konfidensniveauet 95%, hvilket betød, at vi var 95% sikre på, at andelen af dårlige æbler lå mellem 7,4% og 12,6%. Det havde selvfølgelig været bedre, hvis vi kunne være f.eks. 99% sikre på, at andelen lå imellem de to værdier.
- Intervallet er smalt. Det betyder nemlig, at vi siger noget mere præcist om, hvad p kan være. I forhold til æblerne gik intervallet fra 7,4% til 12,6%. Det betyder, at andelen af dårlige æbler (sandsynligvis) ligger et eller andet sted imellem de to værdier. Det ville selvfølgelig være bedre (mere præcist), hvis vi f.eks. kunne sige, at andelen (sandsynligvis) lå mellem 9% og 11%.

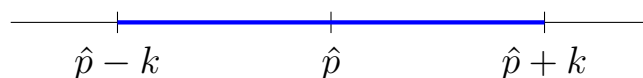
Det viser sig desværre (og ikke helt overraskende), at det er svært at opnå begge dele på en gang. Konfidensniveauet vælger vi selv, og derfor er der ikke så meget at sige til det, så vi vil nu fokusere på, hvad der afgør bredden af intervallet. Vi vil tage udgangspunkt i sætning 16.1.1. Ifølge sætningen er intervallet givet ved

$$I = \left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Sætter vi $k = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, kan vi skrive intervallet som:

$$[\hat{p} - k; \hat{p} + k]$$

Vi kan vise intervallet på en tallinje:



Det er tydeligt fra tallinjen at intervallets bredde er givet ved $2k$. Hvis k er stort vil vi altså få et bredt interval, mens en lille k -værdi vil give et smalt interval. Lad os derfor undersøge hvad der gør k stor hhv. lille. Vi havde:

$$k = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Vi ser at:

- k er stor, hvis $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ er stor. Dette er umiddelbart klart ud fra udtrykket. Vi ser i tabel 16.1 at $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ er stor, hvis konfidensniveauet er stort. Det giver god mening, at hvis vi vil være meget sikker på at intervallet indeholder p , så får vi også et bredt interval.
- k er stor, hvis n er lille. Fordi, hvis n er lille, bliver nævneren i brøken lille, og derfor bliver hele brøken stor, og dermed bliver kvadratroden også stor. Det giver god mening, at en lille stikprøve giver et bredt interval, da det svært at fastlægge p med stor præcision, hvis stikprøven er lille.

Ud over dette afhænger bredden af intervallet også af $\hat{p}$, men i modsætning til $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ og n , er det ikke noget vi selv har indflydelse på. Da vi ville undersøge andelen af dårlige æbler, besluttede vi selv, at vi ville have et konfidensniveau på 95%, og at vi ville udtage en stikprøve 500 æbler. Andelen af dårlige æbler i stikprøven har vi ikke mulighed for at påvirke. Alligevel kan det være interessant at afklare, hvilken påvirkning $\hat{p}$ har på bredden af konfidensintervallet, så hvis du har mod på det, kan du læse om dette i det efterfølgende ekstraafsnit.

Øvelse 16.1.3 (Svær)

Ud fra vores ræsonnementer er det nemt at opstille en formel for bredden af konfidensintervallet.

- Bestem en formel for bredden B af konfidensintervallet
- Bestem hvor stor en stikprøve vi skal udtage, hvis $p = 0,4$, konfidensniveauet er 90% og vi ønsker en bredde på 0,1.

Ekstra

Betydning af $\hat{p}$ for bredden af konfidensintervallet

Bredden af konfidensintervallet var bestemt af størrelsen:

$$k = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Vi vil nu finde ud af, hvilken værdi af $\hat{p}$ som gør k størst. Vi ser at k er stor når brøken under kvadratroden er stor. Brøken bliver stor når tælleren, dvs. $\hat{p}(1-\hat{p})$, er stor. Vi skal altså undersøge, hvornår $\hat{p}(1-\hat{p})$ er stor. Vi ganger parentesen ud:

$$\begin{aligned}\hat{p}(1-\hat{p}) &= \hat{p} - \hat{p}^2 \\ &= -\hat{p}^2 + \hat{p}\end{aligned}$$

Udtrykket $-\hat{p}^2 + \hat{p}$ har form som et andengradspolynomium med koefficienterne $a = -1$, $b = 1$ og $c = 0$. Fordi a er negativ, er det et konkavt polynomium og har derfor maksimum i toppunktet. Vi regner førstekoordinaten til toppunktet:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = 0,5$$

Udtrykket er altså stort når $\hat{p} = 0,5$.

Øvelse 16.1.4

Vi brugte toppunktsformlen til at nå frem til at $\hat{p}(1-\hat{p})$ er størst, når $\hat{p} = 0,5$. Alternativt kunne vi have brugt differentialregning.

- a) Redegør for at $\hat{p}(1-\hat{p})$ er størst, når $\hat{p} = 0,5$ vha. differentialregning.

Præcisering af konfidensniveauet

Man kan undre sig over, hvad 95%-sikkerhed betyder i forbindelse med konfidensintervaller. Det skal forstås på den måde, at hvis du lavede rigtig mange stikprøver med tilhørende konfidensintervaller, så ville 95% af dine konfidensintervaller indeholde andelen af dårlige æbler (i hele populationen). Så de 95% er ikke en sandsynlighed for at et konkret interval indeholder andelen af dårlige æbler. Andelen er nemlig ikke stokastisk (tilfældig), så sandsynligheden for at et konkret interval indeholder andelen er enten 0 eller 100%. Det er selve stikprøven der er stokastisk (det er tilfældigt, hvilke æbler du får fat i). Denne pointe er vigtig, hvis man ønsker at udlede formler for konfidensintervaller.

16.2 Konfidensintervaller – normalfordeling (A)

I dette afsnit skal vi se på, hvordan man laver konfidensintervaller for middelværdien i en normalfordeling.

Konfidensintervaller i GeoGebra

Vi bliver ved vores æbleplantage, men nu er vi ikke længere interesserede i andelen af dårlige æbler, vi er interesseret i gennemsnitsvægten. Vi antager at æblernes vægt er normalfordelt med middelværdi μ og standardafvigelse σ , og vi vil altså gerne finde μ . Vi udtager en stikprøve og gennemsnitsvægten i stikprøven er et estimat for populationens (alle æblerne i plantagen) gennemsnitsvægt. Vil vi bestemme et konfidensinterval for gennemsnitsvægten, har vi også brug for at kende populationens standardafvigelsen. Typisk er den ikke kendt på forhånd, hvilket betyder, at vi må estimere den. Her sker der noget overraskende. Stikprøvens standardafvigelse er ikke et (godt) estimat for populationens standardafvigelse. Man kommer generelt til at skyde for lavt, hvis man bruger stikprøvens standardafvigelse som estimat for populations standardafvigelse. I stedet skal man regne *stikprøve-standardafvigelse*. Det kan man gøre i Excel med kommandoen:

STDAFV.S

Vi betegner estimatet for populations middelværdi med $\hat{\mu}$ og estimatet for populations standardafvigelse med $\hat{\sigma}$.

Eksempel 16.2.1

Antag, at vi har en stikprøve fra en normalfordelt population. Stikprøven består af tallene: 14, 15, 19

Vi regner et estimat for populationens middelværdi og standardafvigelse i Excel:

D2				
fx =STDAFV.S(A1:A3)				
	A	B	C	D
1	14		Estimat for middelværdi	16
2	15		Estimat for standardafvigelse:	2,64575131
3	19			

Vi har altså estimaterne $\hat{\mu} = 16$ og $\hat{\sigma} = 2,65$.

Middelværdien har jeg fundet med kommandoen MIDDEL og standardafvigelsen er fundet som med kommandoen STDAFV.S som vist i screenshottet.

Øvelse 16.2.1

Antag, at vi har en stikprøve fra en population. Stikprøven består af tallene: 1, 5, 7, 11

- Bestem et estimat for populationens middelværdi
- Bestem et estimat for populationens standardafvigelse

I eksempel 16.2.1 fandt vi et estimat for middelværdien ud fra en stikprøve. Ud fra dem kan vi bestemme et konfidensinterval for middelværdien

Eksempel 16.2.2

Vi bestemmer et 95%-konfidensinterval for middelværdien af populationen fra eksempel 16.2.1. I eksemplet fandt vi estimerne $\hat{\mu} = 16$ og $\hat{\sigma} = 2,65$. Vi åbner sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra og vælger først "statistik" og derefter "t-interval af middel":

Sandsynlighed - GeoGebra

Fordeling Statistik

t interval af middel

Konfidensniveau 0.95

Eksempel

Middel ?

s ?

N ?

Ud over konfidensniveauet, skal vi taste tre tal for at finde konfidensintervallet:

Middel: Estimat for middelværdien. I vores tilfælde: 16

s: Estimat for standardafvigelsen. I vores tilfælde 2,65

N: Antallet af observationer. I vores tilfælde: 3

Det taster vi og får:

t interval af middel ▼

Konfidensniveau 0.95

Eksempel

Middel 16

s 2.65

N 3

Resultat

t interval af middel

Middel	16
s	2.65
SE	1.53
N	3
df	2
Nedre grænse	9.417
Øvre grænse	22.583
Interval	16 ± 6.583

Konfidensintervallet er det lukkede interval mellem den nedre og øvre grænse markeret i screenshottet. Altså intervallet:

$$[9,4; 22,6]$$

I eksemplet fandt vi 95%-konfidensintervallet $[9,4; 22,6]$. Det betyder at vi kan være 95% sikre på at middelværdien for populationen ligger i intervallet. Vores bedste bud på middelværdien for populationen er 16, men det er et usikkert estimat. Skal vi udtale os med større sikkerhed, må vi begrænse til at sige, at middelværdien ligger i intervallet $[9,4; 22,6]$. Det kan vi så til gengæld være 95% sikre på at er rigtigt.

Øvelse 16.2.2

Antag at vi har en stikprøve fra en normalfordelt population bestående af observationerne: $-5, 0, 1, 7$.

- a) Bestem et 95%-konfidensinterval for populationens middelværdi.
- b) Forklar betydningen af det fundne interval.

Øvelse 16.2.3

Forestil dig, at du nu vil købe endnu en æbleplantage, men du vil gerne have en plantage med store æbler. Du køber derfor 10 æbler fra en udvalgt plantage som du vejer enkeltvis. Du får [disse resultater](#). Vi antager at vægten af æbler er normalfordelt.

- a) Bestem et estimat for middelværdien af vægten af æblerne i plantagen.
- b) Bestem et 95%-konfidensinterval for middelværdien.
- c) Du vil kun købe plantagen hvis du kan være sikker på at middelværdien af æblernes vægt er over 100. Vurder om du bør købe plantagen.

Konfidensintervaller ved beregning

Ligesom ved binomialfordeling, kan vi også regne konfidensintervaller med en formel. Vi skal se på to forskellige formler. Den første formel kan bruges, når vi kender standardafvigelsen på forhånd og den sidste bruges når vi ikke kender standardafvigelsen. Inden vi kan opskrive formelen er vi dog først nødt til at indføre nogle begreber.

Signifikansniveau

Signifikansniveauet α er givet ved:

$$100\% - \text{konfidensniveau}$$

Eksempel 16.2.3

For et 87%-konfidensinterval finder vi signifikansniveauet:

$$\alpha = 100\% - 87\% = 13\%.$$

Øvelse 16.2.4

Bestem signifikansniveauet for følgende typer af konfidensintervaller:

- a) Et 90%-konfidensinterval.
- b) Et 99%-konfidensinterval.
- c) Et 99,9%-konfidensinterval.

Fraktiler i standardnormalfordelingen

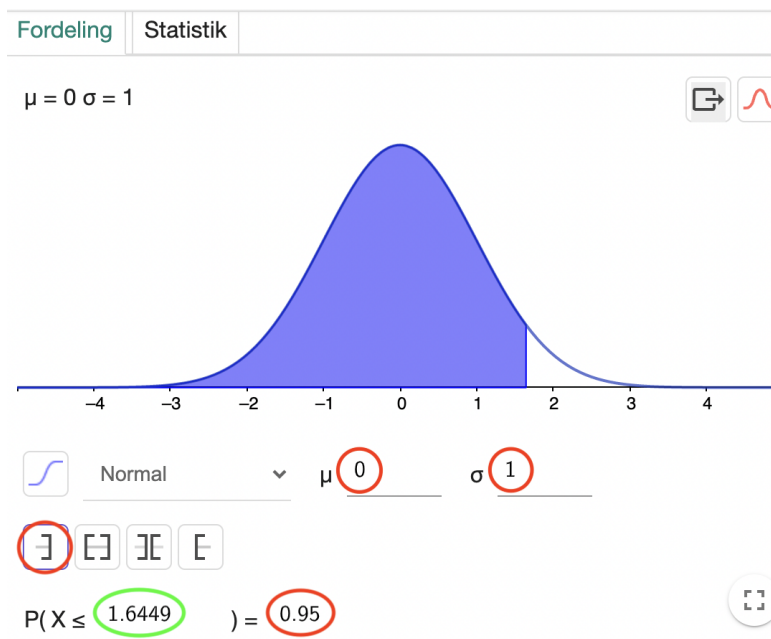
En p -fraktil for en stokastisk variabel X er et tal x_p sådan at

$$P(X \leq x_p) = p$$

Det er nemmest at forstå ved at se på et eksempel.

Eksempel 16.2.4

Vi vil bestemme 0,95-fraktilen for standardnormalfordelingen $Z \sim N(0; 1)$. Vi åbner GeoGebra og laver en normalfordeling med $\mu = 0$ og $\sigma = 1$ (sådan står den vist allerede når man åbner den). Vi skriver nu de 0,95 ind:



Vi kan nu se at 0,95-fraktilen er 1,6449. Vi betegner denne fraktil med $z_{0,95}$. Vi bruger bogstavet z fordi det er standardnormalfordelingen. Vi konkluderer altså at

$$z_{0,95} = 1,645$$

Øvelse 16.2.5

a) Bestem $z_{0,975}$.

Vi kommer til at støde på fraktiler på formen $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, hvor α er signifikansniveauet.

Eksempel 16.2.5

Vi vil bestemme fraktilen $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ når $\alpha = 10\%$. Vi regner først $1 - \frac{\alpha}{2}$:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,10}{2} = 0,95$$

Vi skal altså bestemme $z_{0,95}$, men den fandt vi jo i eksempel 16.2.4 til at være 1,645. Vi konkluderer at for $\alpha = 10\%$ er

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,645$$

Vi kan nu lave en tabel der viser sammenhængen mellem α og $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$:

α	$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
1%	2,576
5%	1,960
10%	1,645

Tabel 16.2: Fraktiler i standardnormalfordelingen.

Øvelse 16.2.6

I eksempel 16.2.5 regnede vi sidste værdi for $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ i tabellen – altså at $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,645$ når $\alpha = 10\%$.

a) Regn efter at tabellen også har ret mht. de to første værdier for $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (når $\alpha = 5\%$ og $\alpha = 1\%$).

Vi er nu endelig klar til at præsentere den sætning, vi skal bruge til at regne konfidensintervallerne.

Sætning 16.2.1

Hvis standardafvigelsen er kendt, bestemmes et konfidensinterval I for middelværdien i en normalfordeling ved formlen:

$$I = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Her er:

n : Stikprøvens størrelse

$\bar{x}$: Gennemsnittet af stikprøven

σ : Standardafvigelsen

α : Signifikansniveauet som decimaltal

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -fraktilen i standardnormalfordelingen.

Vi regner et eksempel:

Eksempel 16.2.6

Vi vil bestemme et 95%-konfidensinterval for en stikprøve med kendt standardafvigelse. Stikprøven har en størrelse på 200, et gennemsnit på 1000 og en standardafvigelse på 30. Vi har altså:

$n =$	200
$\bar{x} =$	1000
$\sigma =$	30
$\alpha =$	0,05

Vi slår $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ op i tabel 16.2 og får den til 1,96.

Vi skal nu sætte ind i formlen

$$I = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

så det gør vi og får

$$I = \left[1000 - 1,960 \cdot \frac{30}{\sqrt{200}}; 1000 + 1,960 \cdot \frac{30}{\sqrt{200}} \right]$$

Vi taster hele pivetøjet ind på en lommeregner og får:

$$I = [996; 1004]$$

Øvelse 16.2.7

Vi ser på en stikprøve fra en normalfordelt population. Vi har 500 observationer, et gennemsnit på 20 og en standardafvigelse på 5.

- a) Bestem uden GeoGebra et 90%-konfidensinterval for middelværdien.

Øvelse 16.2.8

- a) Regn med formel et 80% konfidensinterval for middelværdien i en normalfordeling, hvor stikprøvestørrelsen er 150, gennemsnittet er 50 og standardafvigelsen er 10.

Normalfordeling med ukendt standardafvigelse

Vi kan bestemme et konfidensinterval for middelværdien i en normalfordeling med ukendt standardafvigelse på næsten samme måde:

Sætning 16.2.2

Hvis standardafvigelsen er ukendt, bestemmes et konfidensinterval I ved formelen:

$$I = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

n : Stikprøvens størrelse

$\bar{x}$: Gennemsnittet af stikprøven

s : Estimat af populations standardafvigelse.

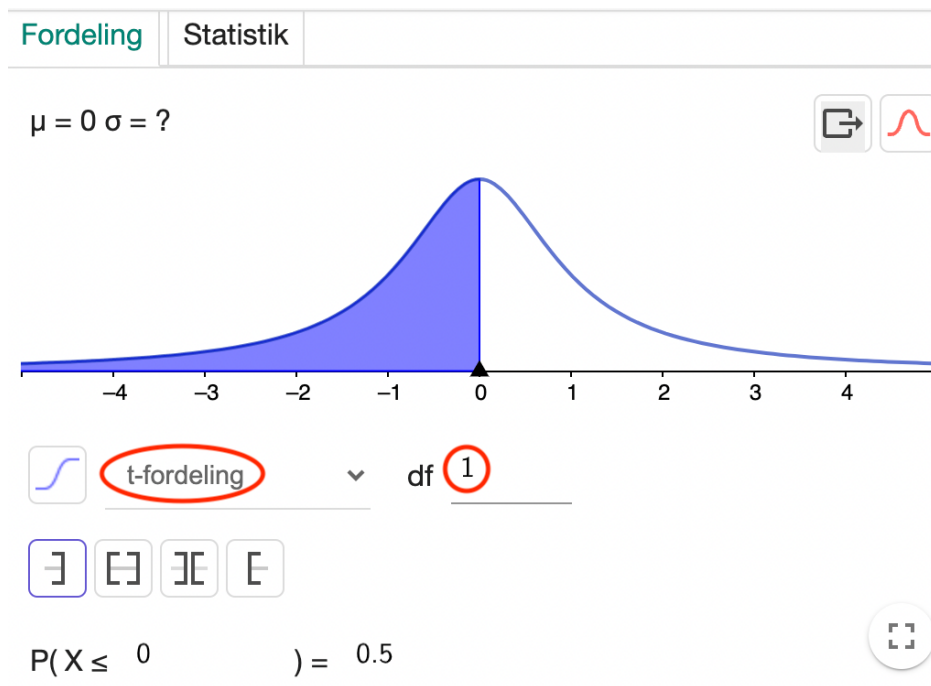
α : Signifikansniveauet som decimaltal

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$: $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -fraktilen i t -fordeling med $n - 1$ frihedsgrader (forklaring følger).

Vi kan se, at den ligner sætning 1 meget. Den eneste forskel er at der står $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ i stedet for $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Det betyder at vi ikke længere skal finde fraktilerne i standardnormalfordelingen i men i stedet skal vi have fat i en fordeling der hedder t -fordelingen — eller faktisk — vi skal have fat i en bestemt t -fordeling. Der findes nemlig uendelig mange t -fordelinger — en for hver *frihedsgrad*. Vi skal ikke komme nærmere ind på hvad frihedsgrader er, men det er et begreb vi også vil støde på senere.

Indtil videre er det nok at vide, at en frihedsgrad er et helt positivt tal (1,2,3,4...) og at der til enhver frihedsgrad er knyttet en t -fordeling.

Vi finder t -fordelingen i GeoGebra. Frihedsgraderne betegnes "df" (degrees of freedom). Her et eksempel med med 1 frihedsgrad:



Øvelse 16.2.9

Åben en t -fordeling med en frihedsgrad i GeoGebra (som i screenshottet oven over). Prøv at skift rundt mellem den fordeling og så standardnormalfordelingen.

- Hvad ser anderledes ud i t -fordelingen forhold til standardnormalfordelingen?
- Prøv at skrive 100 som frihedsgrader. Kommer den tættere på standardnormalfordelingen?

Øvelse 16.2.10

Vi vil bestemme et 90%-konfidensinterval for middelværdien i en normalfordeling, hvor vi ikke kender standardafvigelsen. Stikprøvestørrelsen er 50, et estimat af standardafvigelsen er 800 og gennemsnittet er 5000.

- a) Bestem $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ i GeoGebra
- b) Bestem konfidensintervallet ved at bruge resultatet fra a), men ellers uden at bruge computeren (selvfølgelig må I gerne bruge den som lommeregner).

Øvelse 16.2.11

Vi har set at når vi har høje frihedsgrader ligner t-fordelingen standardnormalfordelingen. Brug dette til at argumentere for:

- a) Hvis stikprøven er meget stor kan vi bruge formelen for kendt standardafvigelse selvom vi ikke kender standardafvigelsen.
- b) At dette ikke er så overraskende.

Konfidensintervaller for middelværdien, når populationen ikke er normalfordelt

Måske har I lagt mærke til at vi har krævet at alle populationerne i eksemplerne var normalfordelte? Det er fordi at vi havde med små stikprøver at gøre, og metoden virker kun for små stikprøver, hvis populationen er normalfordelt. Har vi en stor stikprøve (tommelfingerregel er en stikprøvestørrelse på minimum 30), så virker metoden også for andre typer af fordelinger. Typisk er stikprøvestørrelserne større end 30, så generelt vil vi ikke bekymre os om, hvorvidt populationen er normalfordelt eller ej.

16.3 Beviser til konfidensintervaller (A)

Vi vil udlede formelen:

Sætning 16.2.1

Hvis standardafvigelsen er kendt, bestemmes et konfidensinterval I for middelværdien i en normalfordeling ved formlen:

$$I = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Her er:

n : Stikprøvens størrelse

$\bar{x}$: Gennemsnittet af stikprøven

σ : Standardafvigelsen

α : Signifikansniveauet som decimaltal

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -fraktilen i standardnormalfordelingen.

For at gøre det mere konkret, kigger vi på den situation hvor α er 5%, og vi har derfor at $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ (se tabel 16.2, hvis du forvirret). Vi skal altså vise, at 95%-konfidensintervallet er givet ved:

$$I = \left[\bar{x} - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

For at kunne udlede formlen har vi brug for nogle indledende betragtninger.

Forudsætning 1

Vi husker:

Sætning 15.2.1

(68-95-99,7-reglen)

For en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ gælder følgende:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$$

Sandsynligheder i reglen er afrundede til hele tal, så når der står, at

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%$$

så er den rigtige sandsynlighed faktisk $95,4499736 \dots \%$. Vil man have 95% mere præcist, skal man kun gå 1,96 standardafvigelser ud (hvilket heller ikke giver præcis 95%, men tætter på). Altså gælder:

$$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) = 95\%$$

Forudsætning 2

Hvis $X \sim N(\mu, \sigma)$ og vi vil lave en stikprøve, så er stikprøvens gennemsnit $\bar{X}$ en stokastisk variabel som er normalfordelt $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Vi vil ikke bevise dette, men vi vil se på et eksempel for bedre at forstå, hvad det betyder:

Eksempel 16.3.1

Højden (målt i cm) af voksne mænd i Danmark er tilnærmelsesvis normalfordelt med $X \sim N(180, 7)$. Hvis vi udtager flere stikprøver, hver på 100 voksne mænd, vil vi få forskelligt gennemsnit for hver stikprøve. Det kan være at gennemsnitshøjden, i den første stikprøve, er 182, den næste 179, den næste 181 osv. Gennemsnittet vil ligge tæt på de 180, men indtil stikprøven er udtaget, kan vi ikke sige præcis hvad det vil blive. Gennemsnittet er altså en stokastisk variabel $\bar{X}$. Påstanden er altså, at denne stokastiske variable $\bar{X}$ er normalfordelt:

$$\bar{X} \sim N(180, \frac{7}{\sqrt{100}})$$

dvs.

$$\bar{X} \sim N(180; 0,7)$$

Vi konkluderer, at gennemsnitshøjden i en stikprøve med 100 voksne mænd er normalfordelt med middelværdi 180 og standardafvigelse 0,7.

Vi ser af formelen $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, at jo større stikprøven er jo mindre bliver standardafvigelsen for stikprøvens gennemsnit. Det giver god mening fordi en stor stikprøve altid vil have et gennemsnit tæt på populationens gennemsnit.

Øvelse 16.3.1

Antag at vi køber en æbleplantage og at æblernes vægt er normalfordeling $X \sim N(100, 20)$.

- Bestem μ og σ .
- Vi vil nu udtage en stikprøve på 5 æbler og beregne gennemsnitsvægten i stikprøven. Gennemsnitsvægten i stikprøven vil dog være en stokastisk variabel. Hvordan er den fordelt?
- Vi udtager nu stikprøven. Den består af æbler med vægten: 79, 105, 67, 104, 128. Bestem $\bar{x}$.
- Forklar forskellen på $\bar{x}$ og $\bar{X}$ i forbindelse med eksemplet med æblerne.

Udledning

Fra forudsætning 1 ved vi at, hvis vi har en normal fordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ så er

$$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) = 95\%$$

Fra forudsætning 2 ved vi at gennemsnittet for en stikprøve $\bar{X}$ er normalfordelt $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Vi bruger nu forudsætning 1 på $\bar{X}$ og får:

$$P(\mu - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 95\%$$

Vi omskriver nu uligheden. Vi starter med at trække $\bar{X}$ og μ fra på begge sider af ulighedstegnet:

$$P(-\bar{X} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 95\%$$

Nu ganger vi uligheden med -1 (og husker at vi så skal vende ulighedstegnene)

$$P(\bar{X} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 95\%$$

Hvilket jo er det samme som:

$$P(\bar{X} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 95\%$$

Dette betyder, at hvis vi udtager stikprøve og regner dens gennemsnit $\bar{x}$, så er der 95% sandsynlighed for at μ vil ligge i intervallet

$$\left[\bar{x} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Altså er ovenstående interval et 95%-konfidensinterval.

Kapitel 17

Chi i anden-test

Betragt følgende undersøgelse af yndlingskage for elever på Niels Brock:

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	13	5	18
Chokoladekage	14	11	25
Andet	6	6	12
Total	33	22	55

Er der forskel på de to køn når det kommer til yndlingskage? Det ser ud til, at drenge er mere glade for drømmekage end piger, men vi har kun spurgt 55 elever, så måske ville billedet være et andet, hvis vi havde spurgt nogle andre elever? Det er selvfølgelig principielt umuligt at svare på, men i dette afsnit skal vi lære en metode – kaldet *chi i anden-test for uafhængighed* – som kan give os et kvalificeret bud på svaret. Der findes også andre typer af chi i anden-test, men vi skal kun se på denne type.

17.1 Introduktion til chi i anden-test

I en chi i anden-test (læses ”ki i anden test” og skrives også ” χ^2 -test”) for uafhængighed undersøger vi om der er uafhængig mellem to data i to forskellige kategorier. Det kunne f.eks. man ville undersøge om der var uafhængighed mellem landsdel og politisk tilhørsforhold. Altså er folk fra Jylland f.eks. mere tilbøjeligt til at stemme på Venstre end resten af landet? Vi vil vise metoden med udgangspunkt i en undersøgelse af yndlingskage for elever på Niels Brock. I dette afsnit vil vi

primært fokusere på **hvordan** man gør, og så kommer der forklaringer og detaljer i næste afsnit.

Observerede værdier

Udgangspunktet for at lave en chi i anden-test er nogle observerede værdier. I forhold til vores undersøgelse om yndlingskage ser de således ud:

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	13	5	18
Chokoladekage	14	11	25
Andet	6	6	12
Total	33	22	55

Tabel 17.1: Observerede værdier

Fastlæggelse af signifikansniveau

Først skal vi fastlægge *signifikansniveauet* α . Vi lærte også om signifikansniveauer da vi lærte om konfidensintervaller, men vi vil ikke lave nogen forbindelse til den betydning, det havde der. Ligesom ved konfidensintervaller er det et tal mellem 0 og 1 typiske opgivet i procent. Har man ikke fået andet at vide, vælger man $\alpha = 5\%$, så det gør vi også her.

Opstilling af hypoteser

Vi skal nu opstille hypoteser. Vi vil gerne finde ud af om der er uafhængighed mellem køn og kage, og det formulerer vi i følgende to hypoteser.

H_0 : Der er uafhængighed mellem køn og yndlingskage

H_1 : Der er ikke uafhængighed mellem køn og yndlingskage.

Hypotesen H_0 kaldes *nulhypotesen* og H_1 kaldes den *alternative hypotese*. I uafhængighedstest har hypoteserne altid denne form bare med andre kategorier end køn og yndlingskage.

Beregning af forventede værdier

På baggrund af H_0 opstiller vi nu de forventede værdier. Dvs. det ville forventes at observere, hvis H_0 var sand. Vi bruger følgende formel:

$$\frac{\text{rækkesum} \cdot \text{søjlesum}}{\text{totalsum}}$$

Vi kan f.eks. beregne det forventede antal drenge, som bedst kan lide chokoladekage. Vi finder først det felt med drenge og chokoladekage (markeret med gult). Herfra aflæser vi rækkesum (grøn), søjlesum (blå) og totalsum (rød):

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	13	5	18
Chokoladekage	14	11	25
Andet	6	6	12
Total	33	22	55

Vi får:

$$\frac{\text{rækkesum} \cdot \text{søjlesum}}{\text{totalsum}} = \frac{25 \cdot 33}{55} = 15.$$

Vi regner resten af de forventede værdier og får:

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	10,8	7,2	18
Chokoladekage	15	10	25
Andet	7,2	4,8	12
Total	33	22	55

Tabel 17.2: Forventede værdier

Som tommelfingerregel skal der være minimum 5 i hver af de forventede værdier. Vi har en forventet værdi på 4,8, så det er lige i underkanten, men da de 5 kun er et pejlemærke fortsætter vi alligevel.

Bestemmes af χ^2 -teststørrelse

I næste skridt skal vi undersøge hvor stor forskellen er på de forventede og de observerede værdier. Denne forskel udtrykker vi i det vi kalder χ^2 -teststørrelsen (eller bare teststørrelsen) som betegnes χ^2 . Den regnes ud med brøken:

$$\frac{(\text{observeret hyppighed} - \text{forventet hyppighed})^2}{\text{forventet hyppighed}}.$$

Brøken skal regnes for hvert par af observerede og forventede værdier og så skal vi lægge det hele sammen. Vi får:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(13 - 10,8)^2}{10,8} + \frac{(5 - 7,2)^2}{7,2} + \frac{(14 - 15)^2}{15} \\ &+ \frac{(11 - 10)^2}{10} + \frac{(6 - 7,2)^2}{7,2} + \frac{(6 - 4,8)^2}{4,8} \\ &= 1,79\end{aligned}$$

Bestemmelse af p -værdi

Nu mangler vi bare at finde ud af om vores teststørrelse er så stor, at vi ikke længere tror på H_0 . For at kunne svare på det skal vi først bestemme dets som kaldes *antallet af frihedsgrader* f . Det gør vi med formlen:

$$f = (\text{antal rækker} - 1)(\text{antal søjler} - 1).$$

I vores tilfælde bliver antallet af frihedsgrader altså

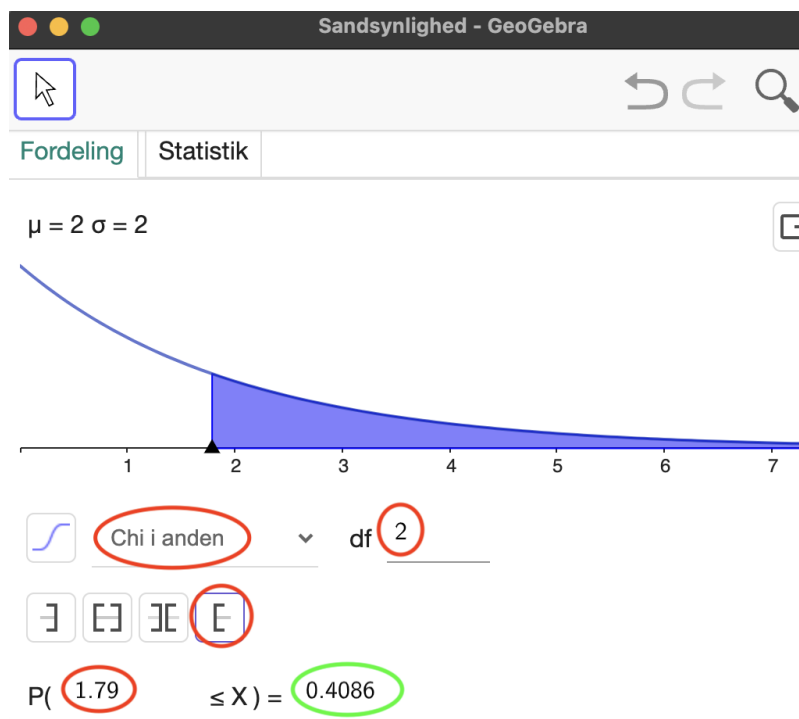
$$f = (3 - 1)(2 - 1) = 2.$$

Antallet af frihedsgrader betegnes nogle steder (GeoGebra f.eks.) med df (står for *degrees of freedom*).

Ud fra antallet af frihedsgrader kan vi omsætte vores teststørrelse til en sandsynlighed i GeoGebras sandsynlighedslommeregner. Til ethvert antal frihedsgrader findes nemlig en sandsynlighedsfordeling, kaldet en χ^2 -fordeling, og her skal vi bestemme sandsynligheden

$$P(X \geq \chi^2)$$

Vi havde $\chi^2 = 1,79$, så vi skal altså bestemme $P(X \geq 1,79)$:



Som det ses i screenshottet har vi valgt "Chi i anden" som fordeling, indtastet frihedsgraderne ud fra "df" og indtastet teststørrelsen. Vi ser at $P(X \geq 1,79) = 0,41$. Denne sandsynlighed kaldes p -værdien. Vi har altså at

$$p = 0,41 = 41\%$$

Løst sagt udtrykker p -værdien hvor sandsynlige vores observationer er, hvis H_0 er rigtig.

Konklusion

Vi skal nu sammenligne p -værdien med signifikansniveauet α . Der er to scenarier:

Hvis $p \leq \alpha$	Vi forkaster H_0 . Dette betyder, at der er tilpas stor forskel på de observerede og forventede værdier til, at vi ikke længere kan tro på H_0 . Det får os til at tro mest på H_1 .
Hvis $p > \alpha$	Vi forkaster ikke H_0 . Dette betyder, at forskellen mellem observerede og forventede værdier, ikke er tilstrækkelig stor til at afvise H_0 . Dette opfatter vi som en bekræftelse af H_0 .

I vores tilfælde er $p = 0,41 = 41\%$ og $\alpha = 5\%$ så $p > \alpha$, og vi kan dermed ikke forkaste H_0 . Da H_0 var uafhængighed mellem køn og yndlingskage kan vi konkludere:

Vi har undersøgt om der er uafhængighed mellem køn og yndlingskage. På baggrund af de indsamlede data konkluderer vi, at det godt kan være tilfældet.

Havde $p < \alpha$ ville konklusionen have været, at der var afhængighed (dvs. sammenhæng) mellem køn og yndlingskage.

Det er vigtigt at påpege, at vi aldrig beviser H_0 eller H_1 . Det er mere et spørgsmål om, hvilken en vi tror på.

Øvelse 17.1.1

En gruppe elever lavede i 2014 en undersøgelse i på skolen, hvor de spurgte til om man var til Carlsberg eller Tuborg. Resultatet ses her:

	Kvinde	Mand
Carlsberg	7	7
Tuborg	7	8

Du skal nu lave en χ^2 -test hvor I undersøger, med et 5% signifikansniveau, om der er sammenhæng mellem køn og yndlingsøl. Du skal altså:

- Opstille nulhypotesen og den alternative hypotese.
- Beregne de forventede værdier.
- Afgøre om vi har nok data til at gennemføre en χ^2 -test.
- Bestemme teststørrelsen.
- Bestemme antallet af frihedsgrader.
- Bestemme p -værdien.
- Afgøre om vi skal forkaste nulhypotesen.
- Afgør om der er sammenhæng mellem køn og yndlingsøl.
- Når du kigger på de observerede hyppigheder er du så overrasket over testens resultat?

Ekstra

Man kan skrive (formlerne for) de forskellige størrelser mere præcist, hvis man ikke er bange for indeks og summationstegn.

Generelt ser en tabel over observerede værdier sådan her ud:

	Søjle 1	Søjle 2	...	sum
Række 1	O_{11}	O_{12}	...	$O_{1\bullet}$
Række 2	O_{21}	O_{22}		$O_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
sum	$O_{\bullet 1}$	$O_{\bullet 2}$	...	n

Vi betegner rækkeenumre med i og søjlenumrene med j , og har vi en observeret værdi i den i 'te række og j 'te søjle, betegner vi den med O_{ij} .

Den i 'te rækkesum kan skrives med formlen:

$$O_{i\bullet} = \sum_j O_{ij}$$

Her betyder $\sum_j$ at vi skal have et led for hver værdi af j , som er de mulige søjlenumre.

Vi kan tilsvarende skrive den j 'te søjlesum med formlen:

$$O_{\bullet j} = \sum_i O_{ij}$$

Lægger vi alle de observerede værdier sammen, får vi selvfølgelig stikprøvestørrelsen n :

$$n = \sum_{ij} O_{ij}$$

Her betyder $\sum_{ij}$ at vi skal have et led for hver mulig kombination af i og j , dvs. et led for hver observeret værdi.

De forventede værdier for række i og søjle j betegnes med E_{ij} , og dens formel kan selvfølgelig opskrives som:

$$E_{ij} = \frac{O_{i\bullet} \cdot O_{\bullet j}}{n}$$

Teststørrelsen får formlen:

$$\chi^2 = \sum_{ij} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Jeg anbefaler at bruge ovenstående notation, hvis man kan finde ud af det.

Øvelse 17.1.2

Med udgangspunkt i yndlingskagetesten skal du svare på følgende spørgsmål.

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	13	5	18
Chokoladekage	14	11	25
Andet	6	6	12
Total	33	22	55

Observerede værdier

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	10,8	7,2	18
Chokoladekage	15	10	25
Andet	7,2	4,8	12
Total	33	22	55

Forventede værdier

- a) Hvad er O_{21} ?
- b) Hvad er E_{32} ?
- c) Hvad er n ?
- d) Opskriv, med indeks og sumnotation, beregningen for søjlesummen for søjle 2 for de observerede værdier.
- e) Opskriv beregningen for den forventede værdi for piger som foretrækker drømmekage. Skriv med indeksnotation.
- f) Opskriv beregningen for teststørrelsen med indeks og sumnotation. Du behøver ikke opskrive alle leddene.

17.2 Forklaringer og detaljer for chi i anden-test

I sidste afsnit kiggede vi på hvordan man gennemførte en χ^2 -test for uafhængighed. Konkret fandt vi ud af, om der var afhængighed mellem køn og yndlingskage. Vi vil nu se på lidt flere detaljer og forklaringer til de forskellige skridt.

Hypoteser

Sådan som vores χ^2 -test er skruet sammen, er nulhypotesen altid ”uafhængighed”. Men man kan formulere den på forskellige måder. Man kan f.eks. skrive ”Der er uafhængighed mellem...” eller ”Der er ingen sammenhæng imellem...”. Det er det samme. Den alternative hypotese er altid ”ikke uafhængighed” eller ”sammenhæng”.

Forventede værdier

Formlen for de forventede værdier er:

$$\frac{\text{rækkesum} \cdot \text{søjlesum}}{\text{totalsum}}$$

Vi vil forklare formelen med udgangspunkt i drenge, som fortrækker chokoladekage. Vi har tabellen med observerede værdier.

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	13	5	18
Chokoladekage	14	11	25
Andet	6	6	12
Total	33	22	55

Andelen af personer i undersøgelsen, som fortrækker chokoladekage, er givet ved $\frac{25}{55}$. Hvis H_0 er rigtig (uafhængighed mellem køn og kage), må andelen af drenge som fortrækker chokoladekage være den samme som andelen for de to køn tilsammen. Dvs. andelen af drenge som fortrækker chokoladekage må også være $\frac{25}{55}$. Da der er 33 drenge, vil vi forvente, at antallet af drenge i stikprøven, som fortrækker chokoladekage, er:

$$\frac{25}{55} \cdot 33 = \frac{25 \cdot 33}{55} = \frac{\text{rækkesum} \cdot \text{søjlesum}}{\text{totalsum}}$$

Øvelse 17.2.1

- a) Gentag ovenstående argumentation, men for piger som foretrækker drømmekage i stedet:

Årsagen til at vi kræver minimum 5 i hver af de forventede værdier, har noget at gøre med de χ^2 -fordelinger, vi bruger til at finde p -værdien. Teststørrelsen følger kun tilnærmelsesvis disse fordelinger, og er stikprøven lille, bliver p -værdien upræcis.

Teststørrelsen

Man regner teststørrelsen ved at regne:

$$\frac{(\text{observeret hyppighed} - \text{forventet hyppighed})^2}{\text{forventet hyppighed}}$$

Udtrykket skal regnes for hver celle i tabellen.

Øvelse 17.2.2

Kig på formlen for teststørrelsen.

- a) Argumenter for at en stor teststørrelse svarer til stor forskel på de observerede og de forventede værdier.

Signifikansniveau og p -værdier

Når vi laver en chi i anden-test, undersøger vi om de observerede værdier svarer de forventede værdier. Men fordi de observerede værdier kun udgør en stikprøve, kan vi ikke regne med at de svarer fuldstændig til de forventede. Det kan jo være, vi f.eks. har fanget særligt mange drenge, som elsker drømmekage. Derfor kan man ikke forkaste H_0 , bare fordi de observerede værdier ikke svarer helt til de forventede. Det er kun når det ser meget skævt ud, at vi forkaster H_0 . Vi bruger p -værdien til at fastlægge, hvor skæve vores observerede værdier er i forhold til de forventede. Denne værdi findes i GeoGebra ved at bestemme:

$$P(X \geq \chi^2)$$

Vi skal nu se på hvad den sandsynlighed udtrykker helt præcis. Lad os sige at vi tester en sand H_0 flere gange. Dvs. vi laver flere stikprøver. Hver gang vil vi få en lidt forskellig teststørrelse, da vi må forvente lidt variation, alt efter hvad stikprøven lige består af. Men hvis H_0 er sand, vil vi ikke forvente en meget stor

teststørrelse. Når vi åbner χ^2 -fordelingen i GeoGebra ser vi den fordeling, der beskriver sandsynligheden få forskellige værdier for teststørrelsen. Sandsynligheden $P(X \geq \chi^2)$ er altså sandsynligheden for at få en teststørrelse der er større end eller lige så stor som den vi har, hvis vi gik ud og lavede den samme χ^2 -test, men på en ny stikprøve. Så vi kan altså beskrive p -værdien på følgende måde:

Tallet p -værdien er sandsynligheden for at få en teststørrelse, som er ligeså stor eller endnu større end den vi har fået, under forudsætning af at H_0 er sand.

Hvis vi får en p -værdi på 2%, betyder det altså at det kun er i 2% af stikprøverne, at man vil få ligeså skæve observerede værdier som dem vi har fået i undersøgelsen (under forudsætning af at H_0 er sand). Hvis det kun er i 2% af tilfældene, man vil få ligeså skæve observerede værdier, som dem vi har fået i undersøgelsen, kan vi så stadig tro på H_0 ? Hvor skal vi sætte grænsen for, hvor usandsynlige vores observerede værdier må være? Den grænse fastlægges med signifikansniveauet, som normalt vælges til 5%.

Vi kender begrebet ”signifikant” fra daglig tale, hvor det betyder ”meget” eller ”betydelig”. I statistik er betydningen lidt anderledes. Når vi forkaster H_0 , så siger vi, at der er en *signifikant* sammenhæng, mens vi snakker om *ikke signifikante* sammenhænge i det tilfælde vi konstatere forskelle på observerede og forventede værdier, som ikke er store nok til at vi forkaster H_0 . Så her betyder signifikant altså, at der er en sammenhæng, som med rimelig sandsynlighed ikke skyldes en tilfældighed ved udtagelsen af stikprøven.

Type 1 og type 2 fejl

Når vi vælger signifikansniveauet, er vi i et dilemma. Vælger vi det meget lavt, så skal der meget til før, at vi forkaster H_0 . Så selvom vores observerede værdier er meget skæve i forhold til de forventede, så forkaster vi ikke H_0 . Undlader vi at forkaste en nulhypotese, som rent faktisk er falsk, siges det at være en *type 2 fejl*.

Vælger vi signifikansniveauet højt, virker det omvendt. Så vil vi have en tendens til at forkaste H_0 , selvom de observerede værdier ikke afviger specielt meget fra de forventede. Dvs. vi risikere at forkaste en sand H_0 . Gør vi det, kaldes det en *type 1 fejl*.

Usandsynlige observerede værdier kan fremkomme på to måder. Det kan være fordi H_0 er forkert, eller fordi vi bare har været uheldige med stikprøven. Matematikken kan ikke hjælpe os til at afgøre, hvilken en af situationerne vi er i. Hvis vi vælger $\alpha = 5\%$, betyder det, at vi forkaster H_0 , når de observerede værdier er så skæve,

at det kun sker i 5% af tilfældene, hvor H_0 er sand. Men det må jo medføre at der er en 5% risiko for at vi forkaster en sand H_0 – altså at lave en type 1 fejl. Så signifikansniveauet er sandsynligheden for at begå en type 1 fejl (når H_0 er sand).

Øvelse 17.2.3

Antag at vi laver en χ^2 -test med et signifikansniveau på 10%.

- Antag at H_0 er sand. Hvad er sandsynligheden for at begå en fejl af type 1?
- Antag at H_0 er falsk. Hvad er sandsynligheden for at begå en fejl af type 2? Tænk lidt over det og tjek så facit.

Antallet af frihedsgrader

Antallet af frihedsgrader er det antal af observerede værdier, vi skal kende for at kunne regne resten af de observerede værdier ud. Lad os se på et eksempel:

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	13		18
Chokoladekage	14	11	25
Andet	6	6	12
Total	33	22	55

Det ses at jeg har fjernet observationen med antallet af piger som valgte drømmekage. Men den information kan vi genskabe, da vi ved at der var 18 personer som valgte drømmekage og 13 af dem var drenge. Vi regner:

$$18 - 13 = 5$$

Altså skal der stå 5 i det tomme felt. Det er klart at der er flere observationer som kan slettes og derefter genskabes. Vi kan faktisk slette hele den sidste række og hele den sidste sølje.

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	13		18
Chokoladekage	14		25
Andet			12
Total	33	22	55

Øvelse 17.2.4

Beregn ud fra ovenstående tabel:

- Antallet af piger som valgte chokoladekage.
- Antallet af drenge som valgte andet.

Det er klart, at når vi har slettet en række og en søjle, så kan vi ikke slette mere uden at miste muligheden for at genskabe de slettede værdier. Antallet af værdier der er tilbage efter vi har slette en række og en søjle må være

$$(\text{antal rækker} - 1)(\text{antal søjler} - 1)$$

hvilket jo er formelen for antallet af frihedsgrader.

Øvelse 17.2.5

Antallet af værdier, der er tilbage, efter vi har slette en række og en søjle er

$$(\text{antal rækker} - 1)(\text{antal søjler} - 1).$$

- Forklar hvorfor.

Årsagen til at det hedder ”frihedsgrader” er, at værdierne i de felter der er tilbage er ”frie” i den forstand, at de ikke er fastlagt ud fra resten.

Kritiske værdier

I en χ^2 -test regner vi χ^2 som et mål for størrelsen af afvigelsen mellem det forventede og det observerede. Er afvigelsen for stor forkaster vi. Indtil videre har vi afgjort dette ved at sammenligne p -værdien med signifikansniveauet. Dette kræver dog et værktøj til at finde p -værdien. Har man ikke sådan et værktøj er der en anden mulighed, nemlig at lave en tabel som viser hvor stor χ^2 må være før vi

forkaster - disse værdier kaldes *kritiske værdier*. Et udsnit af en sådan tabel ses nedenunder:

df	$\chi^2_{0,90}$	$\chi^2_{0,95}$	$\chi^2_{0,99}$
1	2,71	3,84	6,63
2	4,61	5,99	9,21
3	6,25	7,81	11,34

Tabel 17.3: Tabel med kritiske værdier. I første søjle har vi frihedsgraderne og de tre næste søjler viser de kritiske værdier for hhv. $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ og $\alpha = 1\%$.

Eksempel 17.2.1

Antag, at vi er ved at lave en χ^2 -test med et signifikansniveau på 1%, med 2 frihedsgrader og vi har fået $\chi^2 = 5,13$. Vi finder nu den kritiske værdi svarende til $\alpha = 1\%$. Vi kigger i den sidste søjle og ser at $\chi^2_{0,99} = 9,21$. For at finde ud af om vi skal forkaste, skal vi sammenligne med $\chi^2 = 5,13$ med $\chi^2_{0,99} = 9,21$. Da vores χ^2 -værdi er mindre end den kritiske værdi vil vi **ikke** forkaste H_0 .

Læg mærke til at det fungerer omvendt i forhold til p -værdi. Vi forkaster, når p -værdien er **under** signifikansniveauet, mens at teststørrelsen skal være **over** den kritiske værdi, før vi forkaster.

Øvelse 17.2.6

Antag, at vi er ved at lave en χ^2 -test et signifikansniveau på 5% med 3 frihedsgrader og vi har fået $\chi^2 = 8$.

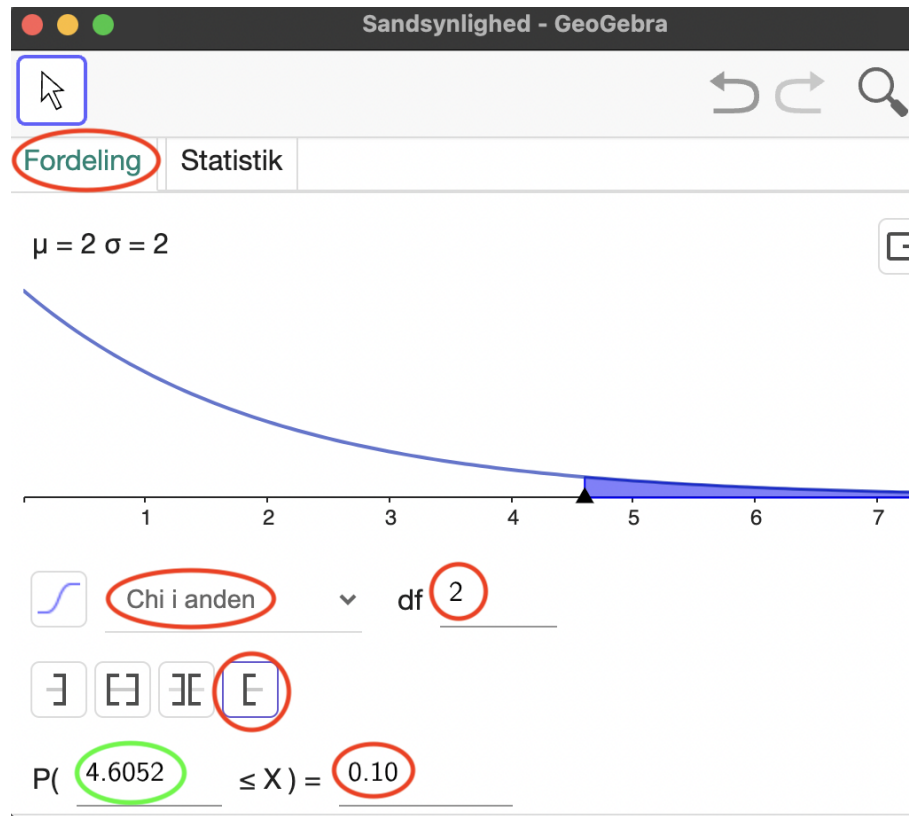
a) Afgør om vi skal forkaste H_0 .

Vi vil nu forklare hvor de kritiske værdier i tabellen kommer fra. Fra tidligere ved vi, at vi forkaster hvis p -værdien er mindre end eller lig med signifikansniveauet. Derfor kan vi finde de kritiske værdier ved at finde den χ^2 -værdi som giver en p -værdi, der er lig med signifikansniveauet, da den vil markere grænsen, hvor vi forkaster.

Eksempel 17.2.2

Vi vil nu eftervise at det er rigtigt, at hvis signifikansniveauet er på 10% i en test med 2 frihedsgrader, så vil vi have en kritisk værdi på 4,61. Vi åbner sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra, finder χ^2 -fordelingen og indskraver

antallet af frihedsgrader og signifikansniveauet der hvor vi normalt aflæser p -værdien:



Vi kan se, at den χ^2 -værdi som svare til et signifikansniveau på 10% er 4,61.

Øvelse 17.2.7

- Bestem den kritiske værdi for en χ^2 -test med 6 frihedsgrader og et signifikansniveau på 5%.

Man kan undre sig lidt over betegnelsen for de kritiske værdier. Hvorfor skriver vi f.eks. $\chi^2_{0,95}$ for den kritiske værdi, når signifikansniveauet er på 5%. For et signifikansniveau på 5% er den kritiske værdi χ^2_{kritisk} den χ^2 -værdi, hvor $P(X \geq \chi^2_{\text{kritisk}}) = 5\%$. Men dette er jo det samme som den χ^2 -værdi, hvor $P(X \leq \chi^2_{\text{kritisk}}) = 95\%$, hvilket er det vi kalder 0,95-fraktilen og betegner med $\chi^2_{0,95}$.

Øvelse 17.2.8

- Hvordan betegnes den kritiske værdi når signifikansniveauet er på 7%?

Bidrag til teststørrelsen

I en χ^2 -test for uafhængighed undersøger vi om stikprøven er i overensstemmelse med H_0 . Altså om vi skal forkaste H_0 . Det er dog også interessant *hvordan* stikprøven afviger fra H_0 . Lad os sige, at vi tester om der er sammenhæng mellem køn og politisk overbevisning (stemmer rødt eller blå). Her er det ikke kun interessant om der er en forskel, men også i hvilken retning den er. Har kvinder en højere tilbøjelighed til at stemme rødt end mænd? Eller er det mon omvendt?

Vi vender tilbage til undersøgelsen med sammenhæng mellem køn og kage:

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	13	5	18
Chokoladekage	14	11	25
Andet	6	6	12
Total	33	22	55

Udregningen af teststørrelsen var:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(13 - 10,8)^2}{10,8} + \frac{(5 - 7,2)^2}{7,2} + \frac{(14 - 15)^2}{15} \\ &+ \frac{(11 - 10)^2}{10} + \frac{(6 - 7,2)^2}{7,2} + \frac{(6 - 4,8)^2}{4,8} \\ &= 1,79\end{aligned}$$

De enkelte led kaldes *bidragene til teststørrelsen*. Første bidrag er altså:

$$\frac{(13 - 10,8)^2}{10,8} = 0,45$$

Vi regner nu resten af bidragene i en tabel:

	Dreng	Pige
Drømmekage	0,45	0,67
Chokoladekage	0,067	0,1
Andet	0,2	0,3

Vi ser nu at de største bidrag kommer fra drømmekage. Specielt piger og drømmekage. Vi har observeret at der er 5 piger som fortrækker drømmekage, men da vi regnede de forventede værdier fandt vi at resultatet var 7,2. Det er jo ikke en særlig stor forskel, og vi endte jo også at beholde H_0 . Så vi kan sige at den største afvigelse fra H_0 var pigernes manglende lyst til at spise drømmekage, men at denne forskel ikke var signifikant.

Øvelse 17.2.9

En matematiklærer undersøgte i 2022, hvordan det så ud med fritidsaktiviteter på de forskellige årgange på de gymnasiale uddannelser i Danmark. Tre gymnasieklasser (business-science, Niels Brock, HHX), en på hver årgang, blev stillet spørgsmålet:

Går du til en fritidsaktivitet som f.eks. fodbold, guitar eller porcelænsmaling?

Resultatet var

	Går til noget	Går ikke til noget	Total
1. år	15	15	30
2. år	8	7	15
3. år	4	12	16
Total	27	34	61

Undersøg med et signifikansniveau på 5% om der er sammenhæng mellem årgang og tendens til at gå til fritidsaktiviteter. Du skal gøre det **uden at anvende GeoGebra**. Hvis der er en sammenhæng, så undersøg hvordan sammenhængen er. Altså, du skal lave en χ^2 -test hvor du skal:

- Opstille hypoteser.
- Regne forventede værdier.
- Regne teststørrelsen
- Bestemme antallet af frihedsgrader
- Afgøre om H_0 skal forkastes ud fra de kritiske værdier.
- Analysere bidragene til teststørrelsen i sammenhæng med de observerede og forventede værdier.
- Skriv en konklusion af din undersøgelse. Hvad har du undersøgt og hvad er du nået frem til. Det skal fylde et par linjer.

Man kunne godt undre sig over resultatet af ovenstående øvelse. Kigger man på de observerede værdier ser det ud til at der er en markant tilbagegang i andelen af elever som dyrker fritidsaktiviteter når de når til 3. år. Hvorfor ender vi så alligevel med at beholde H_0 ? Det skyldes at det er relativt få elever der skaber den tilsyneladende store ændring på 3. år. Vi skal kun flytte 4 (ud af de 61) elever

i undersøgelsen og så har vi en ca. 50/50 fordeling på alle tre årgang. Det kunne jo sagtens være en tilfældighed, at de bare var lidt mere dovne, i den klasse vi har spurgt (sorry 3.s 2022). Det ville være smart at lave en undersøgelse med nogle flere klasser, men det er jeg desværre for doven til.

17.3 Chi i anden-test med Excel og GeoGebra

I de forgående afsnit har vi taget udgangspunkt i følgende tabel over observerede værdier:

	Dreng	Pige	Total
Drømmekage	13	5	18
Chokoladekage	14	11	25
Andet	6	6	12
Total	33	22	55

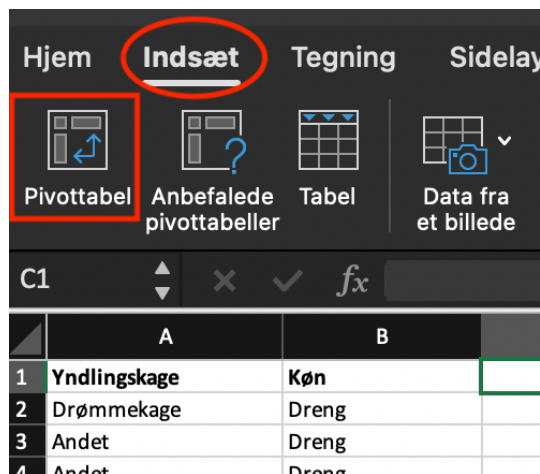
En sådan tabel kaldes en pivottabel og vi skal først se på hvordan man opstiller den ud fra rå data.

Pivottabeller i Excel

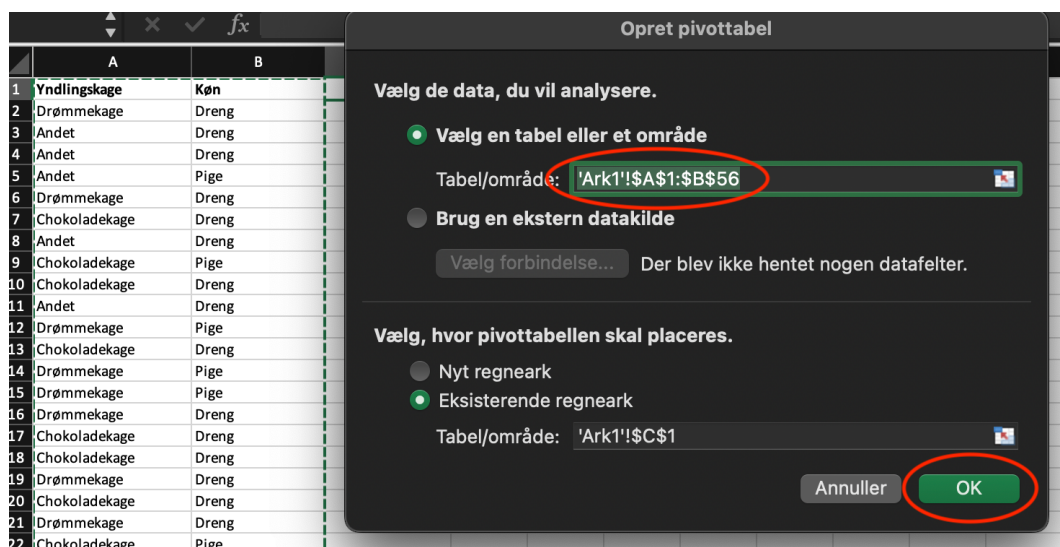
Normal tager vi udgangspunkt i data som er i rå form. I forhold til kagetesten kunne det se sådan ud:

	A	B
1	Yndlingskage	Køn
2	Drømmekage	Dreng
3	Andet	Dreng
4	Andet	Dreng
5	Andet	Pige
6	Drømmekage	Dreng
7	Chokoladekage	Dreng
8	Andet	Dreng
9	Chokoladekage	Pige
10	Chokoladekage	Dreng
11	Andet	Dreng
12	Drømmekage	Pige

Typisk har vi mange hundrede af observationer, så det er ikke praktisk at tælle dem op en ad gangen. I stedet får vi Excel til at lave en pivottabel for os.



Min var allerede indstillet korrekt, men her skal I vælge data. I skal bare vælge det hele (inklusive titlerne på søjlerne):



Så er det tid til drag and drop.

Hvis du vil oprette en rapport, skal du vælge felter på listen for pivottabelfeltet

Og vi har vores tabel:

Chi i anden-test i GeoGebra

Vi er nu klar til at lave chi i anden-test I GeoGebra. Det er nemt. Vi åbner sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra, vælger statistik, vælger "Chi²-Test" og indtaster de observerede værdier:

Fordeling **Statistik**

Chi² Test

Rækker **3**

Søjler **2**

☐ Række % ☐ Søjle % ☐ Forventet antal ☐ X² bidrag

	Dreng	Pige
Drømmekage	13	5
Chokoladekage	14	11
Andet	6	6
	33	22

Resultat

Chi² Test

df	2
X²	1.787
P	0.4092

Vi ser (markeret med grønt), at der er 2 frihedsgrader, $\chi^2 = 1,79$ og $p = 0,41$. Vi holder lige øje med de totaler værdier (her altså 33 og 22), så vi kan se at vi har tastet rigtigt.

Vi kan også finde de forventede værdier:

☐ Række % ☐ Søjle % ☒ Forventet antal ☐ X² bidrag

	Dreng	Pige
Drømmekage	13 10.8	5 7.2
Chokoladekage	14 15	11 10
Andet	6 7.2	6 4.8
	33	22

...og bidragene til χ^2 -teststørrelsen:

☐ Række %
 ☐ Søjle %
 ☐ Forventet antal
☒ χ^2 bidrag

	Dreng	Pige
Drømmekage	13 0.4481	5 0.6722
Chokoladekage	14 0.0667	11 0.1
Andet	6 0.2	6 0.3
	33	22

Øvelse 17.3.1

Disclaimer: Følgende er en tænkt situation.

En ridelære havde lagt mærke til at der var nogle hestnavne var særligt populære i Danmark. For hopperne var det Beauty, Freja, Lady og Musse. Ridelæreren havde en mistanke om at ens alder måske kunne sige noget om, hvilke navne man bedst kunne lide. For at undersøge dette lavede hun en undersøgelse, hvor hun spurgte rideskolens medlemmer, hvilke af de 4 navne de bedst kunne lide.

Du skal nu vha. en χ^2 -test undersøge om der er nogen sammenhæng mellem alder (junior, ungdom og senior) og yndlingsnavn. Brug $\alpha = 5\%$ og regn det hele i Excel og GeoGebra.

Data kan ses her [her](#)

- Opstil hypoteser
- Lav en pivottabel
- Bestem de forventede værdier
- Bestem bidragene til teststørrelsen.
- Bestem antallet af frihedsgrader, teststørrelsen og p -værdien.
- Afgør om vi skal forkaste H_0 .
- Afgør om der er sammenhæng mellem holding til navn og alderskategori.
- Forklar mere om sammenhængen mellem holdning navn og alderskategori. Tag udgangspunkt i bidragene til χ^2 -teststørrelsen og ud fra dem så sammenlign de observerede og de forventede værdier.

Facitliste

Løsning 1.1.1

- a) $4 + 5 \cdot 2 = 4 + 10 = 14$
- b) $7 - 2 + 3 \cdot 2 - 5 = 7 - 2 + 6 - 5 = 6$
- c) $4 - \frac{6}{3} + 2 = 4 - 2 + 2 = 4$

Løsning 1.1.2

- a) $3 \cdot \frac{10-2}{6-4} + 2 = 3 \cdot \frac{8}{2} + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$
- b) $\frac{8}{8-4} + 7 = \frac{8}{4} + 7 = 2 + 7 = 9$
- c) $2 + \frac{3 \cdot 5 + 5}{4} - 2 \cdot 3 = 2 + \frac{20}{4} - 2 \cdot 3 = 2 + 5 - 6 = 1$

Løsning 1.1.3

- a) $\frac{7}{7} = 1$
- b) Kan ikke regnes. Man kan ikke dele med 0
- c) $\frac{27}{9} = 3$
- d) $\frac{0}{89} = 0$
- e) $\frac{3}{0,25} = 12$

Løsning 1.1.4

- a) $-3 \cdot 2 = -6$
- b) $7 \cdot (-2) = -14$
- c) $-3 \cdot (-5) = 15$
- d) $\frac{6}{-3} = -2$

e) $-4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16$

f) $\frac{-4}{-2} = 2$

g) $\frac{-4}{2} - 3 = -2 - 3 = -5$

h) $-2 \cdot \frac{-4}{-1} = -2 \cdot 4 = -8$

i) $\frac{-1 \cdot (-6)}{3} \cdot (-2) = \frac{6}{3} \cdot (-2) = 2 \cdot (-2) = -4$

j) $\frac{-5}{0}$ kan ikke regnes. Hvorfor?

Løsning 1.1.5

a) $4^2 = 16$

b) $2^3 = 8$

c) $3^1 = 3$

d) $2 \cdot 5^2 + 5 = 2 \cdot 25 + 5 = 55$

Løsning 1.1.6

a) $\sqrt{9} = 3$

b) $\sqrt{4} = 2$

c) $\sqrt{1} = 1$

d) Det kan man ikke.

e) $\sqrt{0} = 0$

Løsning 1.1.7

a) $\sqrt[2]{25} = 5$

b) $\sqrt[3]{0} = 0$

c) $\sqrt[3]{27} = 3$

d) $\sqrt[4]{16} = 2$

e) $\sqrt[100]{1} = 1$

Løsning 1.1.8

a) "Den femte rod af 7". HUSK DET! Der er mange som siger det forkert.

Løsning 1.1.9

a) $3^2 = 9$

b) $-3^2 = -9$

c) $(-3)^2 = 9$

d) $2 \cdot (5 - 3)^3 - \sqrt{4} = 14$

e) $\frac{(4-5)^2}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Løsning 1.1.10

a) $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$

b) $(-2)^2 = -2 \cdot (-2) = 4$

Løsning 1.1.11

a) $|-3| = 3$

b) $|2| = 2$

c) $|7(2 - 3)| = 7$

Løsning 1.1.12

a) $\frac{6}{21}$

b) $\frac{1}{3}$

Løsning 1.1.13

a) $\frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7}$

b) $\frac{3}{40} + \frac{2}{4} = \frac{23}{40}$

c) $\frac{5}{4} - \frac{3}{5} = \frac{13}{20}$

Løsning 1.1.14

a) $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$

b) $\frac{6}{5} \cdot 2 = \frac{12}{5}$

c) $\frac{\frac{3}{5}}{3} = \frac{1}{5}$

d) $\frac{5}{\frac{2}{3}} \cdot 4 = 30$

e) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5}$

Løsning 1.1.15

a) Spørg mig, hvis du er i tvivl.

Løsning 1.2.1

a) $b - a$

b) $3a$

c) 0

Løsning 1.2.2

a) $ab - b$

b) $2bc$

c) $3ab$

Løsning 1.2.3

a) $2(3 - 1) = 4$

b) $(5 + 2)3 = 21$

Løsning 1.2.4

a) $3(x + y) = 3x + 3y$

b) $(a - b)2 = 2a - 2b$

c) $2 + (x + y) - 3 = x + y - 1$

d) $-(v + w) = -v - w$

e) $a(2b + b) - ba - (2a - 2) = 2ab + ab - ba - 2a + 2 = 2ab - 2a + 2$

Løsning 1.2.5

a) $4x + 4 = 4(x + 1)$

b) $3x - 15 = 3(x - 5)$

Løsning 1.2.6

- a) $ab + 2b = b(a + 2)$
- b) $x^2 - 2x = x(x - 2)$
- c) $3x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(3x^2 - 2x + 1)$
- d) $abc + bcd + bcx = bc(a + b + x)$

Løsning 1.2.7

- a) Det er et produkt bestående af faktorerne 2, a og b .
- b) Det er en differens bestående af ledene a og ab . Det sidste led er et produkt bestående af faktorerne a og b .
- c) Det er en potens, hvor grundtallet er q og eksponenten p .

Løsning 1.2.8

- a) $\frac{ac+c}{bc}$
- b) $\frac{a}{c}$
- c) a
- d) $\frac{b+c-a^2}{2a+1}$

Løsning 1.2.9

- a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$
- c) $\frac{a}{b} - 2 = \frac{a-2b}{b}$
- d) $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Løsning 1.2.10

- a) $\frac{a+b}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2+ab}{bc}$
- b) $\frac{a+2}{b} \cdot a = \frac{a^2+2a}{b}$
- c) $\frac{\frac{2}{a}}{b} = \frac{2}{ab}$
- d) $\frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2$

e) $\frac{\frac{3+a}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{3+a}{a}$

f) $\frac{1}{\frac{1}{y}} = y$

Løsning 1.3.1

a) $K = \{-2, 7\}$

b) Nej

Løsning 1.3.2

a) Ja

b) Ja

c) Nej

Løsning 1.3.3

a) $[-2; 5]$

b) Ja

c) Ja

d) Nej

Løsning 1.3.4

a) $]7; 7,5[$

b) Nej

Løsning 1.3.5

a) $]1; 3[$ og det er åbent.

b) $[5; 9]$ og det er lukket.

c) $[2; 7[$ og det er halvbåbent.

Løsning 1.3.6

a) $[-3; 7]$.

b) $] - 2; \infty[$.

c) $] - \infty; 5]$.

Løsning 1.3.7

a) $A \cap B = \{2, 3\}$

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

c) $A \setminus B = \{1\}$

d) $B \setminus A = \{4\}$

e) Nej

f) Ja

Løsning 1.3.8

a) $] - \infty; 2[$

b) $[2; 5[$

c) $[-3; \infty[$

Løsning 1.4.1

a) $x = 2$ er en løsning.

b) $x = 2$ er ikke en løsning.

Løsning 1.4.2

a) $x = 1$

b) $x = 3$

c) $x = 2$

Løsning 1.4.3

a) $x = 5$

b) $x = -8$

c) $x = -3$

Løsning 1.4.4

a) $x = 2$

- b) $x = -12$
- c) $x = -3,5$
- d) Har ingen løsninger.
- e) $x = 0$
- f) Alle tal er løsning.

Løsning 1.4.5

- a) $L = \emptyset$
- b) $L = \{-6\}$
- c) $L = \mathbb{R}$

Løsning 1.4.6

- a) $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- b) $G = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- c) $G = [0; \infty[$
- d) $G = [-1; \infty[\setminus \{0\}$

Løsning 1.4.7

- a) $x = 2$ og $y = 4$
- b) $x = 0$ og $y = 3$

Løsning 1.4.8

- a) $x = 2$
- b) $x = 12$

Løsning 1.4.9

- a) $x = \frac{1}{2}$
- b) $x = -1$

Løsning 1.4.10

- a) $x = -4 \quad \vee \quad x = 4$

b) $x = 1 \quad \vee \quad x = 5$

c) $x = -\frac{4}{5} \quad \vee \quad x = 4$

d) Der er ingen løsninger.

Løsning 1.5.1

a) Falsk

b) Falsk

c) Sand

d) Sand

Løsning 1.5.2

a) $x \geq 3$

b) $x < -3$

c) $x > 12$

Løsning 1.5.3

a) $x \leq -7$

b) $x > -6$

c) $x \geq -5,5$

d) $x < 3$

e) $x \leq -2,25$

f) $x < -0,75$

Løsning 1.5.4

a) $x \geq -15$

b) $x > 3$

c) $x < 0$

Løsning 1.5.5

a) $2 < x < 6$

- b) $1 \leq x < 2$
- c) $100 \leq a \leq 600$
- d) $200 \leq b \leq 1200$

Løsning 1.5.6

- a) $]2; 6[$
- b) $[1; 2[$
- c) $[100; 600]$
- d) $[200; 1200]$

Løsning 1.6.1

- a) $(x + 4)^2 = x^2 + 16 + 8x$
- b) $(z - 1)^2 = z^2 + 1 - 2z$
- c) $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$

Løsning 1.6.2

- a) $x^2 + 5^2 - 2 \cdot 5x = (x - 5)^2$
- b) $x^2 + 1 + 2x = (x + 1)^2$
- c) $F^2 + 2bF + b^2 = (F + b)^2$

Løsning 1.7.1

- a) $\frac{2^9}{2^7} = 4$
- b) $13^0 = 1$
- c) $4^1 = 4$
- d) $10^{-2} = 0,01$
- e) $\frac{28^3}{14^3} = 8$
- f) $\frac{3^5 \cdot 3^9}{3^{12}} = 9$
- g) $9^{\frac{1}{2}} = 3$
- h) $\sqrt{16 \cdot 25} = 20$

Løsning 1.8.1

- a) Godt klaret.
- b) Klap på skulderen.
- c) Flot.

Løsning 1.8.2

a) $\frac{23^2+12^3}{4,7} = 480,21$

Løsning 1.8.3

- a) Der er to løsninger: $x = -1,54$ og $x = 4,54$.
- b) $x < 7,25$. Den giver $x < \frac{29}{4}$ og så må man selv regne $\frac{29}{4}$.

Løsning 1.8.4

- a) ...
- b) ...
- c) ...
- d) 2,7182...

Løsning 1.9.1

- a) Det bør se således ud (screenshot fra Word):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Løsning 1.9.2

- a) Eleven har ikke brugt "Indsæt ligning". Det er ikke nogen katastrofe, da det stadig er til at læse, men det er grimt! Her er, hvordan det skal se ud:

Jeg skal løse ligningen $2x + 1 = 0$ for at...

Kan du se forskellen?

Løsning 2.1.1

- a) Funktionen f knytter 10 til 5.
- b) $y = 8$
- c) Funktionsværdien er -6 (det er bare det samme som y -værdien).
- d) $x = 10$

Løsning 2.1.2

- a) $f(-7) = -14$ og $f(9) = 18$.
- b) "f af x og f af tre". Husk nu, at det er sådan det læses.

Løsning 2.1.3

- a) Funktionsværdien er 5.
- b) $g(6) = 11$, $g(x) = -1$ og $g(-1) = -3$.
- c) $x = 4$

Løsning 2.1.4

- a) $f(x) = 4x$
- b) $h(x) = x + 1$

Løsning 2.1.5

- a) $f(3) = 4$ og $f(-5) = 4$
- b) $g(-2) = 16$

Løsning 2.1.6

- a) $x = -3$
- b) $x = \frac{1}{3}$

Løsning 2.1.7

- a) Der er to løsninger: $x = 3$ og $x = -3$. Fandt du dem begge to? Nej, det tænkte jeg nok, men du er jo også kun lige startet på HHX, så det er vel begrænset, hvad jeg kan forvente. Du lærer at løse den slags ligninger (og nogle som er endnu sværere) i afsnittet om polynomier. Peace.

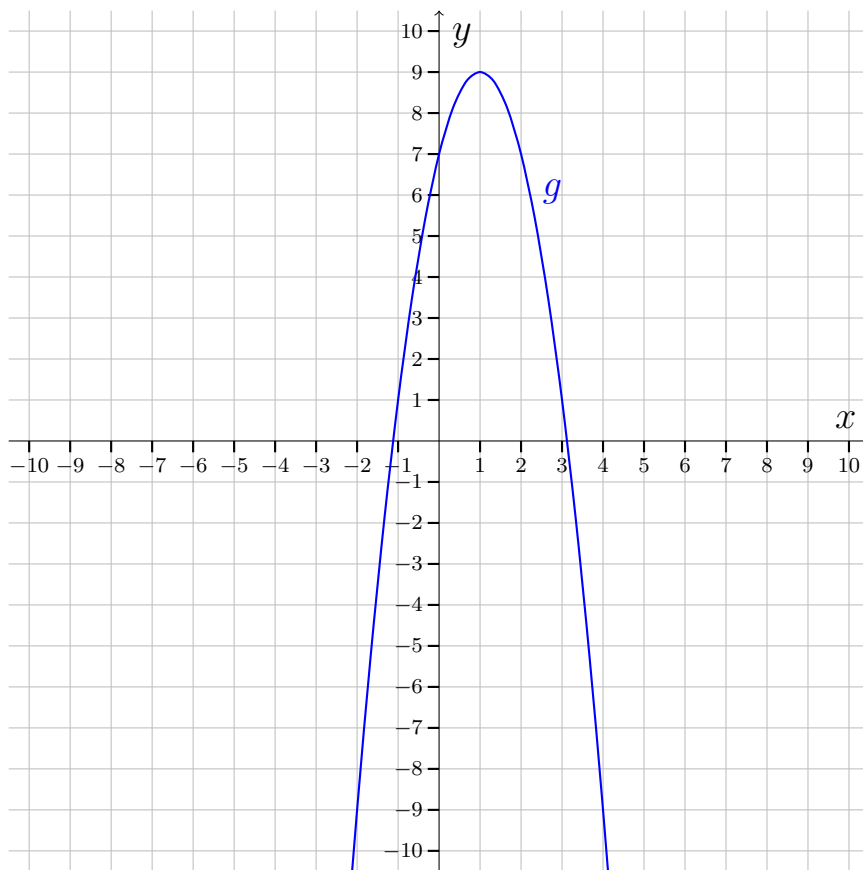
Løsning 2.2.1

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	-2	-8	-10	-8	-2	8

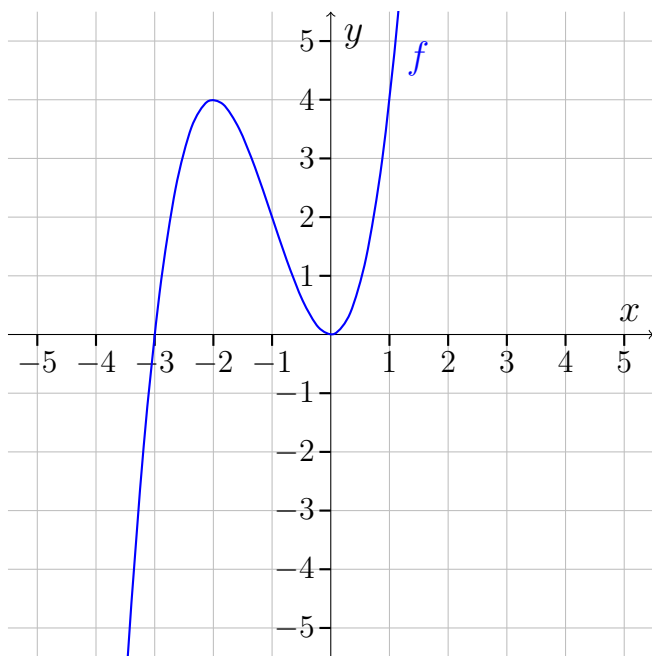
Løsning 2.2.2

a)



Løsning 2.2.3

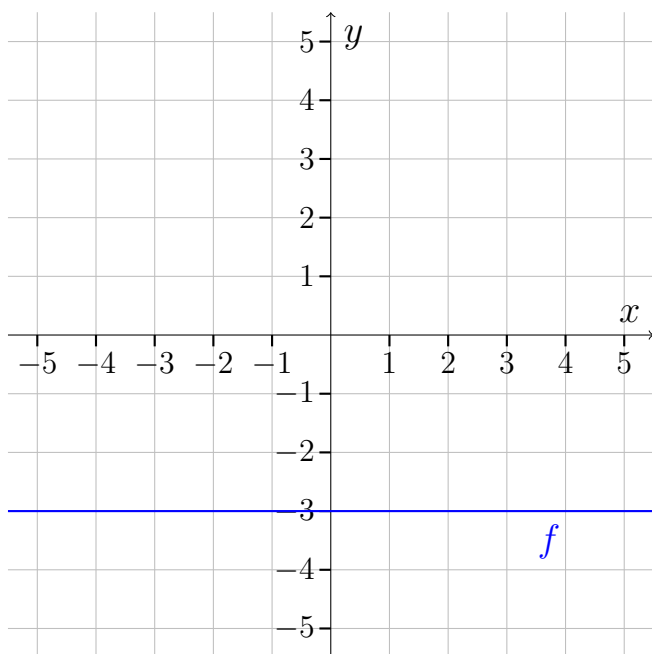
a)



Har du husket at buerne skal være runde og ikke spidse?

Løsning 2.2.4

a)

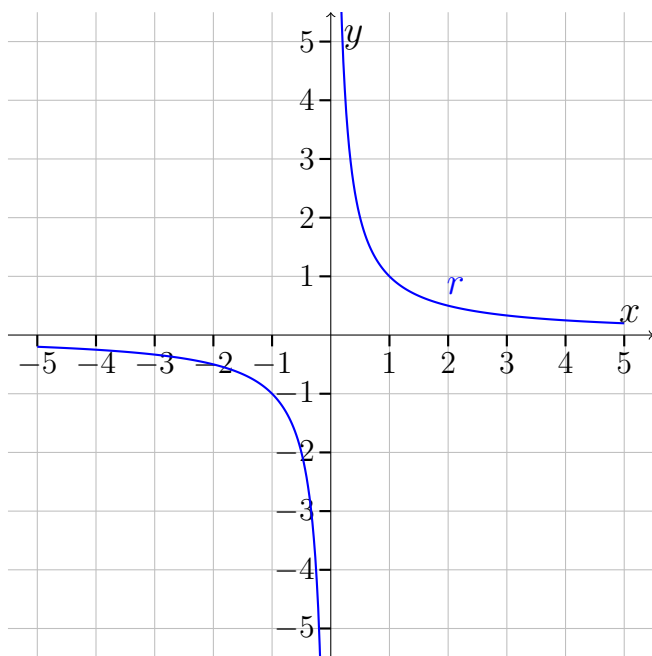


Løsning 2.2.5

a) Næh nej, det ligger ikke på grafen..

Løsning 2.2.6

a)



Løsning 2.2.7

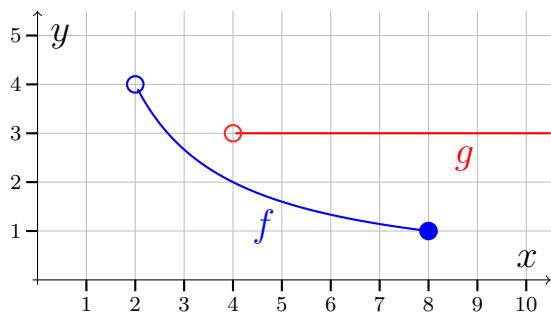
a) $(1, 3)$

b) Der er ingen...

c) $(-1, -1)$ og $(1, 1)$

Løsning 2.2.8

a)



Løsning 2.2.9

a) nej

b) ja

- c) ja
- d) nej

Løsning 2.3.1

- a) $\text{Dm}(f) =]-4; 4]$ og $\text{Vm}(f) = [1; 5[$.
- b) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$ og $\text{Vm}(f) = [-3; -1]$.

Løsning 2.3.2

- a) $f(4) = \frac{1}{4}$
- b) $f(-\frac{1}{2}) = -2$
- c) Det kan ikke lade sig gøre, da man ikke kan dividere med 0.
- d) Definitionsmængden for f er alle tal undtagen 0. Dette kan skrives som $\text{Dm}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Begrundelse: Man kan dividere med alle tal undtagen nul.

Løsning 2.3.3

- a) $f(6) = 2$
- b) $f(2) = 0$
- c) Det kan ikke lade sig gøre da $f(1) = \sqrt{-1}$, hvilket ikke kan lade sig gøre, da man ikke kan tage kvadratroden af negative tal.... hmmm jeg håber ikke, der er en eller anden fessortype i klassen, som begynder at snakke om komplekse tal.
- d) $\text{Dm}(f) = [2; \infty[$, da indmaden af kvadratroden $(x - 2)$ bliver under nul, hvis $x < 2$.

Løsning 2.3.4

- a) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$
- b) $\text{Dm}(f) =]-\infty; 2[$
- c) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$
- d) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- e) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-37\}$

f) $\text{Dm}(f) = [-1; 1]$

Løsning 2.4.1

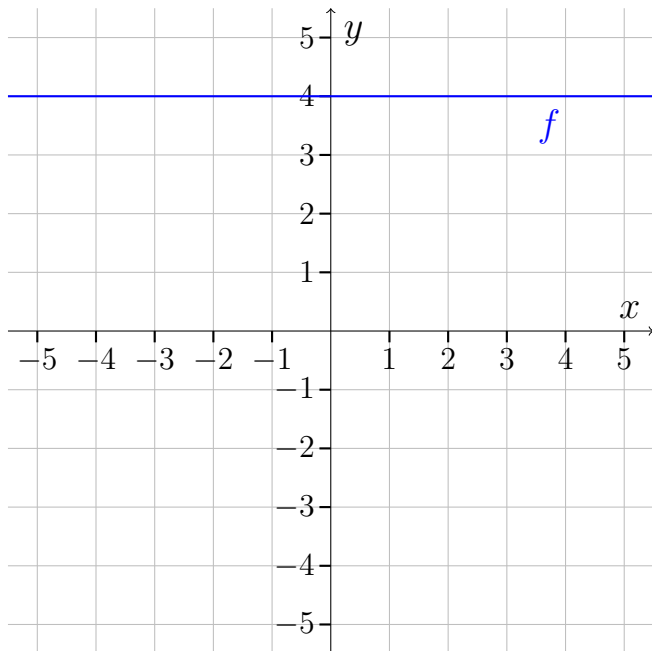
- a) Ja
- b) Ja
- c) Nej

Løsning 2.4.2

- a) Funktionen f har nulpunkter i $x = -1$ og $x = 3$.
- b) Funktionen f er negativ på intervallet $] -1; 3[$.
Funktionen f er positiv på intervallerne $] -\infty; -1[$ og $]3; \infty[$.
Funktionen f er nul når $x = 1$ og $x = 3$.
- c) Funktionen g har nulpunkt i $x = -4$.
- d) Funktionen f er negativ på intervallet $] -\infty; -4[$.
Funktionen f er positiv på intervallet $] -4; -3]$.

Løsning 2.4.3

- a) $f(-3) = 4$
- b)



- c) Funktionen f har ingen nulpunkter.
- d) Funktionen f er positiv.

Løsning 2.4.4

- a) $x = -\frac{1}{2}$
- b) $x = 0$
- c) $x = -1$
- d) $x = 1$
- e) $x = -1$

Løsning 2.4.5

- a) $f(x) < 0$ på intervallet $]4; \infty[$
 $f(x) > 0$ på intervallet $] - \infty; 4[$
 $f(x) = 0$ når $x = 4$

Løsning 2.4.6

- a) $x = 1$, $x = 3$ og $x = 5$.
- b)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	0	-1	0	3

- c) $f(x) < 0$ på intervallet $]2; 4[$
 $f(x) > 0$ på intervallerne $] - \infty; 2[$ og $]4; \infty[$
 $f(x) = 0$ når $x = 2$ og $x = 4$

Løsning 2.5.1

- a) Funktionen f har globalt maksimum i $x = -2$ med maksimumsværdi 4.
- b) Funktionen f er voksende i $] - \infty; -2]$
 Funktionen f er aftagende i $[2; \infty[$
- c) Funktionen g har globalt minimum i $x = 1$ med minimumsværdi -2 .
 Funktionen g har lokalt maksimum i $x = 4$ med maksimumsværdi 4.
- d) Funktionen g er aftagende i $] - \infty; 1]$ og $[4; 5[$

Funktionen g er voksende i $[1; 4]$

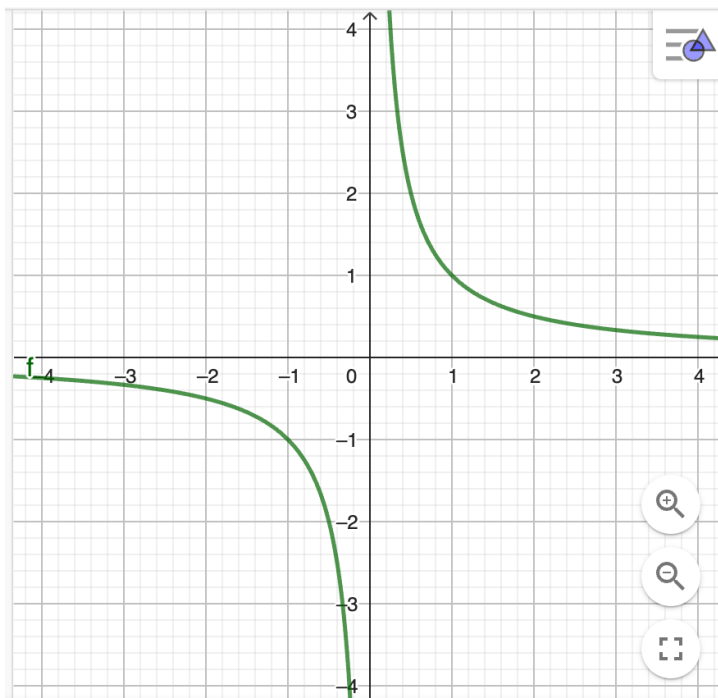
e) h er konstant.

Løsning 2.5.2

a) Alle tal i definitionsmængden $(\mathbb{R})$ er globale minimum og maksimumsteder. Maksimums- og minimumsværdierne er alle -4 .

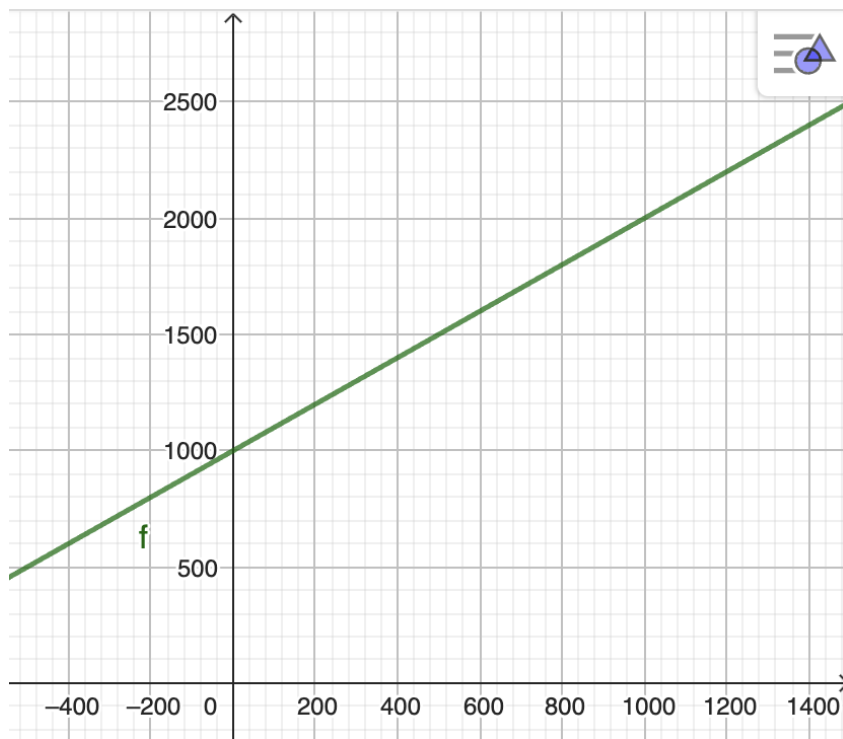
Løsning 2.6.1

a)

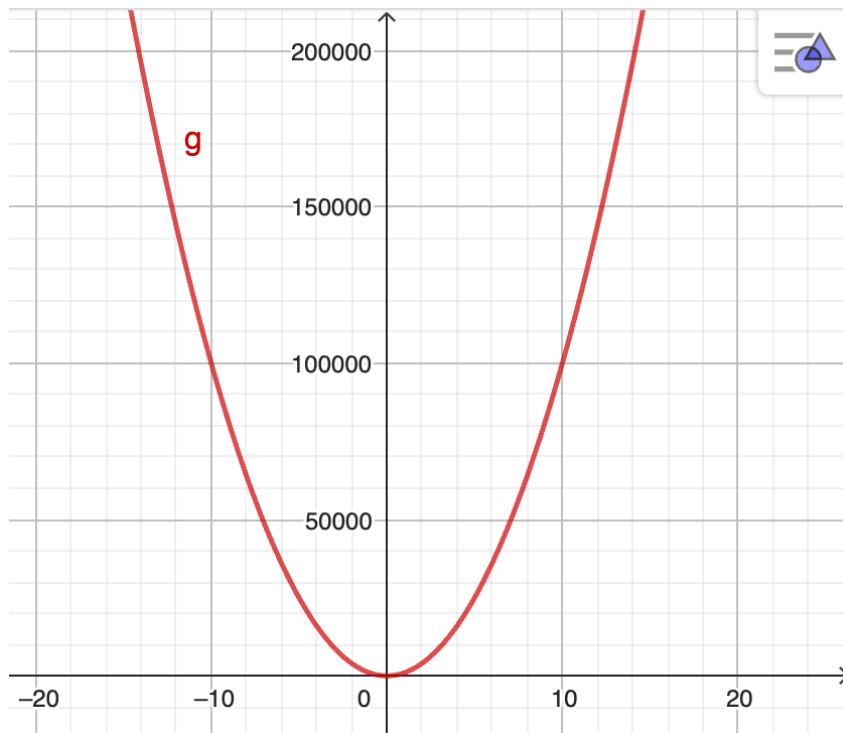


Løsning 2.6.2

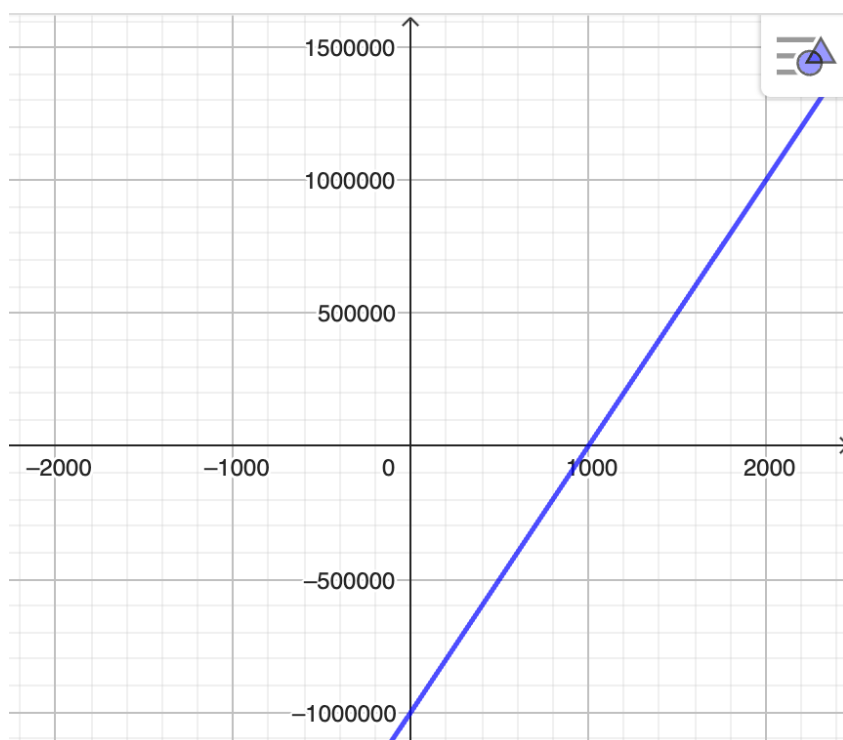
a)



b)

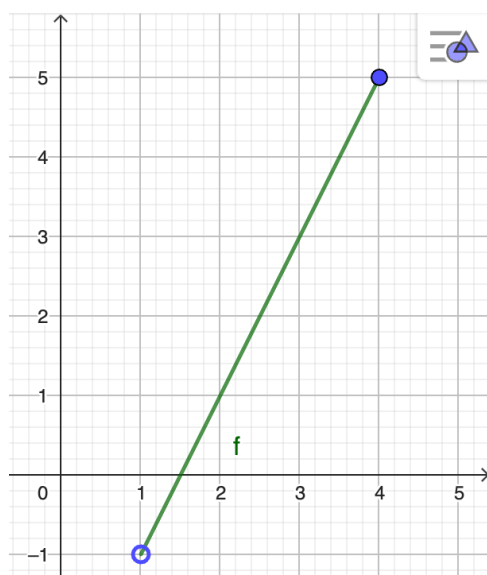


c)

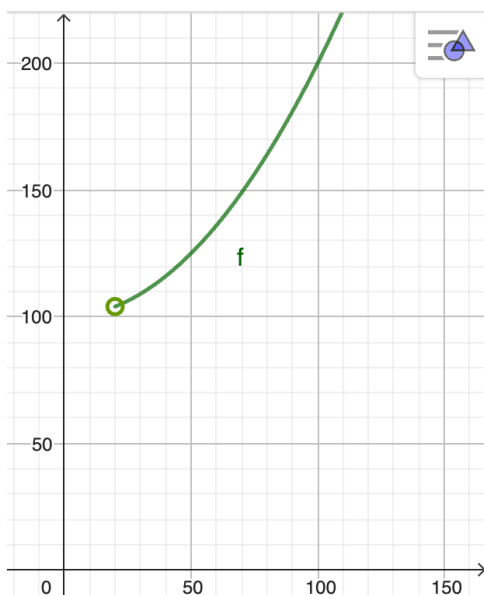


Løsning 2.6.3

a)



b)



Løsning 2.6.4

- a) Man laver da et sildeben og plotter punkterne i et koordinatsystem. Hvis du er tvivl om hvad dette betyder, så prøv at gør det! (evt. med hjælp fra mig). Tegn derefter grafen i GeoGebra for at tjekke, at du har tegnet korrekt.

Løsning 2.6.5

- a) $x = -4$
 b) $x = -0,57$ og $x = 0$

Løsning 2.6.6

- a) $L = \emptyset$. Altså der er ingen løsninger.

Løsning 2.6.7

- a) $x = 2$

Løsning 2.6.8

- a) $x > 5,5$
 b) $0 < x < 1$.
 Kan også besvares ved at angive løsningsmængden: $L =]0; 1[$.
 c) $x \leq 0$ eller $x \geq 1$.
 Kan også besvares ved at angive løsningsmængden: $L =]-\infty; 0] \cup [1; \infty[$.

Løsning 3.1.1

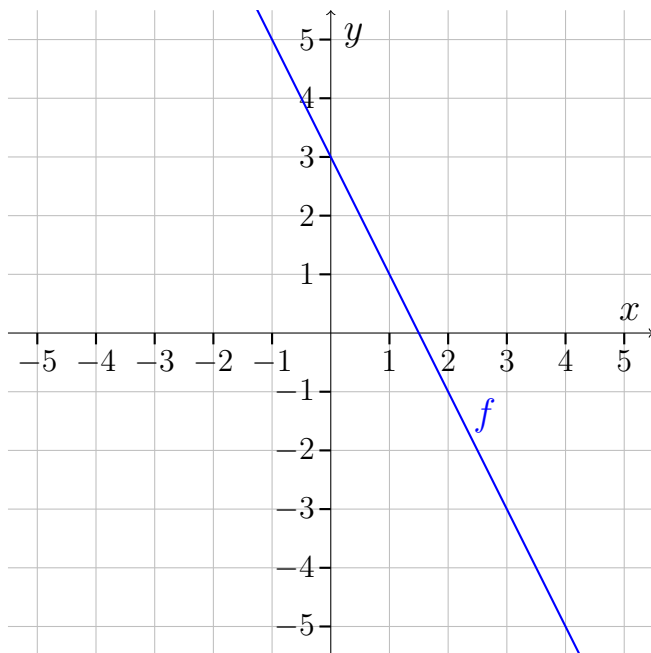
- a) Lineær med $a = 3$ og $b = 2$.
- b) Lineær med $a = 2$ og $b = 0$.
- c) Lineær med $a = 1$ og $b = 0$.
- d) Ikke lineær.
- e) Lineær med $a = -1$ og $b = 0$.
- f) Ikke lineær.
- g) Lineær med $a = 0$ og $b = 0$.
- h) Lineær med $a = 0$ og $b = -1$.

Løsning 3.1.2

- a) $a = -3$
- b) $a = 0$

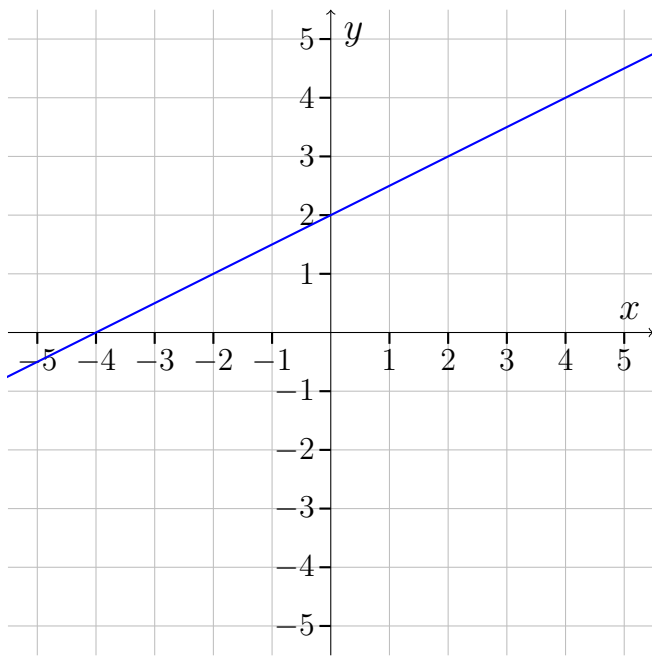
Løsning 3.2.1

a)

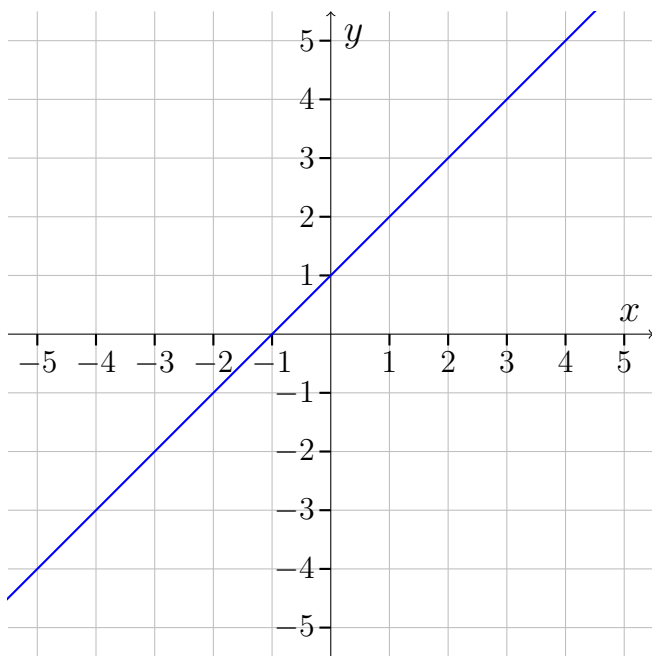


Løsning 3.2.2

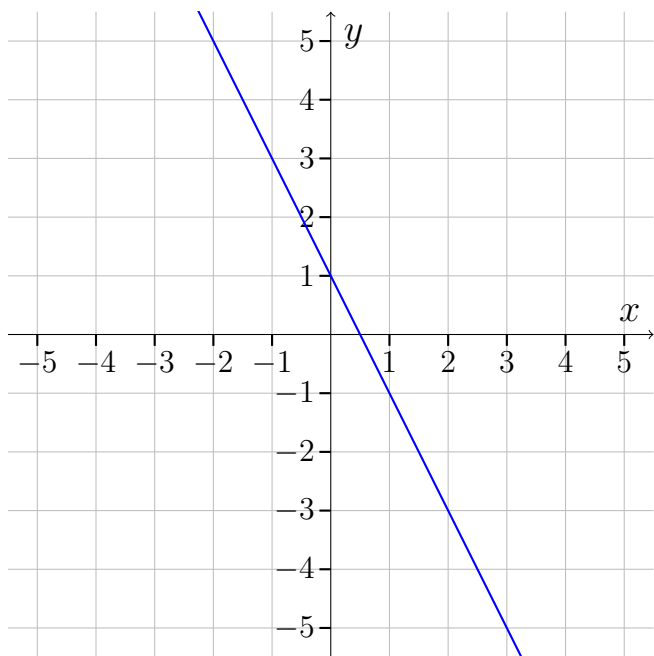
a)



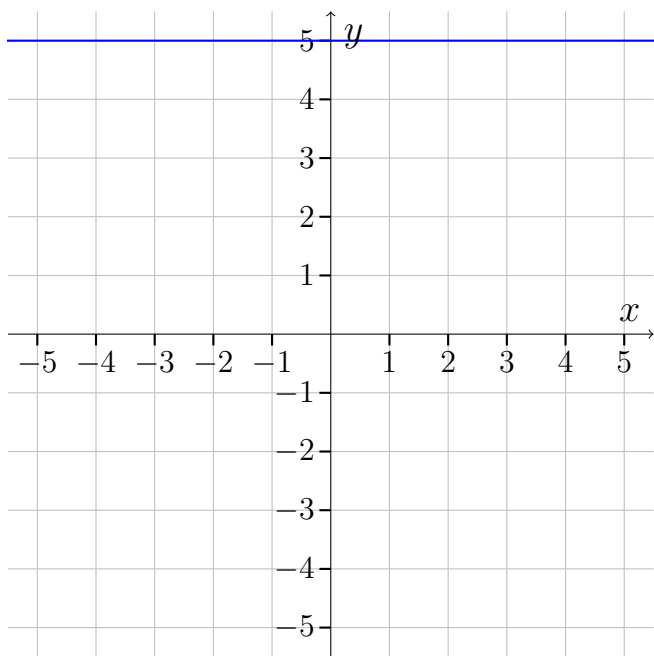
b)



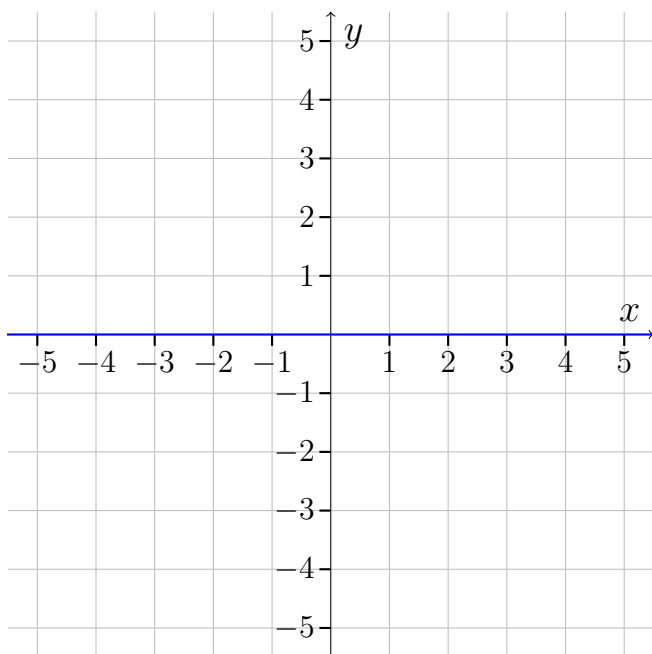
c)



d)



e)



Løsning 3.2.3

- a) $f(x) = 0,5x - 1$
- b) $g(x) = -x + 1$
- c) $h(x) = -1$
- d) $i(x) = x$

Løsning 3.2.4

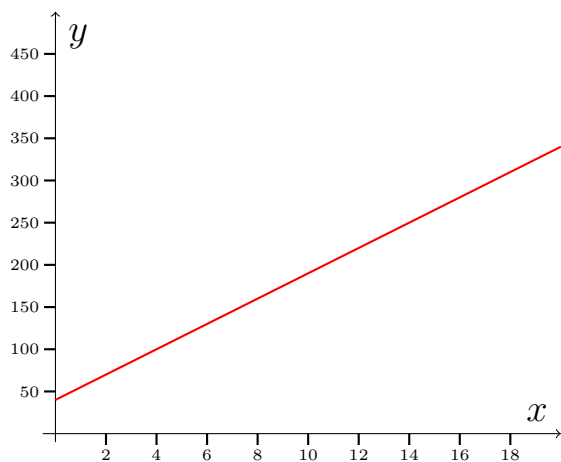
- a) $f(x) = 3x - 1.$
- b) $f(x) = -x + 2.$

Løsning 3.2.5

- a) $f(x) = -15x + 190.$

Løsning 3.3.1

- a) $\text{Dm}(f) = [0; \infty[.$
- b)



c) $V_m(f) = [40; \infty[$

d) 190 kr.

e) 4 km.

Løsning 3.3.2

a) $v(x) = -50000x + 800000$, $x \geq 0$

b) 16 år.

Løsning 3.3.3

a) Tallet 1,5 betyder at græsset vokser med 1,5 cm pr. uge og tallet 5 betyder at græsset var 5 cm højt 1. maj 1980.

Løsning 3.3.4

a) 50 stk.

b) 300 kr.

Løsning 3.3.5

a) $C(x) = 140x + 30000$

b) $R(x) = 200x$

c) 44000 kr.

d) 500 kg.

Løsning 3.3.6

a) $p(x) = -\frac{1}{2}x + 1550$

b) 1300 kr.

c) 2500 stk.

Løsning 3.4.1

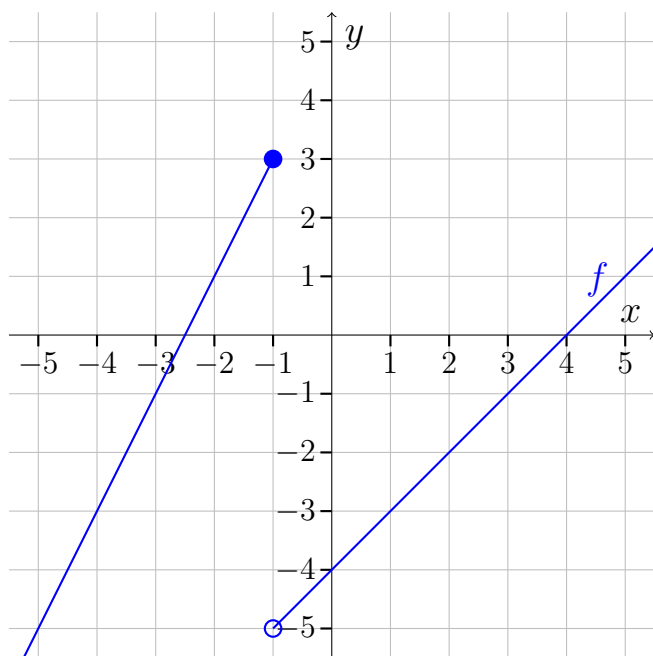
a) $f(-2) = 0$

b) $f(2) = -4$

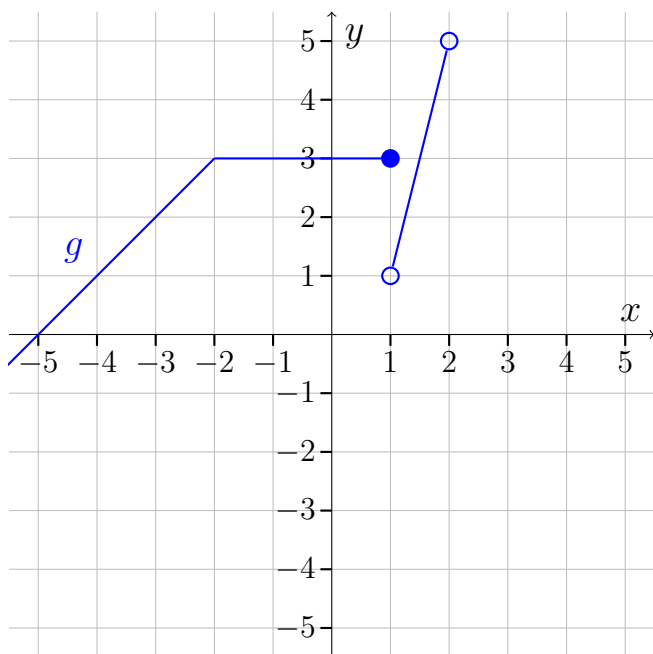
c) $f(3) = -2$

Løsning 3.4.2

a)



b)



Løsning 3.4.3

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1,5x + 5 & \text{for } x \leq -2 \\ -x & \text{for } -2 < x \leq 1 \\ 2 & \text{for } 1 < x < 4 \end{cases}$$

b) $f(-2) = 2$ og $f(1) = -1$.

Løsning 3.4.4

- a) Hældningerne viser hvor meget man betaler i skat pr. tjente krone.
- b) Sidste del har en hældning på ca. 0,56. Dette betyder, at man højst kan komme til at betale 0,56 kr. i skat pr. ekstra krone man tjener. Denne skat kaldes også "marginalskatten", og den er meget slem, synes de rige.

Løsning 3.5.1

a) Klarede du det?

Løsning 3.5.2

- a) Huskede du aksetitler? Det er der i hvert fald mange, der glemmer, og det er en ærgerlig ting at miste en karakter på.

Løsning 3.5.3

- a) $y = 37715x + 152517$
- b) Der har været en stigning på 37715 tilskuere om året.
- c) Ifølge modellen var der 2,4 mio. tilskuere. Det faktiske antal var 2,5, så det var rimelig godt ramt.

Løsning 3.5.4

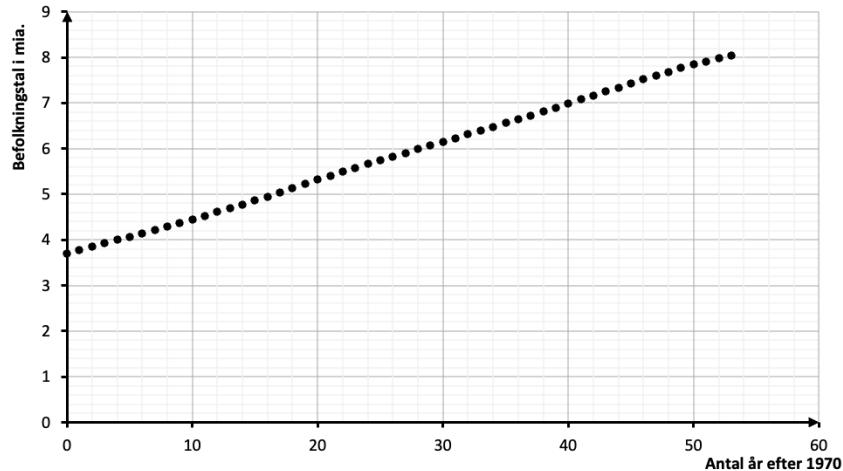
- a) Vi ser at R^2 er høj, men det betyder ikke at punkterne beskrives godt med en lineær funktion. Vi har brug for et residualplot for at afgøre, om der er system i residualerne
- b) $r = -0,99$. Har du husket minusset?

Løsning 3.5.5

- a)

År	Antal år efter 1970	Befolkningstal i mia.
1970	0	3,70
1971	1	3,77
1972	2	3,84
1973	3	3,92
1974	4	4,00
1975	5	4,07
1976	6	4,14
1977	7	4,22
1978	8	4,29
1979	9	4,37
1980	10	4,44
1981	11	4,52
1982	12	4,61
1983	13	4,69
1984	14	4,78
1985	15	4,86
1986	16	4,95
1987	17	5,04
1988	18	5,13
1989	19	5,22
1990	20	5,32
1991	21	5,41
1992	22	5,49
1993	23	5,58
1994	24	5,66
1995	25	5,74
1996	26	5,83
1997	27	5,91
1998	28	5,99
1999	29	6,07
2000	30	6,15
2001	31	6,23
2002	32	6,31
2003	33	6,39
2004	34	6,48
2005	35	6,56
2006	36	6,64
2007	37	6,73
2008	38	6,81
2009	39	6,90
2010	40	6,99
2011	41	7,07
2012	42	7,16
2013	43	7,25
2014	44	7,34
2015	45	7,43
2016	46	7,51
2017	47	7,60
2018	48	7,68
2019	49	7,76
2020	50	7,84
2021	51	7,91
2022	52	7,98
2023	53	8,05

b) Har du husket aksetitler?

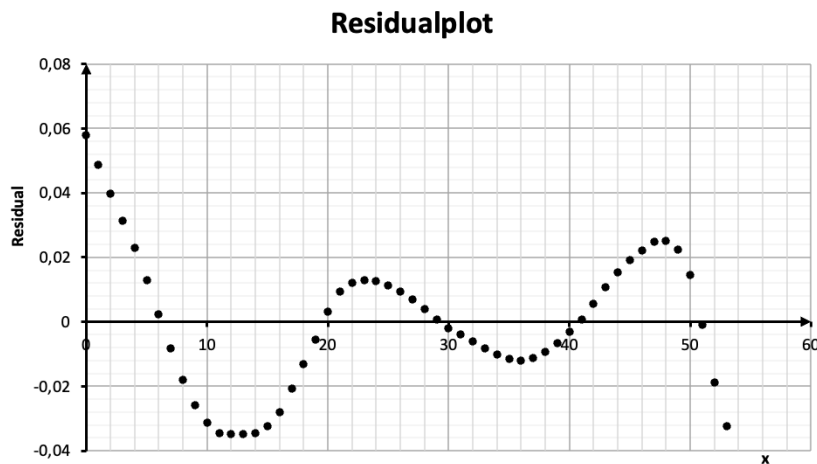


c) Modellen er $y = 0,0838x + 3,6376$, hvor y er befolkningstallet i mia. og x er antal år efter 1970. Vi har $R^2 = 0,9997$.

d) Tallet 0,0838 betyder, at der har været en stigning på 0,0838 mia. mennesker om året. Dvs. at der hvert år kommer 84 mio. mennesker mere på jorden. De 3,6376 betyder at der var 3,6 mia. mennesker på jorden i 1970 ifølge modellen.

e) År 2046.

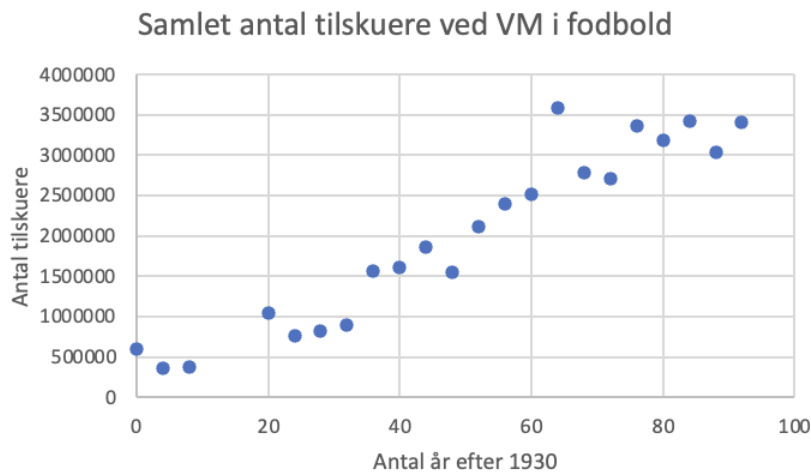
f)



Vi ser en tydelig lineær tendens i xy-plottet og R^2 er høj. MEN... residualplottet viser, at der er system i residualerne åh nej! Så modellen er ikke helt så god, som det umiddelbart kunne se ud til. Sikke noget møg. Der er altså tendenser i udviklingen modellen ikke fanger.

Løsning 3.6.1

a)



Huskede du at ændre diagramtitlen og tilføje aksetitler?

Løsning 3.6.2

- $y = 37715x + 152517$
- Der har været en stigning på 37715 tilskuere om året
- Ifølge modellen var der 2,4 mio. tilskuere. Det faktiske antal var 2,5, så det var rimelig godt ramt.

Løsning 3.6.3

- Vi ser at R^2 er høj, så punkterne ligger tæt på linjen, men udsvingene fra linjen er ikke tilfældige, så vi bør ikke modellere udviklingen med en lineær model.
- $r = -0,99$. Har du husket minusset?

Løsning 3.6.4

-

År	Antal år efter 1970	Befolkningstal i mia.
1970	0	3,70
1971	1	3,77
1972	2	3,84
1973	3	3,92
1974	4	4,00
1975	5	4,07
1976	6	4,14
1977	7	4,22
1978	8	4,29
1979	9	4,37
1980	10	4,44
1981	11	4,52
1982	12	4,61
1983	13	4,69
1984	14	4,78
1985	15	4,86
1986	16	4,95
1987	17	5,04
1988	18	5,13
1989	19	5,22
1990	20	5,32
1991	21	5,41
1992	22	5,49
1993	23	5,58
1994	24	5,66
1995	25	5,74
1996	26	5,83
1997	27	5,91
1998	28	5,99
1999	29	6,07
2000	30	6,15
2001	31	6,23
2002	32	6,31
2003	33	6,39
2004	34	6,48
2005	35	6,56
2006	36	6,64
2007	37	6,73
2008	38	6,81
2009	39	6,90
2010	40	6,99
2011	41	7,07
2012	42	7,16
2013	43	7,25
2014	44	7,34
2015	45	7,43
2016	46	7,51
2017	47	7,60
2018	48	7,68
2019	49	7,76
2020	50	7,84
2021	51	7,91
2022	52	7,98
2023	53	8,05

b) Har du husket titel og aksetitler?



- c) Modellen er $y = 0,0838x + 3,6376$, hvor y er befolkningstallet i mia. og x er antal år efter 2019. Punkterne ligger nærmest perfekt på linjen og $R^2 = 0,9997$, så modellen giver en god beskrivelse af data.
- d) Tallet 0,0838 betyder, at der har været en stigning på 0,0838 mia. mennesker om året. Dvs. at der hvert år kommer 84 mio. mennesker mere på jorden. Ikke så mærkeligt, at vi får problemer med global warming osv. De 3,6376 betyder at der var 3,6 mio. mennesker på jorden i 1970 ifølge modellen.
- e) År 2046.

Løsning 3.6.5

- a) Om 10 mia. år er jorden blevet opslugt af solen og derfor er der 0 mennesker på jorden. RIP.

Løsning 3.8.1

a) $f(x) = -\frac{5}{2}x + 13$, $2 < x \leq 6$

Huskede du begrænsningen på x ?

Løsning 3.8.2

a) $f(x) = x + 3$.

Løsning 3.8.3

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Løsning 3.8.4

a) $b = 9$

Løsning 3.8.5

a) $x_0 = -1$

Løsning 3.8.6

a) 0 kr.

b) 24.000

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 100000 \\ 0,6x - 60000 & \text{for } x > 100000 \end{cases}$

Løsning 3.8.7

a) $f(x) = 1,8x + 32$, hvor x er temperaturen i Celsius og $f(x)$ er temperaturen i Fahrenheit.

b) $f(x) = 0,56x - 17,89$, hvor x er temperaturen i Fahrenheit og $f(x)$ er temperaturen i Celsius.

c) Hvis man har en temperatur i x i Fahrenheit og bruger reglen får man

$$\frac{x - 30}{2} = \frac{1}{2}x - 15$$

Dette svarer ikke helt til $f(x) = 0,56x - 17,78$, men lad os prøve et eksempel. Har man 90° Fahrenheit og bruger reglen får man:

$$\frac{90 - 30}{2} = 30$$

Bruger man forskriften

$$f(90) = 0,56 \cdot 90 - 17,89 = 32,51$$

Sååå lidt derhen af... Godt nok til at finde ud af om det er t-shirt eller lange ærmer, I guess.

Løsning 4.1.1

a) Er et polynomium

- b) Er et ikke et polynomium
- c) Er et polynomium
- d) Er et ikke et polynomium
- e) Er et polynomium
- f) Er et polynomium
- g) Er et polynomium
- h) Er et polynomium
- i) Er et ikke et polynomium (da eksponenterne skal være hele tal)
- j) Er et polynomium
- k) Er et polynomium

Løsning 4.1.2

- a) $a = 2$ og $b = 1$
- b) $a = 1$ og $b = 1$
- c) $a = -2$ og $b = 2$
- d) $a = -1$ og $b = 0$

Løsning 4.1.3

- a) $a = 3, b = 2, c = 1$
- b) $a = 1, b = -2, c = 3$
- c) $a = -2, b = 0, c = 1$
- d) $a = 1, b = 0, c = 0$
- e) $a = 39, b = -1, c = 0$
- f) $a = -1, b = 0, c = 1,3$

Løsning 4.1.4

- a) 3
- b) 1
- c) 8

d) 0

Løsning 4.1.5

a) En lineære funktion er enten et nultegradspolynomium eller et første-gradspolynomium.

Løsning 4.1.6

a) $f(0) = -1$ og $f(-2) = -7$

b) $f(0) = 2,7$ og $f(-2) = 2,7$

c) $f(0) = 1$ og $f(-2) = 23$

Løsning 4.1.7

a) Det har mellem 1 (da det er ulige grad) og 7 nulpunkter.

b) Det har højst 6 ekstrema.

Løsning 4.1.8

a) Den er mindst 6.

Løsning 4.1.9

a) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$ og $\text{Vm}(f) = \mathbb{R}$ (da graden er ulige)

Løsning 4.1.10

a) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$ og $\text{Vm}(f) = \{-4\}$.

Løsning 4.1.11

a) $n = 2$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ og $a_0 = -3$

b) $n = 0$ og $a_0 = 5$

Løsning 4.1.12

a) $a_{n-1} = 0$

b) $a_{n-2} = -7$

Løsning 4.1.13

- a) Ja
- b) Nej
- c) Ikke nogen. Medmindre man er craaaaaazy!!! ...og giver det graden $-\infty$.

Løsning 4.2.1

- a) Konveks
- b) Konkav

Løsning 4.2.2

- a) $a > 0$
- b) $c = 2$
- c) $b = -1$

Løsning 4.2.3

- a) $a = \frac{1}{2}$
- b) $a = -4$

Løsning 4.2.4

- a) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
- b) $g(x) = 3x^2$

Løsning 4.3.1

- a) $d = 8$
- b) $d = 12$
- c) $d = 0$
- d) $d = 16$

Løsning 4.3.2

- a) $(3, 1)$

Løsning 4.3.3

- a) $(1, -1)$
- b) $(0, 2)$
- c) $(0, 0)$

Løsning 4.3.4

- a) Der er to nulpunkter. Et i $x = -1$ og et i $x = 3$

Løsning 4.3.5

- a) $x = 0$
- b) $x = -1$
- c) $x_1 = -3$ og $x_2 = 3$
- d) $x_1 = -2$ og $x_2 = 1$
- e) $x_1 = 3$ og $x_2 = 0$

Løsning 4.3.6

- a) $d > 0$
- b) $d = 0$
- c) $d < 0$

Løsning 4.3.7

- a) $b = 6$

Løsning 4.3.8

- a) $a = 2$

Løsning 4.3.9

- a) $x_T = \frac{-b}{2a}$
- b) $f(x_T) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$
- c) $f(x_T + 1) = \frac{4a^2-b^2+4ac}{4a}$
- d) $f(x_T + 1) - f(x_T) = a$

- e) At $f(x_T + 1) - f(x_T) = a$ betyder at grafen vokser med a når vi går 1 ud fra toppunktet.

Løsning 4.4.1

- a) Et nulpunkt er en x -værdi, hvori funktionsværdien er nul. Hvis vi definerer $f(x) = x^2 + 4x + 4$, og sætter den lig med nul, får vi ligningen $x^2 + 4x + 4 = 0$. Derfor er en løsning til denne ligning det samme som et nulpunkt for f .

Løsning 4.4.2

- a) $x_1 = -2$ og $x_2 = 1$
b) Ingen løsninger.
c) $x = 4$.

Løsning 4.4.3

- a) $x = -3 \vee x = 4$

Løsning 4.4.4

- a) $x_1 = -1$ og $x_2 = 1$
b) $x_1 = -3$ og $x_2 = 3$
c) Har ikke nogen løsninger.
d) $x = 0$

Løsning 4.4.5

- a) $k = 3$

Løsning 4.5.1

- a) Nulreglen siger, at **hvis to tal ganget sammen er nul**, så er det fordi, mindst et af de to tal lig med nul.

Løsning 4.5.2

- a) $x = -4 \vee x = -2$
b) $x = 0 \vee x = 2$

Løsning 4.5.3

a) $x = -2 \vee x = 0$

b) $x = -2 \vee x = 0$

Løsning 4.5.4

a) $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 2$

b) $x = -3 \vee x = 0$

c) $x = 1$. Hvorfor ikke $x = 0$ også?

Løsning 4.5.5

a) $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 4$

b) $x = -3 \vee x = 0 \vee x = 2$

c) $x = -3 \vee x = -2$

Løsning 4.5.6

a) 21

b) 2, 3 og x

Løsning 4.6.1

a)

$$f(x) < 0 \text{ på }] - \infty, -1[$$

$$f(x) > 0 \text{ på }] - 1, \infty[$$

$$f(x) = 0 \text{ når } x = -1$$

b)

$$f(x) > 0 \text{ på }] - \infty, -1[,] - 0,5; 0[\text{ og }]1; \infty[$$

$$f(x) < 0 \text{ på }] - 1; -0,5[\text{ og }]0; 1[$$

$$f(x) = 0 \text{ når } x = -1 , x = -0,5 , x = 0 \text{ eller } x = 1$$

Løsning 4.6.2

a)

$$f(x) > 0 \text{ for alle } x.$$

b)

$$f(x) > 0 \text{ på }] - 3; \infty[$$

$$f(x) < 0 \text{ på }] - \infty; -3[$$

$$f(x) = 0 \text{ når } x = -3$$

c)

$$f(x) > 0 \text{ på }] - \infty; -4[\text{ og }]1; \infty[$$

$$f(x) < 0 \text{ på }] - 4; 1[$$

$$f(x) = 0 \text{ når } x = -4 \text{ og } x = 1$$

d)

$$f(x) > 0 \text{ på }] - \infty; 0[\text{ og }]1; 2[$$

$$f(x) < 0 \text{ på }]0; 1[\text{ og }]2; \infty[$$

$$f(x) = 0 \text{ når } x = 0, x = 1 \text{ og } x = 2$$

Løsning 4.6.3

a) $x^2 - 6x + 8 > 0$

b) Polynomiet er:

positivt på $] - \infty; 2[\text{ og }]4; \infty[$

negativt på $]2; 4[$

nul i $x = 2$ og $x = 4$

c) Uligheden er opfyldt for $x < 2 \vee x > 4$. Dvs. løsningsmængden er $L =] - \infty; 2[\cup]4; \infty[$.

Løsning 4.6.4

a) $2 < x < 4$. Som mængde: $L =]2; 4[$.

Løsning 4.7.1

a) $(-2, 4)$ og $(2, 4)$

b) $(-2, -1)$ og $(2, 3)$

c) $(2, 5)$

d) Der er ikke nogen.

e) $(-2, -4)$, $(0, 0)$ og $(1, 2)$

Løsning 5.1.1

a) 30%

- b) 2
- c) 9.000 kr.
- d) 240*kr.*
- e) 25 GBP
- f) 796 kr.
- g) 1200*kr.*
- h) 50%
- i) 20%

Løsning 5.1.2

- a) Spørg mig.
- b) Spørg mig.

Løsning 5.2.1

a)

Sæson	08/09	9/10	10/11	11 /12	12/13	13/14
Indekstal	100	85	76	75	54	94

Løsning 5.2.2

- a) FCM har været mere stabile over perioden og slutter også 10 procentpoint højere ned Brøndby IF.

Løsning 5.2.3

- a) Stigningen er på 29 procentpoint.
- b) Stigningen er på 39%.

Løsning 5.2.4

a)

Sæson	08/09	9/10	10/11	11 /12	12/13	13/14
Tilskuergennemsnit	3420	3419	3283	3283	3005	3488
Indekstal	100	100	96	96	88	102

Løsning 6.1.1

- a) Tryk på højttalerikonet: [her](#).

Løsning 6.1.2

- a) $a > 0$ betyder at a skal være større end nul. At $a \neq 1$ betyder at a ikke må være 1. At $b > 0$ betyder at b skal være større end nul.

Løsning 6.1.3

- a) $a = 5$ og $b = 2$.
b) $a = 1,02$ og $b = 3000$.
c) $a = 1,4$ og $b = 1$

Løsning 6.1.4

- a) yes den er god nok
b) nope
c) næh
d) jes
e) duer ikke
f) no
g) nah

Løsning 6.1.5

- a) Grundtallet a er 1,6 og begyndelsesværdien b er 5000.
b) $f(-1) = 3125$ og $f(3) = 20480$.

Løsning 6.1.6

- a) Der er 13161 indbyggere i byen efter 5 år.

- b) Der er 17637 indbyggere i år 2031.

Løsning 6.1.7

- a) $e^2 = 7,39$
b) $e^2 = 7,39$

Løsning 6.1.8

- a) Grundtallet er 4 og begyndelsesværdien er 2.
b) $f(0) = 2$
c) $f(2) = 32$
d) Grafen skærer y -aksen i 2 og funktionen er voksende.

Løsning 6.1.9

- a) $b = 5$
b) $a < 1$
c) $f(4) \approx 2$
d) $x = 1$

Løsning 6.1.10

- a) $\sqrt[3]{27} = 3$
b) $\sqrt[4]{16} = 2$
c) $\sqrt[5]{10} = 1,58$

Løsning 6.1.11

- a) $f(x) = 1,82 \cdot 1,40^x$

Løsning 6.1.12

- a) $f(x) = 0,25 \cdot 2^x$

Løsning 6.2.1

- a) f vokser med 30% når x vokser med 1.

Løsning 6.2.2

- a) $r = 0,2$, vokser med 20%.
- b) $r = 3$, vokser med 300%.
- c) $r = -0,2$, aftager med 20%.

Løsning 6.2.3

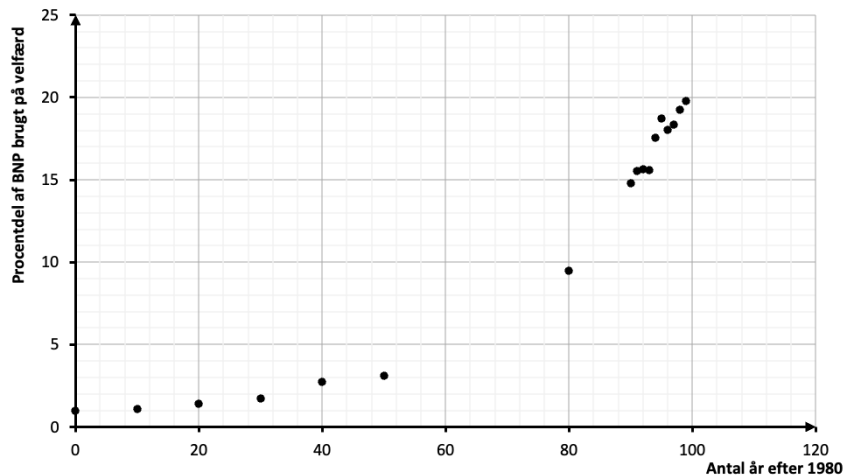
- a) $r = 0,012$.
- b) $f(x) = 7,15 \cdot 1,012^x$.
- c) Der er 7,68 milliarder rumvæsener på planeten i år 2020.
- d) År 2042.

Løsning 6.2.4

- a) 200.000 kr.
- b) 30%.
- c) 48020 kr.
- d) År 2024.

Løsning 6.3.1

a)



Huskede du aksetitler?

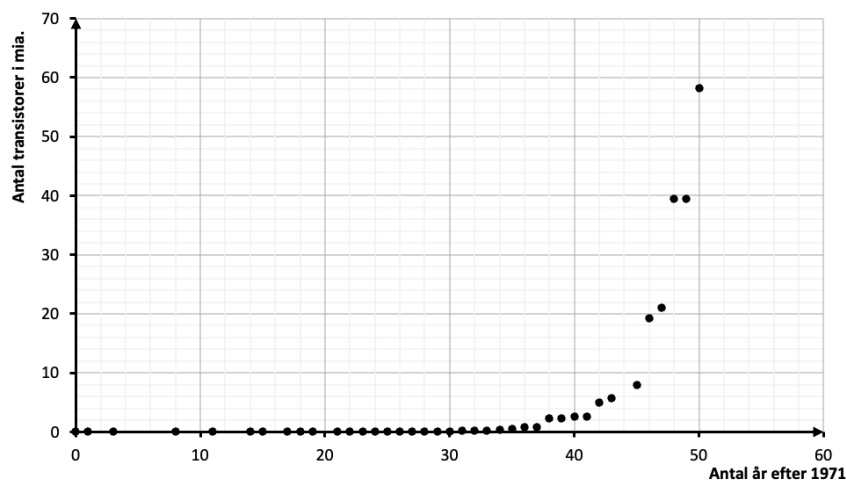
- b) $y = 0,7611 \cdot 1,0333^x$
- c) I år 1880 blev der brugt 0,7611% af BNP på velfærd – ifølge modellen

altså – den faktiske andel er 0,96%, som det kan ses i tabellen.

- d) Der har været en årlig vækst i andelen af BNP brugt på velfærd på 3,3% i perioden 1880-1979.
- e) Ifølge modellen ville der være brugt 80% af BNP på velfærd i 2022. Enhver liberalists mareridt. Men jeg kan berolige med at udviklingen er gået ret meget i stå. I 2022 brugte vi 26% af BNP på velfærd, så der er massere af penge til borgernes egne lommer, hvor pengene jo ligger bedst.

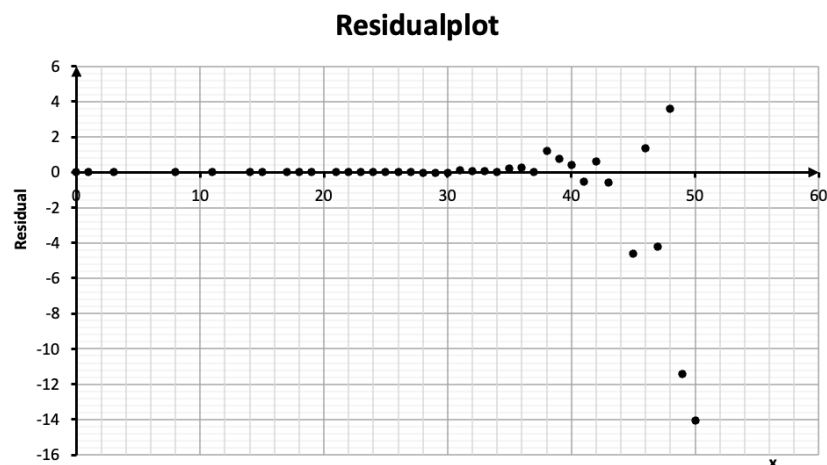
Løsning 6.3.2

a)



b) $y = 1864 \cdot 1,4183^x$

c) $R^2 = 0,98$



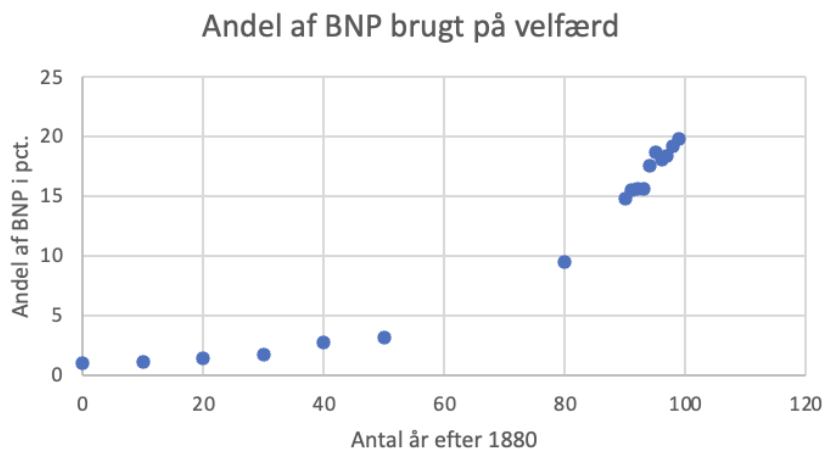
Det ser ud til, at der er større variation i residualer til sidst, end der er i starten. Havde det været lineær regression, ville det være et problem, men fordi det er eksponentiel regression, er det ikke nødvendigvis et pro-

blem. Vi kan ikke se nogen systematik i residualerne (ud over den stigende variation), og R^2 er rimelige høj, så vi kan ikke se nogle problemer med modellen. Dog skal det siges, at residualerne burde analyseres på en mere avanceret måde, som går ud over mathhx.

- d) Der har været en årlig vækst på 42%
- e) 1677 mia.
- f) i år 2027.

Løsning 6.4.1

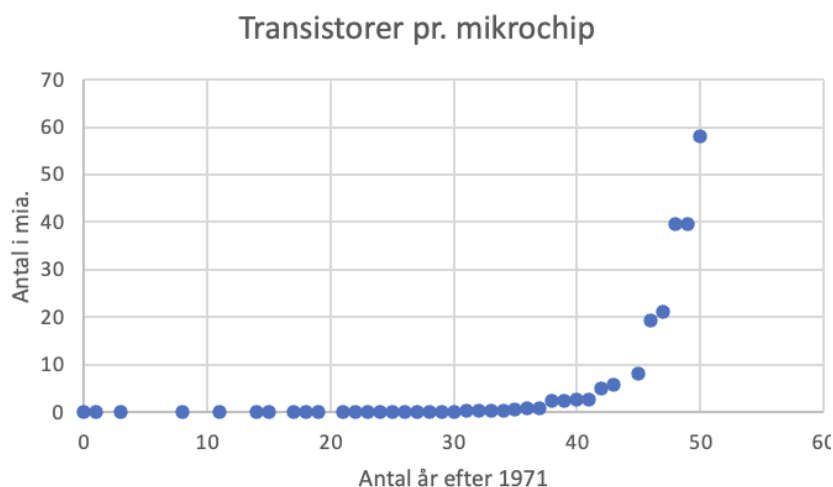
a)



- b) $y = 0,7611 \cdot 1,0333^x$
- c) I år 1880 blev der brugt 0,7611% af BNP på velfærd – ifølge modellen altså – den faktiske andel er 0,96%, som det kan ses i tabellen.
- d) Der har været en årlig vækst i andelen af BNP brugt på velfærd på 3,3% i perioden 1880-1979.
- e) Ifølge modellen ville der være brugt 80% af BNP på velfærd i 2022. Enhver liberalists mareridt. Men jeg kan berolige med at udviklingen er gået ret meget i stå. I 2022 brugte vi 26% af BNP på velfærd, så der er massere af penge til borgernes lommer, hvor pengene jo ligger bedst.

Løsning 6.4.2

a)



b) $y = 1864 \cdot 1,4183^x$

c) $R^2 = 0,98$

d) Ja punkter ligger pænt omkring modellen og vi har en rimelig høj R^2 . Bemærk at du ikke umiddelbart kan tjekke at de første punkter ligger pænt. Det kræver at du zoomer på y -aksen (nemmest at gøre i GeoGebra), da tallene er små relativt til de sidste tal.

e) Der har været en årlig vækst på 42%

f) 1677 mia.

g) i år 2027.

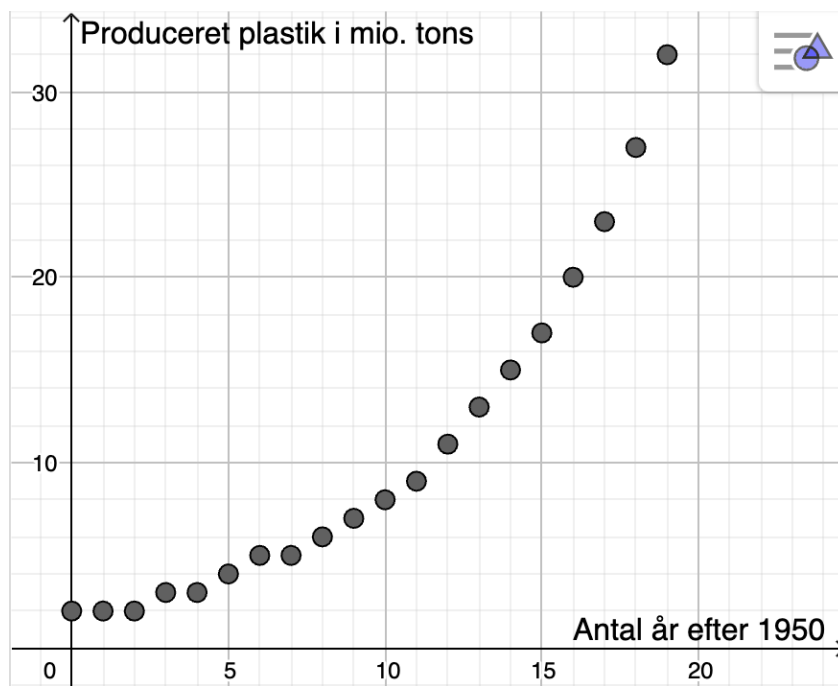
Løsning 6.4.3

a) $y = 1,7819 \cdot 1,1633^x$

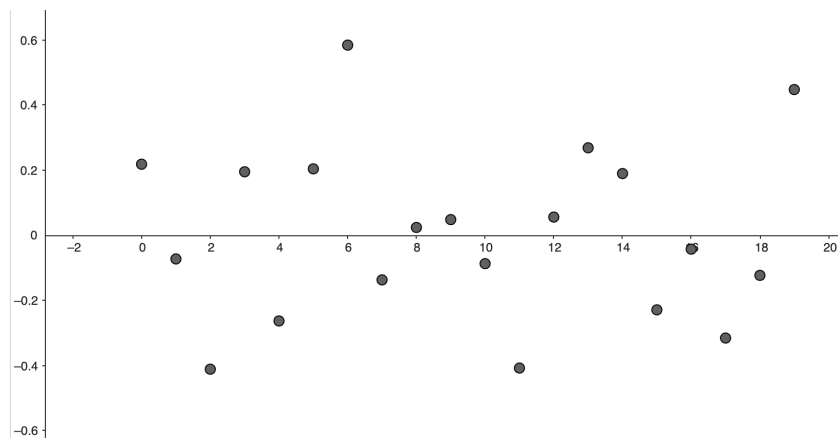
b) $R^2 = 0,9991$

c)

Global produktion af plastik



d)



- e) Punkterne ligger pænt omkring modellen, R^2 er høj og residualplottet ser umiddelbart godt ud (punkterne ligger uden system). Det er dermed en fin model vi har fundet.

Løsning 6.5.1

- Funktionerne f og i er voksende men funktionerne g og h er aftagende.
- $T_2 = 3$
- $T_{\frac{1}{2}} = 2$
- $T_{\frac{1}{2}} = 4$
- $T_2 = 1$

Løsning 6.5.2

- a) Da $0,917 < 1$ er funktionen aftagende, og derfor er det kun halveringskonstanten, der kan bestemmes.
- b) $T_{\frac{1}{2}} \approx 8$.

Løsning 6.5.3

- a) I en eksponentiel funktion er det alene a som bestemmer, hvor meget funktionen vokser/aftager. Da fordoblings og halveringskonstanter kun udtrykker noget om væksten er det ikke så underligt at de kun afhænger af a

Løsning 6.5.4

- a) $T_{\frac{1}{2}} = 4,98$
- b) $T_2 = 0,63$
- c) Man kan ikke finde fordoblingskonstanten for en aftagende funktion dit fjols.

Løsning 6.5.5

- a) $T_2 = 1,98$
- b) Moores lov siger:

Antallet af transistorer pr. mikroprocessor fordobles hvert andet år.

Det kan omformuleres til at fordoblingskonstanten er 2. Vi fik den til $1,98 \approx 2$. Så ja, Moores lov er bekræftet. Utroligt at udviklingen af computerkraft følger en så simpel lov, hva?

Løsning 7.1.1

- a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$
- b) $f^{-1}(x) = 3x$
- c) $f^{-1}(x) = x - 7$
- d) $f^{-1}(x) = x$

Løsning 7.1.2

a) $f^{-1}(7) = 3$

Løsning 7.1.3

a) $f^{-1}(f(3)) = 3$

b) $f(f^{-1}(11)) = 11$

Løsning 7.1.4

a) Invertibel

b) Ikke invertibel

c) Ikke invertibel

d) Invertibel

e) Ikke invertibel

f) Invertibel

Løsning 7.1.5

a) Eksponentielle funktioner stiger eller falder med en fast procent. De er altså enten voksende eller aftagende i hele deres definitionsmængde og dermed invertible.

Løsning 7.1.6

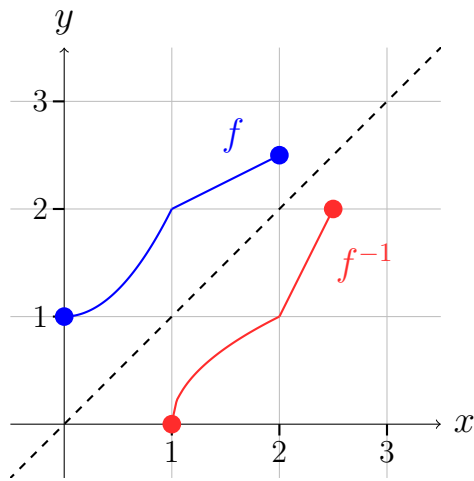
a) $\text{Dm}(f^{-1}) =]-\infty; \infty[$ og $\text{Vm}(f^{-1}) =]0; \infty[$

Løsning 7.1.7

a) $\text{Dm}(f^{-1}) =]2; 3]$ og $\text{Vm}(f^{-1}) =]1; 4]$

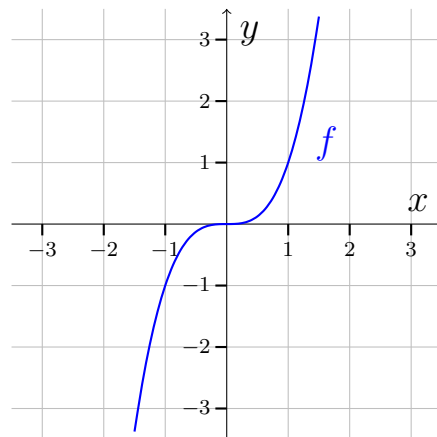
Løsning 7.1.8

a)



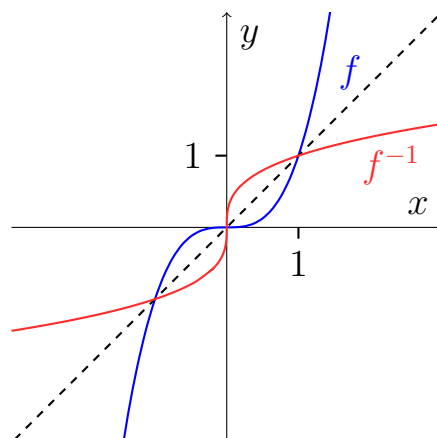
Løsning 7.1.9

a)



b) f er voksende, så den er invertibel.

c)



Det er kunst.

d) $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$

Løsning 7.2.1

a) $f^{-1}(x) = x - 13$

b) $f^{-1}(x) = x$

c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x$

d) $f^{-1}(x) = -x$

Løsning 7.2.2

a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$. Fik du den forkert? No worries, det er var også meningen.

Løsning 7.2.3

a) $f^{-1}(x) = 2x - 4$

b) $f^{-1}(x) = -x + 3$

Løsning 7.2.4

a) 80

b) 40

c) $p(x) = -\frac{1}{2}x + 40$

Løsning 7.2.5

a) En funktioner er invertibel, hvis den har en omvendt funktion.

b) Der må kun være én x -værdi til hver y -værdi.

c) Lineære funktioner med en hældning på 0 er ikke invertible.

Løsning 7.3.1

a) Sagde du "LN af x ", "LN til x " eller "LN x "? Jeg håber ikke du sagde "L af N ". Det er nemlig en almindelig fejl.

b) Sagde du "log af x ", "log til x " eller "log x "?

Løsning 7.3.2

- a) I sidste afsnit så vi (øvelse 7.1.5) at alle eksponentielle funktioner er invertible. Altså må $f(x) = 10^x$ og $f(x) = e^x$ også være invertible, dvs. de har omvendte funktioner.

Løsning 7.3.3

- a) $\log(1000) = 3$
b) $\log(10) = 1$
c) $\ln(e^3) = 3$
d) $\ln(e) = 1$
e) $\ln(1) = 0$
f) $\log(0,1) = -1$

Løsning 7.3.4

- a) $e^{\ln(5)} = 5$
b) $\ln(e^3) = 3$
c) $\log(10^7) = 7$
d) $10^{\log(2)} = 2$

Løsning 7.3.5

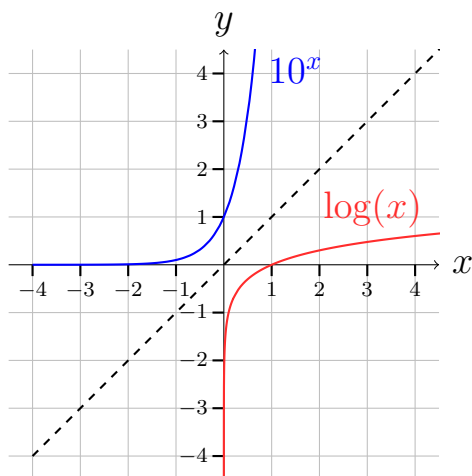
- a) $x = 1000$
b) $x = 7,39$
c) $x = e = 2,72$

Løsning 7.3.6

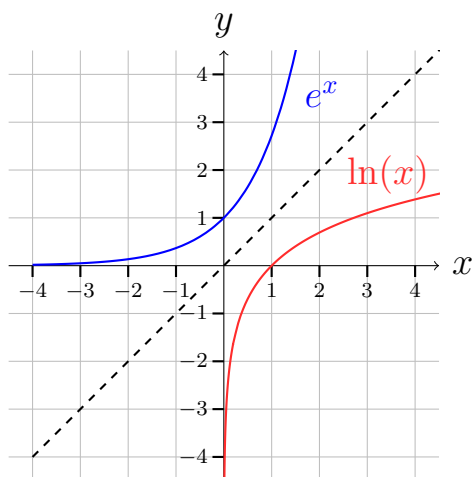
- a) $(0,14; -1)$

Løsning 7.3.7

- a) Vi husker at $\log(x)$ er omvendt funktion til $f(x) = 10^x$, så dens graf fremkommer ved at spejle i $y = x$.



- b) Vi husker at $\ln(x)$ er omvendt funktion til $f(x) = e^x$, så dens graf fremkommer ved at spejle i $y = x$.



Løsning 7.3.8

- a) Da logaritmefunktioner er omvendte funktioner til eksponentielle funktioner vil definitions og værdimængden svarer til definitions og værdimængden for eksponentielle funktioner, bare byttet rundt. Altså bliver definitionsmængden for logaritmefunktionerne $]0; \infty[$ og værdimængden bliver $] - \infty; \infty[$.

Løsning 7.3.9

- a) Nulpunkterne bestemmes ved at løse ligningen $\log(x) = 0$. Vi bruger funktion $f(x) = 10^x$ på begge sider:

$$10^{\log(x)} = 10^0$$

Da $\log(x)$ er omvendt funktion til $f(x) = 10^x$ fås

$$x = 10^0$$

dvs.

$$x = 1$$

- b) Nulpunkterne bestemmes ved at løse ligningen $\ln(x) = 0$. Vi bruger funktion $f(x) = e^x$ på begge sider:

$$e^{\log(x)} = e^0$$

Da $\ln(x)$ er omvendt funktion til $f(x) = 1e^x$ fås

$$x = e^0$$

dvs.

$$x = 1$$

Løsning 7.3.10

- a) $\log(1) = 0$
- b) $\log(10000) = 4$
- c) $\ln(e^{27}) = 27$
- d) $\ln(\frac{1}{e}) = -1$
- e) $\log(200) - \log(20) = 1$
- f) $\ln(\frac{1}{2}e) + \ln(2e) = 2$

Løsning 7.3.11

- a) $\log(7) = 0,85$

Løsning 7.4.1

- a) $x = 0,74$
- b) $x = 3,56$
- c) $x = 2,37$

Løsning 7.4.2

a) $x = -1,32$

Løsning 7.4.3

a) $x = 2,41$

b) $x = 1,21$

Løsning 7.4.4

a) $(0,92; 13,29)$

Løsning 7.4.5

a) $f(x) = 0,0001 \cdot 2^x$

b) 42 gange. Utroligt, right?

Løsning 7.5.1

a) Vis mig det

Løsning 7.5.2

a) Vis mig det

b) Vis mig det

Løsning 8.1.1

a) 0,0021

Løsning 8.1.2

a) 268,78 kr.

Løsning 8.1.3

a) Rentefoden er 3% pr. termin.

Løsning 8.1.4

a) Det var 20.000 kr. hun satte ind.

Løsning 8.1.5

a) 8 år

Løsning 8.1.6

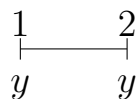
a) 386,97 kr.

Løsning 8.1.7

a) 3138,43 kr.

Løsning 8.2.1

a) Der er $n - 1$. Hvis f.eks. $n = 2$ har vi to ydelser, men der er kun 1 termin fordi der kun er et mellemrum mellem ydelserne:



Løsning 8.2.2

- a) $r = 0,005$
- b) Lille Gysse har 5766,07 kr. på sin konto efter 27 indbetalinger.
- c) Lille Gysse har indbetalt 5400 kr.
- d) Lille Gysse har fået tilskrevet 366,07 kr. i rente

Løsning 8.2.3

a) 0,01%

Løsning 8.2.4

a) Hun satte 100 kr. ind hver måned.

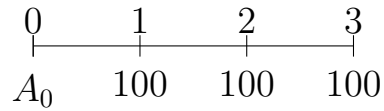
Løsning 8.2.5

a) Michael har fortaget 45 indbetalinger dvs. der er gået 11 år.

Løsning 8.3.1

a) Der er også n . I modsætning til annuitetsopsparing er der nemlig ikke nogen ydelse i starten af tidslinjen, så der er lige så mange ydelser som

der er mellemrum. Her er et eksempel hvor $n = 3$. Vi ser at der også er 3 rentetilskrivninger og dermed 3 terminer:



Løsning 8.3.2

a) $A_0 = 1447,48$

Løsning 8.3.3

a) 7 millioner.

Løsning 8.3.4

a) 5%

Løsning 8.3.5

a) $y = 15042,20$ kr.

Løsning 8.3.6

a) 120

b) 10 år

Løsning 8.4.1

a) Tryk på højttalerikonet: [her](#).

Løsning 8.4.2

a)

Termin	Primo restgæld	Ydelse	Rente	Afdrag	Ultimo restgæld
1	150000	19000	10500	8500,00	141500,00
2	141500	19000	9905	9095,00	132405,00
3	132405	19000	9268,4	9731,65	122673,35
4	122673,35	19000	8587,1	10412,87	112260,48
5	112260,4845	19000	7858,2	11141,77	101118,72
6	101118,7184	19000	7078,3	11921,69	89197,03
7	89197,0287	19000	6243,8	12756,21	76440,82
8	76440,82071	19000	5350,9	13649,14	62791,68
9	62791,67816	19000	4395,4	14604,58	48187,10
10	48187,09563	19000	3373,1	15626,90	32560,19
11	32560,19233	19000	2279,2	16720,79	15839,41
12	15839,40579	16948,16	1108,8	15839,41	0,00

b) Gælden er 112.260,48 kr.

c) 12 terminer.

Løsning 8.4.3

a) $y = 10845,72$ kr.

b)

Termin	Primo restgæld	Ydelse	Rente	Afdrag	Ultimo restgæld
1	300000	10845,72	4500	6345,72	293654,28
2	293654,28	10845,72	4404,8	6440,91	287213,37
3	287213,3742	10845,72	4308,2	6537,52	280675,85
4	280675,8548	10845,72	4210,1	6635,58	274040,27
5	274040,2726	10845,72	4110,6	6735,12	267305,16
6	267305,1567	10845,72	4009,6	6836,14	260469,01
7	260469,0141	10845,72	3907	6938,68	253530,33
8	253530,3293	10845,72	3803	7042,77	246487,56
9	246487,5642	10845,72	3697,3	7148,41	239339,16
10	239339,1577	10845,72	3590,1	7255,63	232083,53
11	232083,5251	10845,72	3481,3	7364,47	224719,06
12	224719,0579	10845,72	3370,8	7474,93	217244,12
13	217244,1238	10845,72	3258,7	7587,06	209657,07
14	209657,0657	10845,72	3144,9	7700,86	201956,20
15	201956,2016	10845,72	3029,3	7816,38	194139,82
16	194139,8247	10845,72	2912,1	7933,62	186206,20
17	186206,202	10845,72	2793,1	8052,63	178153,58
18	178153,5751	10845,72	2672,3	8173,42	169980,16
19	169980,1587	10845,72	2549,7	8296,02	161684,14
20	161684,1411	10845,72	2425,3	8420,46	153263,68
21	153263,6832	10845,72	2299	8546,76	144716,92
22	144716,9184	10845,72	2170,8	8674,97	136041,95
23	136041,9522	10845,72	2040,6	8805,09	127236,86
24	127236,8615	10845,72	1908,6	8937,17	118299,69
25	118299,6944	10845,72	1774,5	9071,22	109228,47
26	109228,4698	10845,72	1638,4	9207,29	100021,18
27	100021,1769	10845,72	1500,3	9345,40	90675,77
28	90675,77454	10845,72	1360,1	9485,58	81190,19
29	81190,19115	10845,72	1217,9	9627,87	71562,32
30	71562,32402	10845,72	1073,4	9772,29	61790,04
31	61790,03888	10845,72	926,85	9918,87	51871,17
32	51871,16947	10845,72	778,07	10067,65	41803,52
33	41803,51701	10845,72	627,05	10218,67	31584,85
34	31584,84976	10845,72	473,77	10371,95	21212,90
35	21212,90251	10845,72	318,19	10527,53	10685,38
36	10685,37605	10845,66	160,28	10685,38	0,00

- c) Vi har beregnet ydelsen med en annuitetsformel. I annuiteter er ydelserne altid lige store. At den sidste ydelse ikke passer helt skyldes, at vi kun kan have to decimaler med i vores ydelse, da øre er den mindste pengeenhed

Løsning 8.4.4

- a) Primo restgæld er det man skylder ved indgangen til terminen, og derfor det man skal betale renter af. Man finder rentebeløbet ved at gange med renten som decimaltal. Altså skal vi sige $(\text{Primo restgæld}) \cdot r$.

- b) Man kunne godt komme til at tro, at ydelsen var det lånet blev formindsket med. Men samtidig med vi betaler ydelsen, kommer der jo også renter på. Renten bliver lagt oven i lånet, så det vi rent faktisk får afdraget med må være ydelsen minus renten.
- c) Primo restgæld er det, vi skylder når vi går ind i terminen. Afdraget er det, vi formindsker lånet med. Altså kan vi finde ultimo restgæld ved at trække afdraget fra primo restgæld.
- d) Det er jo oplagt. Det du skylder ved udgangen af en termin, må være det samme som det, du skylder ved indgangen til den næste termin.
- e) Ved den sidste ydelse skal lånet være betalt helt tilbage. Men udover at betale det vi skylder, (primo restgæld) skal vi også betale renter. Så lægger man de to sammen (primo restgæld og renter), må man få den sidste ydelse.

Løsning 8.4.5

a) $R_{18} = 4487,77$

Løsning 8.5.1

- a) 20
- b) 1.574,52 kr.

Løsning 8.5.2

a) 0,01%

Løsning 8.5.3

a) 5%

Løsning 8.6.1

- a) 1%
- b) 6%
- c) 1%

Løsning 8.6.2

a) 4,07%

- b) 25,44%
- c) 10,38%

Løsning 8.6.3

- a) 2.123,57 kr.
- b) 58 terminer dvs. 4 år og 10 måneder.
- c) 2,02%

Løsning 8.6.4

- a) 0,5%
- b) 6%
- c) 6,17%
- d) 1.500 kr.

Løsning 8.6.5

- a) 6%

Løsning 8.6.6

- a) Den gennemsnitlige rente er på 5,94%
- b) Hun har 1.259,56 kr.

Løsning 8.7.1

- a) 0,0025
- b) 13.974,14 kr.
- c) 16.232,60 kr.
- d) 208 ydelser
- e) 17 år og 4 måneder (hvor han kan få udbetalt 100 kr.).

Løsning 8.7.2

- a) Han skylder 127.159,78 kr.

Løsning 8.8.1

a) Ifølge fremskrivningsformlen er

$$K_n = K_0(1 + r)^n.$$

Vi dividerer nu med K_0 på begge sider:

$$\frac{K_n}{K_0} = (1 + r)^n.$$

Vi tager derefter den n 'te rod på begge sider:

$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = (1 + r).$$

Vi trækker så 1 fra på begge sider:

$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = r,$$

og bytter rundt på højre og venstre side: :

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1.$$

Løsning 8.8.2

a) Ifølge fremskrivningsformlen er

$$K_n = K_0(1 + r)^n.$$

Vi isolerer nu K_0 ved at gange med $(1 + r)^{-n}$ på begge sider:

$$K_n(1 + r)^{-n} = K_0(1 + r)^n(1 + r)^{-n}$$

Vi bruger nu potensregnereglen $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ på højresiden

$$K_n(1 + r)^{-n} = K_0(1 + r)^{n+-n}$$

Vi reducerer

$$K_n(1 + r)^{-n} = K_0(1 + r)^0$$

og bruger reglen $a^0 = 1$ på højresiden

$$K_n(1 + r)^{-n} = K_0$$

Til sidst bytter vi rundt på højre og venstre side:

$$K_0 = K_n(1 + r)^{-n}$$

Løsning 8.8.3

a) følge fremskrivningsformlen er

$$K_n = K_0(1 + r)^n.$$

Vi dividerer nu med K_0 på begge sider:

$$\frac{K_n}{K_0} = (1 + r)^n.$$

Vi skal finde n og åh nej det er jo rigtig dumt for n står i eksponenten. Heldigvis har vi lært om logaritmer, og dem kan vi jo bruge til at fiske n ned. Så vi tager den naturlige logaritme på begge sider:

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \ln((1 + r)^n).$$

Vi benytter reglen $\ln(a^x) = x \ln(a)$ og får:

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \ln(1 + r).$$

Vi dividerer så med $\ln(1 + r)$ på begge sider:

$$\frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1 + r)} = n,$$

og bytter rundt på højre og venstre side:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1 + r)}.$$

Løsning 8.8.4

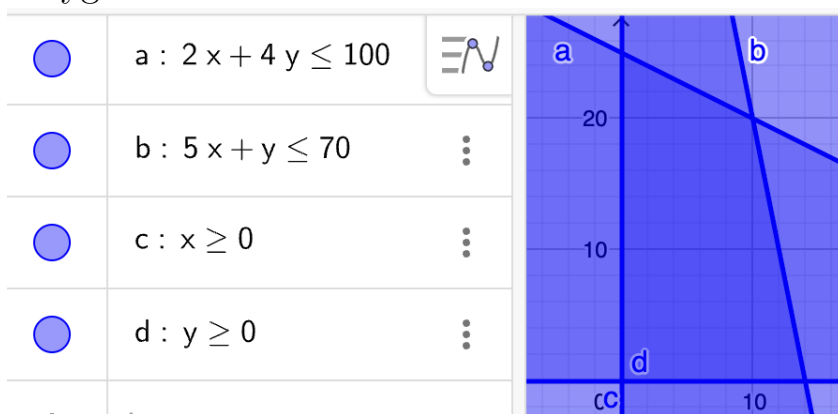
a) Vis det til mig.

Løsning 9.1.1

a)

	PRODUKT A	PRODUKT B	Til rådighed
Arbejdstimer	2 timer	4 timer	100 timer
Råmateriale	5 kg	1 kg	70 kg
Dækningsbidrag	10 kr.	8 kr.	

- b) x er antal producerede PRODUKT A og y er antal producerede PRODUKT B.
- c) $f(x, y) = 10x + 8y$
- d) Polygonområdet er det mørkeste blå område.



- e) Virksomheden skal producere 10 PRODUKT A og 20 PRODUKT B, hvilket giver et dækningsbidrag på 260 kr., hvilket ikke er meget, men der jo også bare et eksempel, så du kan lære metoden.

Løsning 9.1.2

- a) Virksomheden skal stadig producere 10 PRODUKT A og 20 PRODUKT B og vil så få et dækningsbidrag på 360 kr.
- b) Virksomheden skal så producere 14 PRODUKT A og ingen PRODUKT B og vil så få et dækningsbidrag på 840 kr.

Løsning 9.1.3

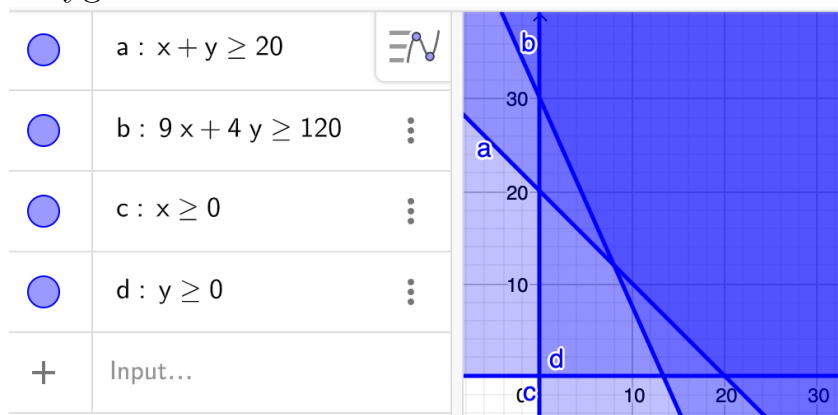
- a)

	Miniskumbananer	Piratos	Minimumskrav
Antal	1	1	20
Vægt	9 g	4 g	120 g
Omkostninger	2 kr.	0,5 kr.	

b) x er antal miniskumbananer i posen og y er antal piratos.

c) $f(x, y) = 2x + 0,5y$

d) Polygonområdet er det mørkeste område:



e) Hun skal putte 30 piratos i hver pose og det vil kosten hende 15 kr. pr. pose.

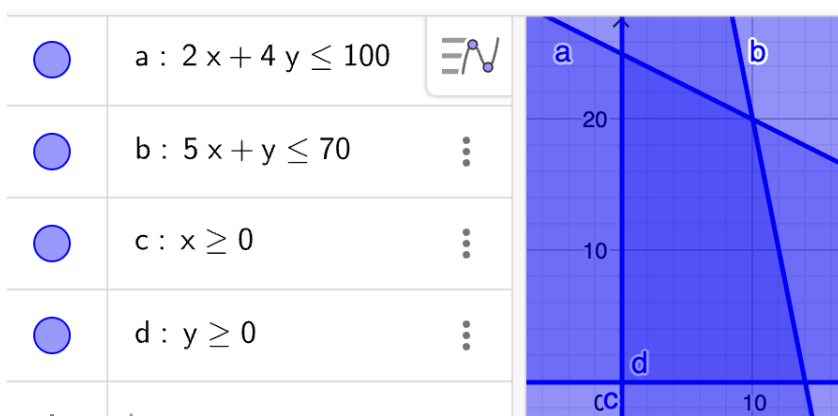
f) Hun skal putte 8 miniskumbananer og 12 piratos i hver pose og det vil koste hende 34 kr.

Løsning 9.2.1

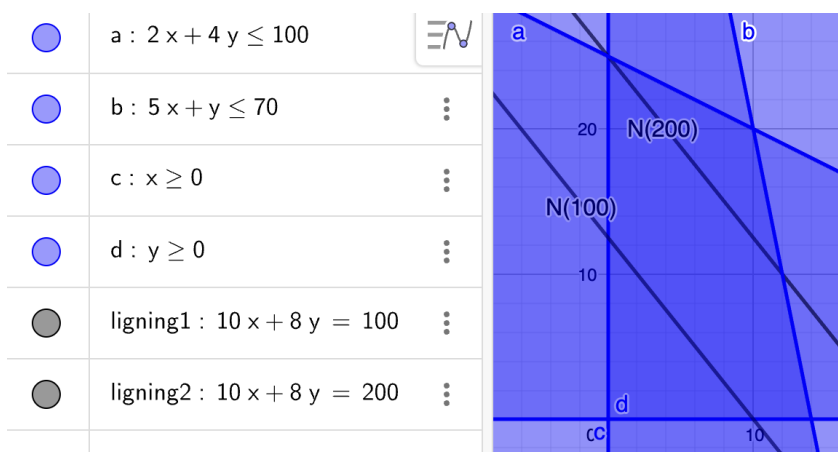
a)

	PRODUKT A	PRODUKT B	Til rådighed
Arbejdstimer	2 timer	4 timer	100 timer
Råmateriale	5 kg	1 kg	70 kg
Dækningsbidrag	10 kr.	8 kr.	

x er antal producerede PRODUKT A og y er antal producerede PRODUKT B. Forskriften er $f(x, y) = 10x + 8y$ og polygonområdet er det mørkeste blå område.

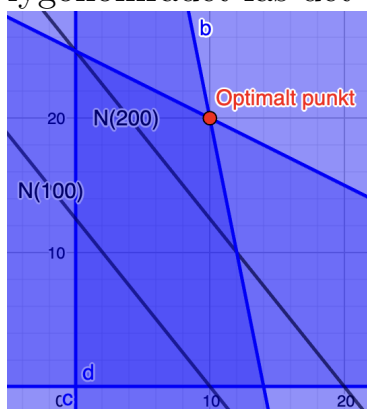


b)



c) Vi kan se at niveauerne vokser i retning skråt til højre.

d) Ved at parallelforskyde niveaulinjerne skråt til højre indtil de slipper polygonområdet fås det optimale punkt:



e) Det optimale punkt har koordinaterne (10, 20).

f) Virksomheden skal producere 10 PRODUKT A og 20 PRODUKT B, og det maksimale dækningsbidrag 260 kr.

Løsning 9.2.2

- a) (10, 20)
- b) (14, 0)
- c) (0, 25)

Løsning 9.2.3

a)

	Miniskumbananer	Piratos	Minimumskrav
Antal	1	1	20
Vægt	9 g	4 g	120 g
Omkostninger	2 kr.	0,5 kr.	

- b) x er antal miniskumbananer i posen og y er antal piratos.
- c) $f(x, y) = 2x + 0,5y$
- d) Hun skal putte 30 piratos (og ingen miniskumbananer) i hver pose og det vil koste hende 15 kr. pr. pose.
- e) Hun skal putte 8 miniskumbananer og 12 piratos i hver pose og det vil koste hende 12 kr.

Løsning 9.3.1

- a) 1. nej, 2. nej.
- b) 1. ja, 2. ja.
- c) 1. ja, 2. ja
- d) 1. ja, 2. nej. Hvis du skal have Mat-A vil du møde den slags funktioner under kvadratisk programmering.

Løsning 9.3.2

- a) $f(2, 3) = -1$

Løsning 9.3.3

- a) Det gør det ikke. Det opfylder 2 af de 3 uligheder.
- b) Det betyder at det er umuligt at producere 9 VARE A og 3 VARE B.

Typisk pga. manglende ressourcer.

Løsning 9.3.4

- a) $2x + 4y + 1 = 0$
- b) Jes den er god nok.
- c) $f(x_0, y_0) = 95$.

Løsning 9.4.1

- a) Hun skal putte 30 piratos i hver pose og det vil koste hende 15 kr. pr. pose.
- b) Hun skal putte 8 miniskumbananer og 12 piratos i hver pose og det vil koste hende 12 kr. pr. pose.
- c) Hun skal putte 20 miniskumbananer i hver pose og det vil koste hende 5 kr. pr. pose.

Løsning 9.5.1

- a) Der skal produceres 6 af hvert produkt.
- b) Dækningsbidraget for OMEGALUL skal lægge imellem 20 kr. pr. stk. og 40 kr. pr. stk., hvis den optimale produktion skal være uændret.
- c) Dækningsbidraget for OMEGALUL må falde med 10 kr. pr. stk. eller stige med 10 kr. pr. stk., hvis dækningsbidraget skal være uændret.
- d) Dækningsbidraget for KEKW må falde med 5 kr. pr. stk. eller stige med 10 kr. pr. stk., hvis dækningsbidraget skal være uændret.

Løsning 9.5.2

- a) Hun skal putte 30 piratos i hver pose.
- b) Hvis prisen på skumbananer falder med mere end 87 øre, skal hun begynde at putte skumbananer i posen også.
- c) Hvis prisen på piratos stiger med mere end 38 øre, skal hun begynde at putte skumbananer i posen også.

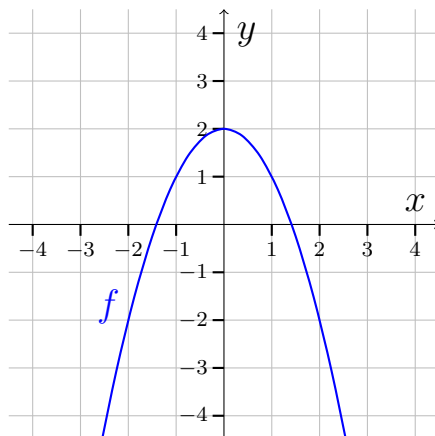
Løsning 10.1.1

- a)

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f'(x)$	-4	-2	-1	0	1	2	4

Løsning 10.1.2

a) Graf



b)

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f'(x)$	4	2	1	0	-1	-2	-4

c) $f(x) = -2x$

Løsning 10.1.3

a) $f'(x) = 2x - 1$

b) $f'(x) = 3$

c) $f'(x) = -1$

d) $f'(x) = 0$

Løsning 10.1.4

a) $f(-1) = -1$ og $f'(-1) = 3$.

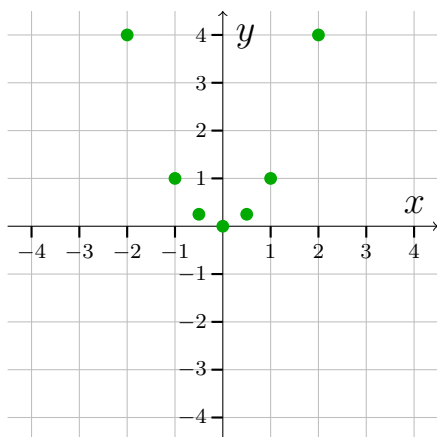
b) $f(3) = 7$ og $f'(3) = 2$ for funktion $f(x) = 2x + 1$.

Løsning 10.1.5

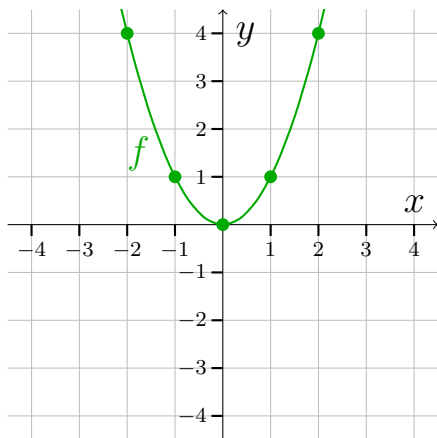
a)

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f'(x)$	4	1	0,25	0	0,25	1	4

b)



c)



d) $f'(x) = x^2$

Løsning 10.1.6

a) Den røde er f og den blå er f'

Løsning 10.1.7

a) Den blå er f og den røde er f'

Løsning 10.1.8

a) Den røde er f og den blå er f'

Løsning 10.1.9

Funktionen $f(x) = x^3$ har differentialkvotienten $f'(x) = 3x^2$.

- a) $f(2) = 8$ og $f'(2) = 12$.
- b) Hældningen på tangenten i punktet $(2, 8)$ er 12.

Løsning 10.2.1

- a) $f'(x) = \frac{1}{x}$
- b) $f'(x) = e^x$

Løsning 10.2.2

- a) $f'(x) = 5x^4$
- b) $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$
- c) $f'(x) = -4x^{-5}$
- d) $f'(x) = 0$
- e) $f'(x) = 2e^{2x}$
- f) $f'(x) = 1$
- g) $f'(x) = 1$
- h) $f'(x) = 0$
- i) $f'(x) = 0$

Løsning 10.2.3

- a) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

Løsning 10.2.4

- a) $h'(x) = 2x$
- b) $h'(x) = -2e^{-2x} - 1$
- c) $f'(x) = 6 \cdot x^2$
- d) $f'(x) = 6x - 2$
- e) $(2 \cdot 3^x + 2 \cdot e^{3x})' = 2 \cdot \ln(3) \cdot 3^x + 6e^{3x}$

Løsning 10.2.5

a) $h'(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \ln(x) + 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2^x + \sqrt{x} \cdot \ln(2) \cdot 2^x = 2^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \ln(2) \cdot \sqrt{x} \right)$

c) $(x^3 \cdot e^x)' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = x^2 \cdot e^x (x + 3)$

Løsning 10.2.6

a) $f \circ g = \ln(2x - 1)$

b) $g \circ f = 2 \ln(x) - 1$

Løsning 10.2.7

a) $f(g(x)) = \sqrt{2x - 1}$

b) $f(g(x)) = e^{x^2+2x}$

c) $f(g(x)) = x^2 + 2x + 4$

d) $f(g(x)) = x^5 + 1$

Løsning 10.2.8

a) $g(x) = x + 2$ og $f(x) = \sqrt{x}$

b) $g(x) = 7x^2 - 2$ og $f(x) = 3^x$

c) $g(x) = x^3 - x^2 + 1$ og $f(x) = x^7$

Løsning 10.2.9

a) $h'(x) = \frac{2}{2x-1}$

b) $h'(x) = (3x^2 + 3) \cdot e^{x^3+3x}$

c) $f'(x) = 8(x^2 + 3x - 1)^7 \cdot (2x + 3)$

d) $(\sqrt{3x^2 + x})' = \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}}$

Løsning 10.2.10

a) $f'(x) = 2x + e^x$

b) $f'(x) = 5 \ln(6) \cdot 6^x$

c) $f'(x) = \ln(x) + 1$

d) $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} + 1$

e) $f'(x) = 4e^{4x} \cdot x^2 + e^{4x} \cdot 2x + \frac{1}{x^2}$

f) $f'(x) = -\frac{7x^6-1}{(x^7-x)^2}$

g) $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

h) $f'(x) = 4x \cdot \ln(4) \cdot 4^{x^2-4}$

Løsning 10.3.1

a) $y = 2x - 1$

b) $y = x - 1$

c) $y = \frac{1}{4}x + 1$

d) $y = \frac{1}{2}x - 0,31$

Løsning 10.3.2

a) $y = 6x - 26$

b) $y = -x - 2$

c) $y = 2x - 1$

d) $y = x + 9$

Løsning 10.3.3

a) $y = -4x - 9$

b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

c) $y = 12x + 16$ og $y = 12x - 16$.

d) Det gør der ikke.

Løsning 10.3.4

a) $y = -2x + 1$ og $y = 6x - 15$

Løsning 10.4.1

a) $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$

Løsning 10.4.2

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $y = 0,71x + 0,71$

Løsning 10.4.3

a) $y = -3x - 4$

Løsning 10.4.4

a) $y = 2x - 1,55$

b) $(2,77; 4)$

Løsning 10.4.5

a) $y = 3x + 1,7$ og $y = 3x - 3,19$.

Løsning 10.6.1

a) $x^2 - 2xy + y^2$

b) $4x^2 + 4xy + y^2$

c) $x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

d) $x^2 - (\Delta x)^2$

Løsning 10.6.2

a) $f(2) = 11$.

b) $f(s+t) = 2s + 2t - 3$

c) $f(a+2) = -a - 1$

d) $f(x-1) = 2x^2 - 4x + 2$

e) $f(\Delta x) = (\Delta x)^2$

f) $f(x + \Delta x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x$

g) $f(2\Delta x) = 5$

Løsning 10.6.3

- a) $\frac{9}{3} = 3$
- b) $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$
- c) $\frac{ax+bx}{cx} = \frac{a+b}{c}$
- d) $\frac{ax+bx}{x} = a + b$
- e) $\frac{x\Delta x + \Delta x}{x^2\Delta x} = \frac{x+1}{x^2}$
- f) $\frac{\Delta x}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\Delta x}$
- g) $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \Delta x$

Løsning 10.6.4

- a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x) = 1$
- b) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 \cdot \Delta x - 1) = -1$
- c) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{5} = 0$
- d) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x}$: eksisterer ikke (bliver uendeligt stort)
- e) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + x \cdot \Delta x) = 2x$

Løsning 10.6.5

- a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a) = a.$
- b) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{2\Delta x}{2\Delta x}\right) = 1.$
- c) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{2\Delta x}{\Delta x}\right) = 2.$
- d) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta x}\right) = 0.$
- e) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x}{\Delta x} + x\right) = 3x + 1.$

Løsning 10.6.6

- a) $f'(x) = -2x$
- b) $f'(x) = 2x$
- c) $f'(x) = 4x$
- d) $f'(x) = 2$

e) $f'(x) = 0$

f) $f'(x) = 6x - 1$

Løsning 10.6.7

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = a$

Løsning 10.7.1

a) Ja

b) Ja

c) Nej

d) Nej

e) Funktionen er diskontinuert i $x = -2$, $x = 3$ og $x = 4$.

f) Funktionen er ikke differentialbel i $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$ og $x = 4$.

g) Funktionen er kontinuert men ikke differentiabel i $x = 2$.

Løsning 10.7.2

a) Kontinuert i $x_0 = 3$, differentiabel i $x_0 = 3$, kontinuert og differentiabel.

b) Ikke kontinuert i $x_0 = 3$, ikke differentiable i $x_0 = 3$, ikke kontinuert og ikke differentiabel.

c) Kontinuert i $x_0 = 3$, differentiable i $x_0 = 3$, ikke kontinuert og ikke differentiabel.

d) Kontinuert i $x_0 = 3$, ikke differentiabel i $x_0 = 3$, kontinuert og ikke i differentiabel.

Løsning 10.7.3

a) Ja, ifølge sætning [10.7.1](#)

Løsning 10.7.4

a) Ikke kontinuert i $x_0 = -1$, ikke differentiabel i $x_0 = -1$, kontinuert, differentiable.

b) Kontinuert i $x_0 = -1$, differentiabel i $x_0 = -1$, kontinuert, differentiable.

- c) Ikke kontinuert i $x_0 = -1$, ikke differentiabel i $x_0 = -1$, ikke kontinuert, ikke differentiable.

Løsning 10.8.1

Spørg mig.

Løsning 11.1.1

- a) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$
- b) $\text{Vm}(f) = \mathbb{R}$
- c) $x = -2$, $x = 0$ og $x = 1$
- d) f er negativ for $x \in]-\infty; -2[\cup]0; 1[$ og f er positiv for $x \in]-2; 0[\cup]1; \infty[$
- e) f er voksende for $x \in]-\infty; -1,2]$, voksende for $x \in [0,5; \infty[$ og f er aftagende for $x \in [-1,2; 0,5]$.
- f) f har lokalt maksimum 2,1 i $x = -1,2$ og lokalt minimum $-0,63$ i $x = 0,5$

Løsning 11.1.2

- a) Fortegn for f :
 f er positiv for $x \in]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$
 f er negativ for $x \in]-2; 3[$
 f er nul når $x = -2$ og når $x = 3$
- b) Fortegn for f :
 f er positiv for $x \in]-4; \infty[$
 f er negativ for $x \in]-\infty; -4[$
 f er nul når $x = -4$
- c) Fortegn for f :
 f er positiv for $x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 f er nul når $x = 0$
- d) Fortegn for f :
 f er negativ

Løsning 11.2.1

- a) Monotoniforhold for f :
 f er voksende for $x \in]-\infty; -1]$ og for $x \in [5; \infty[$.
 f er aftagende for $x \in [-1; 5]$.

- b) Monotoniforhold for f :
 f er aftagende.
- c) Monotoniforhold for f :
 f er voksende for $x \in]-\infty; -1]$.
 f er aftagende for $x \in [-1; \infty[$.
- d) Monotoniforhold for f :
 f er aftagende for $x \in]-\infty; 3]$
 f er voksende for $x \in [3; \infty[$

Løsning 11.2.2

Bestem ved beregning monotoniforholdene for følgende funktioner:

- a) Monotoniforhold for f :
 f er voksende for $x \in]0; 2]$
 f er aftagende for $x \in [2; \infty[$
- b) Monotoniforhold for f :
 f er voksende.
- c) Monotoniforhold for f :
 f er aftagende for $x \in]-\infty; 2]$.
 f er voksende for $x \in [2; 3[$

Løsning 11.3.1

- a) f har et globalt minimum i $x = 4$ med minimumsværdi -13 .
- b) f har ingen ekstrema
- c) f har et lokalt maksimum i $x = -1$ med maksimumsværdi 17 .
 f har et lokalt minimum i $x = 2$ med minimumsværdi -10 .
- d) f har ingen ekstrema.

Løsning 11.3.2

- a) f har et globalt maksimum i $x = 1$ med maksimumsværdi 2 .
 f har et globalt minimum i $x = -1$ med minimumsværdi -2 .
 f har et lokalt minimum i $x = 2$ med minimumsværdi 1 .
- b) f har et globalt maksimum i $x = 0$ med maksimumsværdi 1 .
- c) f har et globalt minimum i $x = 0$ med minimumsværdi 0 .

- d) f har et globalt maksimum i $x = 40$ med maksimumsværdi 61360.
 f har et globalt minimum i $x = 2$ med minimumsværdi -10 .
 f har et lokalt maksimum i $x = -1$ med maksimumsværdi 3,5.

Løsning 11.4.1

- a) $V_m(f) = [-4; 4]$
b) $V_m(f) =] - 2; 4]$
c) $V_m(f) = [-0,37; 14,78[$

Løsning 11.5.1

- a) f er konkav
b) f er konveks
c) f er konkav
d) f er konkav

Løsning 11.5.2

- a) f er konkav på $] - \infty; -2]$
 f er konveks på $[-2; \infty[$
b) f er konkav.
c) f er konveks på $] - \infty; 1]$
 f er konkav på $[1; 3]$
 f er konveks på $[3; \infty[$

Løsning 11.5.3

- a) $f''(x) = 6x$
b) $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Løsning 11.5.4

- a) f er konveks i $] - \infty; 3]$
 f er konkav i $[3; \infty[$
b) f er hverken konkav eller konveks.
c) f er konkav i $] - \infty; -3]$

f er konveks i $[-3; 0]$
 f er konkav i $[0; \infty[$

d) f er konveks

Løsning 11.5.5

- a) f har et vendepunkt i $(3, 57)$ og vendetangent med ligningen $y = 27x - 24$
- b) f har ingen vendepunkter eller vendetangenter.
- c) f har vendepunkterne $(-3; 62,5)$ og $(0, 4)$.
 f har vendetangenterne $y = -33x - 36,5$ og $y = -6x + 4$
- d) f har ingen vendepunkter eller vendetangenter.

Løsning 11.5.6

- a) $\text{Dm } f =]0; \infty[$
- b) $\text{Vm } f =] - 20; \infty[$
- c) Nulpunkter: $x_1 = 2$ og $x_2 = 5$
- d) Fortegn:
 f er negativ i $]0; 2[\cup]2; 5[$
 f er positiv i $]5; \infty[$
 f er nul i $x = 2$ og $x = 5$
- e) Monotoniforhold:
 f er voksende i $]0; 2]$ og $[4; \infty[$.
 f er aftagende i $[2; 4]$
- f) Ekstrema:
 f har lokalt maksimum i $x = 2$ med maksimumsværdi 0
 f har lokalt minimum $x = 4$ med minimumsværdi -4
- g) Krumningsforhold:
 f er konkav i $]0; 3]$ og konveks i $[3; \infty[$
- h) Vendepunkter og vendetangenter:
 f har vendepunkt i $(3, -2)$ med vendetangent $y = -3x + 7$

Løsning 11.5.7

- a) Facit er din forståelse. Forstår du det?

Løsning 11.6.1

- a) Funktion f har nulpunkt i $x = -1,31$
- b) Ekstrema:
 f har lokalt maksimum i $x = -0,55$ med maksimumsværdi 5,16.
 f har lokalt minimum i $x = 0$ med minimumsværdi 5.

Løsning 11.6.2

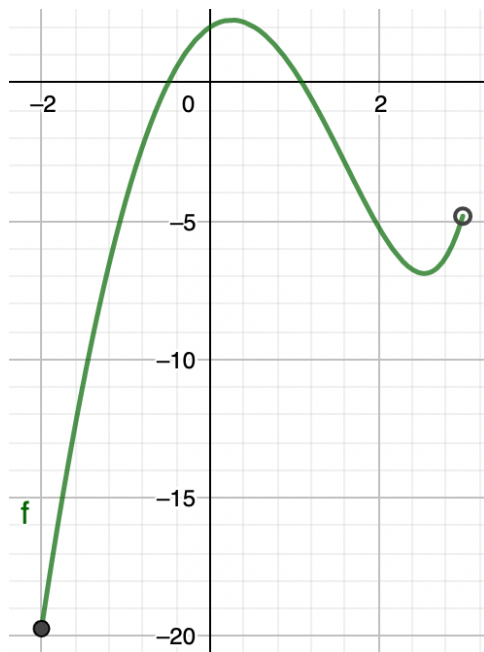
- a) Fortegn:
 f er negativ for $x \in]-\infty; -1,31[$
 f er positiv for $x \in]-1,31; \infty[$
 f er nul for $x = -1,31$
- b) Monotoniforhold:
 f er voksende for $x \in]-\infty; -0,55]$
 f er aftagende for $x \in [-0,55; 0]$
 f er voksende for $x \in [0; \infty[$
- c) $V_m f = \mathbb{R}$

Løsning 11.6.3

- a) $D_m(f) = [-2; 3[$
- b) $V_m(f) = [-19,73; 2,26]$
- c) $x_1 = -0,49$ og $x_2 = 1,09$
- d) Fortegn:
 $f(x) > 0$ når $x \in]-0,49; 1,09[$
 $f(x) < 0$ når $x \in [-2; -0,49[\cup]1,09; 3[$
 $f(x) = 0$ når $x = -0,49$ eller $x = 1,09$
- e) Monotoniforhold:
 f er voksende i intervallerne $[-2; 0,26]$ og $[2,54; , 3[$
 f er aftagende i intervallet $[0,26; 2,54]$
- f) Ekstrema:
 f har globalt minimum i $x = -2$ med minimumsværdi $-19,73$
 f har globalt maksimum i $x = 0,26$ med maksimumsværdi $2,26$
 f har lokalt minimum i $x = 2,54$ med minimumsværdi $-6,9$

Løsning 11.6.4

a)



Løsning 11.6.5

- a) f er konkav for $x \in]-\infty; 2,06]$.
 f er konveks for $x \in [2,06; \infty[$.
- b) Der er en vendetangent: $y = 1,23x + 2,46$

Løsning 12.1.1

- a) $x_4 = 5$

Løsning 12.1.2

- a) $h_3 = 3$

Løsning 12.1.3

- a) $f_5 = 0,1$
- b) At $f_5 = 0,1$ betyder at 10% af de unge brugte 9 timer på sport .

Løsning 12.1.4

- a) $f_2 = 0,4$
- b) At $F_2 = 0,4$ betyder at 40% af de unge dyrkede sport højst 2 timer om

ugen.

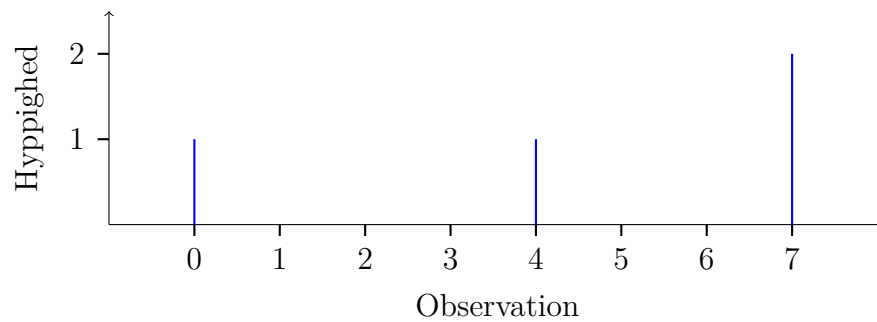
Løsning 12.1.5

a)

Observation (x_i)	Hyppighed (h_i)	Frekvens (f_i)	Summeret frekvens (F_i)
0	1	0,25	0,25
4	1	0,25	0,5
7	2	0,5	1

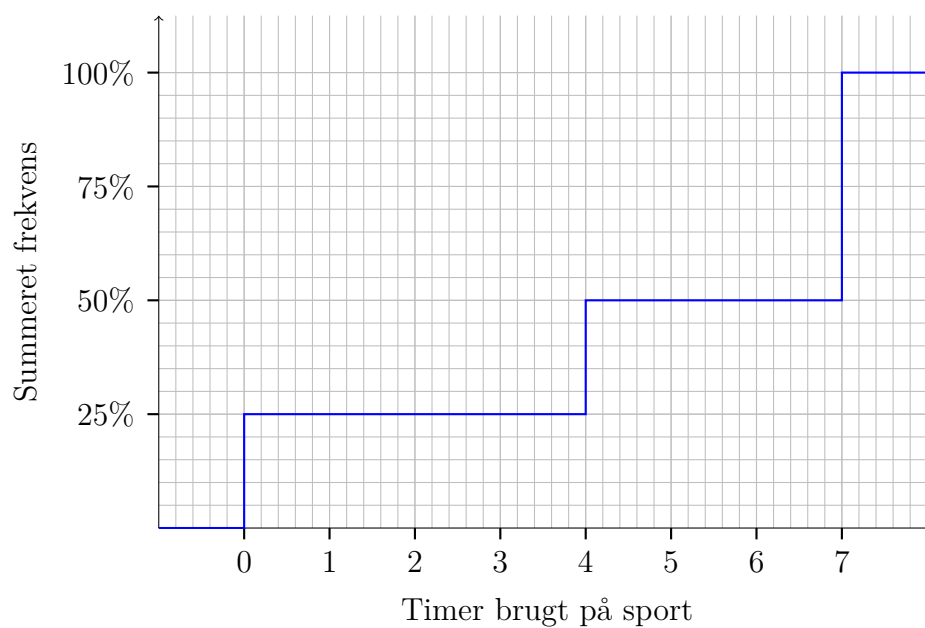
b)

Pindediagram



c)

Trappediagram



d) $x_{0,62} = 7$

e) Det betyder at mindst 62% af observationerne var på 7 eller derunder.

Løsning 12.2.1

a) Nej

b) Ja. Hvorfor siger du det så forkert?

Løsning 12.2.2

a)

Observation (x_i)	Hyppighed (h_i)	Frekvens (f_i)	Summeret frekvens (F_i)
0	1	0,25	0,25
4	1	0,25	0,50
7	2	0,5	1

b) 7

c) $\min = 0$ og $\max = 7$

d) 7

e) 0

f) (0, 4, 7)

g) 4

h) 7

i) 4,5

j) 8,25

k) 2,87

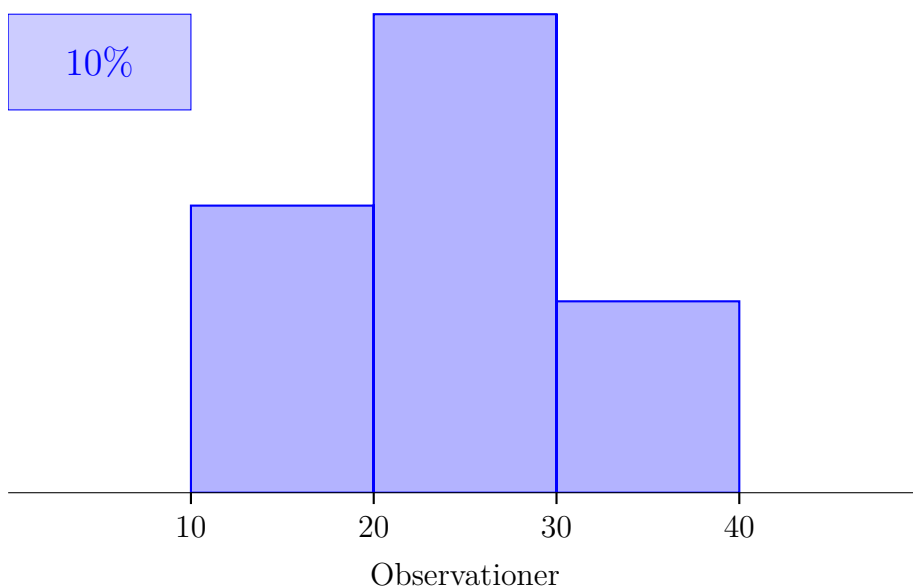
Løsning 12.3.1

a)

Interval	intervalmidtpunkt(m_i)	Hyp. (h_i)	Frekv. (f_i)	Sum. frekv. (F_i)
]10; 20]	15	6	0,3	0,3
]20; 30]	25	10	0,5	0,8
]30; 40]	35	4	0,2	1

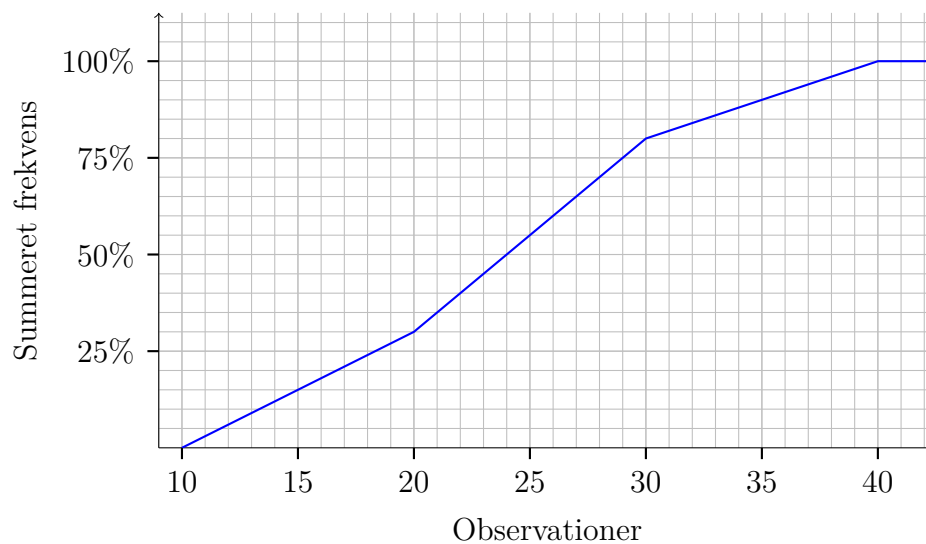
b)

Histogram



c)

Sumkurve



- d) 40%-fraktilen er 22 og det betyder at 40% af observationerne er har en værdi på 22 eller derunder.
- e) Kvartilsættet aflæses til at være ca. (18, 24, 29) og det betyder løst sagt at en fjerdedel af observationerne er under 18, en halvdelen under 24 og en fjerdedel af over 29.
- f) Kvartilafstanden er 11.

Løsning 12.4.1

a)

Interval	intervalmidtpunkt(m_i)	Hyp. (h_i)	Frekv. (f_i)	Sum. frekv. (F_i)
]10; 20]	15	6	0,3	0,3
]20; 30]	25	10	0,5	0,8
]30; 40]	35	4	0,2	1

- b) Typeintervallet er]20; 30].
- c) Gennemsnittet er 24.
- d) $\sigma^2 = 49$.
- e) Standardafvigelsen er på 7, hvilket kan fortolkes som at den typiske observation afviger med 7 fra gennemsnittet.

Løsning 12.5.1

a) FLOT.

Løsning 12.5.2

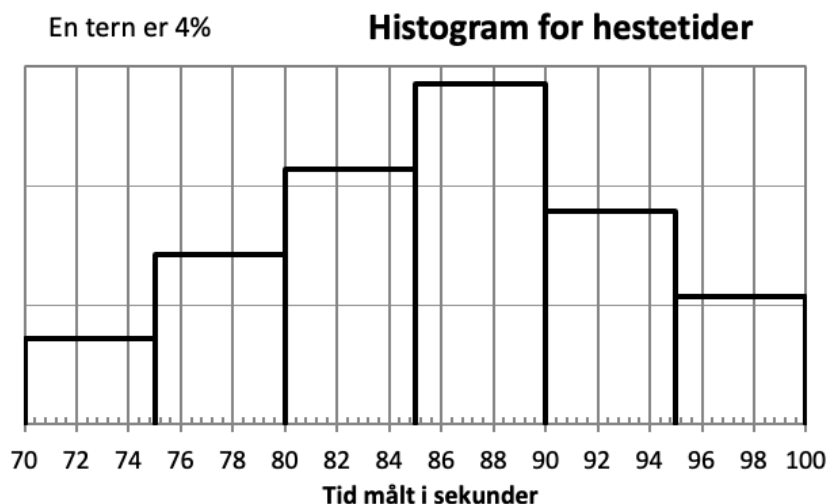
- a) 28
- b) 13
- c) 65,93

Løsning 12.5.3

- a) Nope, det er der ikke.
- b) Screenshot fra WordMat-statistik:

Grupperet optælling		
Start	Slut	Hyppighed
70	75	2
75	80	4
80	85	6
85	90	8
90	95	5
95	100	3

c) Screenshot fra WordMat-statistik:



- d) Mindsteværdien er 74 og største værdien er 98. Det betyder at den hurtigste hest brugt 74 sekunder, mens den langsomste hest brugte 98 sekunder.
- e) Variationsbredden er på 24, hvilket betyder at den hurtigste hest var 24 sekunder hurtigere end den langsomste.
- f) Typeintervallet er $]85; 90]$
- g) Kvartilsættet er $(83, 86, 93)$ og det betyder løst sagt at den hurtigste fjerdedel af hestene kom under 83 sekunder, mens halvdelen var hurtigere en 86 sekunder. Den langsomste fjerdedel brugte over 93 sekunder.
- h) Kvartilafstanden er 10 hvilket svarer til tidsforskellen på den hurtigste og langsomste hest blandt de midterste 50%.
- i) $\bar{x} = 86,4$
- j) $\sigma^2 = 46,5$
- k) $\sigma = 6,8$, hvilket kan fortolkes som at den typiske hest red på 86 ± 7 sekunder.

Løsning 12.7.1

a) $\sum_{i=1}^5 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

b) $\sum_{i=4}^6 (i^2 - i) = 4^2 - 4 + 5^2 - 5 + 6^2 - 6 = 62$

Løsning 12.7.2

a) $\sum_{i=1}^5 (3 \cdot i)$

b) $\sum_{i=1}^6 2^i$

Løsning 12.7.3

a)

$$\sum_{i=1}^k (x_k \cdot h_k) = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \cdots + x_k \cdot h_k$$

Løsning 12.7.4

a) $\sigma^2 = \sum_{i=1}^k ((x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i)$

Løsning 12.7.5

a) $\sigma^2 = 8,25$

b) $\sigma = 2,87$

Løsning 12.7.6

a) $\text{MAD} = 2,5$

b) $\sigma = 2,87$ og $\text{MAD} = 2,5$. Standardafvigelsen er altså lidt højere.

Løsning 13.1.1

a) $5! = 120$

b) $0! = 1$

Løsning 13.1.2

a) Der er $10! = 3628800$ måder at lave køen på (overraskende mange hva?)

Løsning 13.1.3

a) Der er 20 muligheder.

Løsning 13.1.4

a) JA!

Løsning 13.2.1

a) F.eks., et terningkast, et kast med en mønt eller når man fisker ænder i Tivoli (men jeg synes aldrig man vinder uhhuhuu)

Løsning 13.2.2

a) Udfald: $u_1 = \text{plat}$, $u_2 = \text{krone}$.

b) Udfaldsrum: $U = \{\text{plat}, \text{krone}\}$

Løsning 13.2.3

Forklar hvad de to krav i definitionen af en sandsynlighedsfunktion udtrykker:

a) Sandsynligheden for et udfald er altid et ikke-negativt tal (positivt eller nul).

b) Sandsynlighederne lagt sammen skal give 100%.

Løsning 13.2.4

a)

u	plat	krone
$P(u)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Løsning 13.2.5

a)

u	A	L. Liste	Samarb.	V	L. Borger	O	C
$P(u)$	0,231	0,244	0,116	0,161	0,101	0,092	0,055

Løsning 13.2.6

a) Begge to. $P(u) \geq 0$ for alle $u \in U$ er ikke opfyldt i det at $P(u_2) < 0$ og $P(u_1) + P(u_2) + \dots + P(u_n) = 1$ er ikke opfyldt, da sandsynlighederne ikke giver 1 tilsammen.

Løsning 13.2.7

- a) Sandsynlighed for at slå 6 med terningen er $\frac{1}{4}$.

Løsning 13.3.1

- a) $A = \{\square, \blacksquare, \blacksquare\}$

Løsning 13.3.2

- a)

$$\begin{aligned} P(\{\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare\}) &= P(\blacksquare) + P(\blacksquare) + P(\blacksquare) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Løsning 13.3.3

- a) Ikke disjunkte
b) Ikke disjunkte
c) Ikke disjunkte. Haha ingen af dem var disjunkte.

Løsning 13.3.4

Bestem som i eksempel 13.3.4 sandsynligheden for at få en af hændelserne i følgende par af hændelser.

- a) Sandsynligheden er $\frac{2}{3}$.
b) Sandsynligheden er $\frac{5}{6}$.

Løsning 13.3.5

- a) Komplementære
b) Ikke komplementære
c) Ikke komplementære

Løsning 13.3.6

- a) Den komplementære hændelse er ”eleven taber”
- b) 42%
- c) 42%

Løsning 13.3.7

- a) Uafhængige
- b) Ikke uafhængige, fordi når vi trækker det andet kort vil antallet af klør i kortspillet afhænge af om vi har trukket en klør som det første kort. Så sandsynligheden for at trække en klør i andet træk afhænger altså om vi får en klør i første.

Løsning 13.3.8

- a) Sandsynligheden for at få både krone og en 6'er er $\frac{1}{12}$

Løsning 13.3.9

- a) nej

Løsning 13.3.10

- a) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
- b) $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Løsning 13.3.11

- a)

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\&= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Løsning 13.4.1

- a) $P(X = 4) = \frac{1}{6}$

Løsning 13.4.2

a)

x	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Løsning 13.4.3

a) Den manglende sandsynlighed er $\frac{1}{8}$

Løsning 13.4.4

a) $E(X) = 8$

b) $\text{Var}(X) = 2$

c) $SD(X) \approx 1,41$

Løsning 13.4.5

a) $E(X) = 3,5$

b) $\text{Var}(X) \approx 2,92$

c) $SD(X) \approx 1,71$

Løsning 13.4.6

a)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p_i \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 1 + 2 + 2 \\ &= 5 \end{aligned} \tag{17.1}$$

Løsning 14.1.1

a) Ved kast med en terning er antallet af øjne en stokastisk variabel. Hvis vi f.eks. slå en 5'er så er $X = 5$

b) Ved kast med to terninger er summen af antal øjne en stokastisk variable. Hvis den ene terning er en 4'er og den anden er en 6'er, så bliver $X = 4 + 6 = 10$.

- c) Ved kast med en mønt kan vi definere $X = 0$, hvis udfaldet er ”plat” og $X = 1$, hvis udfaldet er ”krone”.

Løsning 14.1.2

- a) 1
b) 1 (fordi vi har fået 1 6'er)

Løsning 14.1.3

- a) ”krone” er succes og ”plat” er fiasko
b) $n = 10$
c) $p = \frac{1}{2}$
d) X kan være $0, 1, 2, 3, \dots, 10$

Løsning 14.1.4

- a) Lader vi X være antallet af kalendere med gevinst får vi en binomialfordelt stokastisk variabel med $n = 6$ og $p = \frac{1}{3}$

Løsning 14.1.5

- a) Det er en stokastisk variabel som angiver antallet af succeser i n uafhængige forsøg med samme successandsynlighed p .
b) Det betyder at X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 7$ og sandsynlighedsparameter $p = \frac{1}{3}$

Løsning 14.1.6

- a) $P(X = 6) = 0,11$

Løsning 14.1.7

- a) $P(X = 2) = 0,31$
b) Sandsynligheden for en æske med 1 defekt vare er 2,35%
c) Sandsynligheden for en æske uden defekte varer er 97,6%
d) Sandsynligheden er 33%

Løsning 14.1.8

a) $P(X \leq 2) = 78\%$

Løsning 14.1.9

a) $P(X \geq 1) = 84\%$

b) $P(X \leq 4) = 96,9\%$

c) $P(X \geq 2) = 65\%$

Løsning 14.1.10

a) Det er klart at $E(X) = 5$.

b) Vi har $SD(X) = 1,6$, men det er svært at gætte præcist. Et gæt på mellem 1 og 3 er et godt gæt.

Løsning 14.1.11

a) $n = 8$ og $p = 0,4$

b) $P(X = 1) = 0,09$

c) $E(X) = 3,2$, $\text{Var}(X) = 1,92$ og $SD(X) = 1,39$.

Løsning 14.1.12

a) Det bedste gæt er middelværdien og den er på 2.

Løsning 14.2.1

a) Jeg kunne skrive en forklaring... men den ville være sværere at forstå end at prøve sig frem.

Løsning 14.2.2

a) $P(X = 6) = 0,08$

b) $P(X \leq 4) = 0,72$

c) $P(X \geq 6) = 0,12$

d) $P(3 \leq X \leq 9) = 0,75$ og det betyder sandsynligheden for at få mellem 3 og 9 succeser.

e) Middelværdien $E(X) = 3,6$

f) Standardafvigelsen $SD(X) = 1,59$

Løsning 14.2.3

- a) Chancen for de alle spirer er 4,4%.
- b) Risikoen for at højst 5 frø spirer er 0,04%.
- c) Sandsynligheden for at mindst halvdelen spirer er 99,76%
- d) Han kan forvente at se 11 smukke blomster (middelværdien). Peace.

Løsning 14.2.4

- a) $P(X \leq 3) = 0,65$
- b) $P(X < 4) = 0,65$
- c) $P(X > 2) = 0,59$
- d) $P(1 < X \leq 5) = 0,74$
- e) $E(X) = 3$, $\text{Var}(X) = 2,70$ og $SD(X) = 1,64$

Løsning 14.2.5

- a) X er antallet af rigtige svar, $n = 20$, $p = 0,2$ og $X \sim b(20; 0,2)$.
- b) Sandsynligheden for at bestå er 0,06%. Desværre.
- c) Man kan forvente at gætte rigtigt på ca. 4 spørgsmål.

Løsning 14.2.6

- a) $P(X = 23) = 0,0791$
- b) $P(X = 23) = 0,0778$, så de er da riiimelig tæt på hinanden, og n var ikke engang særlig stor.

Løsning 14.2.7

- a) $P(X \geq 60100) = 0,2583$

Løsning 15.1.1

- a) Kontinuert
- b) Kontinuert (man kan også sige diskret. Hvorfor?)

- c) Kontinuert
- d) Diskret

Løsning 15.1.2

- a) Området mellem grafen og x -aksen er en trekant med arealet:

$$\frac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinje} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

Da arealet er 1 er det en tæthedsfunktion.

Løsning 15.1.3

Det forventes at du kan ramme rigtigt med en decimals præcision.

- a) $P(X \geq 5) = 0,5$
- b) $P(5 \leq X \leq 6) \approx 0,34 \approx 0,3$
- c) $P(X \geq 6) \approx 0,16 \approx 0,2$

Løsning 15.1.4

Det forventes at du kan ramme rigtigt med en decimals præcision.

- a) $P(2 \leq X \leq 6) = 0,5$
- b) $P(2 < X < 9) = 0,75$
- c) $P(X \geq 8) = 0,25$
- d) $P(X \leq 5,5) = 0,5$

Løsning 15.2.1

- a) Graf 1 og 2 kan ikke være tæthedsfunktioner for normalfordelingen. Graf 1 er ikke klokkeformet og Graf 2 er ikke symmetrisk.

Løsning 15.2.2

- a) $P(X \leq 2) = 0,5$
- b) $P(X \geq 2) = 0,5$
- c) $P(1,5 \leq X \leq 3) = 0,8$
- d) $P(1 \leq X \leq 1,7) = 0,25$

Løsning 15.2.3

a) $\mu = 2$

Løsning 15.2.4

a) $\mu = 3$

b) $\sigma = 2$

Løsning 15.2.5

a) grøn, rød, blå

b) blå, grøn, rød

Løsning 15.2.6

a) Hun kunne f.eks. vælge at producere sko i størrelserne 6,5-15,5. Så har hun 99,7% af mændene som potentielle kunder.

Løsning 15.2.7

a) Standardnormalfordelingen.

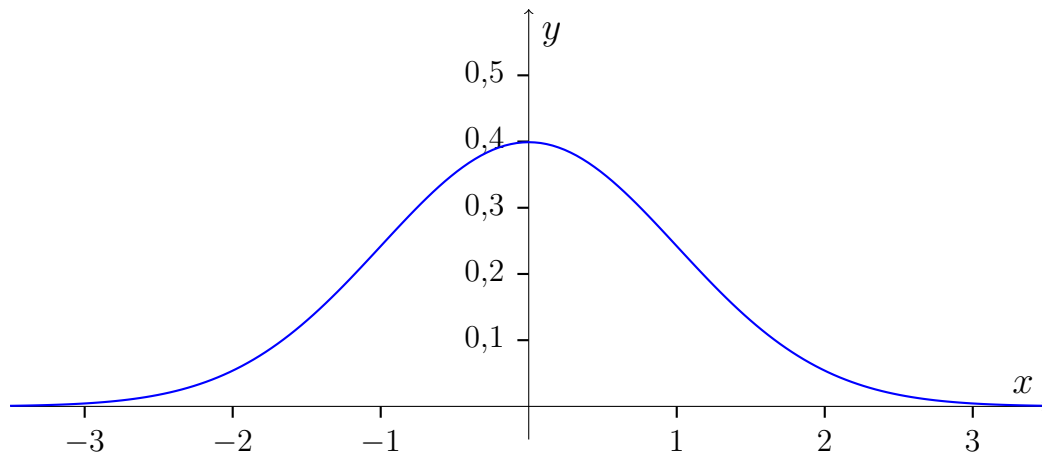
b) $\mu = 0$ og $\sigma = 1$

c) 50%

d) 68%

e) 2,5%

f) Tæthedsfunktion:



Løsning 15.3.1

- a) $P(X \leq 3) = 57,93\%$.
- b) $P(X > 10) = 5,48\%$
- c) $P(-5 \leq X \leq 5) = 64,5\%$.
- d) Sandsynligheden for at X er mindre end 1 er 42,07%.
- e) Sandsynligheden for at X ligger mellem 3 og 6 er 20,89%.

Løsning 15.3.2

- a) 50%
- b) 9,12%
- c) 81,76%

Løsning 15.3.3

- a) 3,71%
- b) 14,2%

Løsning 15.4.1

- a) Udover det første er det kun "Observationssæt 4" som kan siges at være tilnærmelsesvis normalfordelt. Her har vi $\mu = 31$ og $\sigma = 1022$.

Løsning 15.5.1

- a) $F(3) = 60\%$

Løsning 15.5.2

- a) $P(X \leq 15) = 31\%$
- b) $P(15 \leq X \leq 22) = 27\%$
- c) $P(X > 12) = 79\%$

Løsning 15.5.3

- a) En normalfordeling med en lille standardafvigelse har en høj spids tæthedsfunktion. Det betyder at sandsynligheden for at ligge tæt på middelværdien er stor, så når x er tæt på middelværdien stiger $P(X \leq x) = F(x)$

kraftigt.

Løsning 15.5.4

- a) $\mu = 5$
- b) $\sigma = 2$

Løsning 16.1.1

- a) $\hat{p} = 0,16$
- b) Konfidensintervallet er $[0,11; 0,21]$, hvilket betyder at vi med 95%-sikkerhed kan sige, at ungdomsarbejdsløsheden ligger mellem 11% og 21%
- c) Konfidensintervallet er $[0,12; 0,20]$, hvilket betyder at vi med 90%-sikkerhed kan sige, at ungdomsarbejdsløsheden ligger mellem 12% og 20%
- d) Det er 95%-konfidensintervallet. Vi vil senere se på hvorfor.

Løsning 16.1.2

- a) $\hat{p} = 0,425$.
- b) $n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) = 19,55$. Da $19,55 > 9$ er kravet opfyldt.
- c) $[0,32; 0,53]$
- d) Mønten er fair hvis $p = 0,5$. Da $0,5$ ligger i intervallet $[0,32; 0,53]$ kan vi ikke med rimelig sikkerhed afvise at mønten er fair.

Løsning 16.1.3

- a) $B = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
- b) $n = 260$

Løsning 16.1.4

- a) Vi ganger parentesen ud:

$$\hat{p}(1 - \hat{p}) = \hat{p} - \hat{p}^2$$

Vi differentiere $\hat{p} - \hat{p}^2$ med hensyn til $\hat{p}$ (dvs. vi tænker på $\hat{p}$ som vores "x"):

$$(-\hat{p}^2 + \hat{p})' = -2\hat{p} + 1$$

Vi sætter differentialkvotienten lig 0:

$$-2\hat{p} + 1 = 0$$

Vi ser at denne ligning har løsning

$$\hat{p} = 0,5$$

Det er klart, at dette er et maksimum da differentialkvotienten $-2\hat{p} + 1$ er positiv hvis $\hat{p} < 0,5$ og negativ når $\hat{p} > 0,5$.

Løsning 16.2.1

- a) $\hat{\mu} = 6$
- b) $\hat{\sigma} = 4,16$

Løsning 16.2.2

- a) $[-7,1; 8,6]$
- b) Vi kan med 95% sikkerhed sige at middelværdien for populationen ligger i intervallet $[-7,1; 8,6]$.

Løsning 16.2.3

- a) 104
- b) $[92; 116]$
- c) Konfidensintervallet indeholder værdier som er under 100. Det betyder at du ikke kan være sikker på at middelværdien for vægten er over 100. Så du kan desværre ikke købe plantage.

Løsning 16.2.4

- a) $\alpha = 10\%$
- b) $\alpha = 1\%$
- c) $\alpha = 0,1\%$

Løsning 16.2.5

- a) $z_{0,975} = 1,96$

Løsning 16.2.6

- a) Der står ikke noget her:(

Løsning 16.2.7

- a) $[19,6; 20,4]$

Løsning 16.2.8

- a) $[49; 51]$

Løsning 16.2.9

- a) Den er mere spids i toppen og den er langsommere om at flade ud
b) Det gør den. Den ligner fuldstændig standardnormalfordelingen.

Løsning 16.2.10

- a) 1,6766
b) $[4810; 5190]$

Løsning 16.2.11

- a) Den eneste forskel i formlerne er fraktilerne, og når stikprøvestørrelsen (og dermed antallet af frihedsgrader) er stor, så ligner t -fordelingen standardnormalfordelingen og vi får derfor samme værdi for fraktilerne uanset om vi bruger t -fordeling eller standardnormalfordeling. Så de to formler giver samme resultat.
b) Det er ikke overraskende, da estimatet af standardafvigelsen vil komme tættere på populationens standardafvigelse, jo større stikprøven er.

Løsning 16.3.1

- a) $\mu = 100$ og $\sigma = 20$
b) $\bar{X} \sim N(100, \frac{20}{\sqrt{5}})$. Dvs. $\bar{X} \sim N(100; 8,94)$
c) $\bar{x} = 96,6$
d) Betegnelsen $\bar{x}$ blev introduceret i afsnit 12.2. Den betyder bare gennemsnittet af en stikprøven vi har udtaget.

Betegnelsen $\bar{X}$ betyder gennemsnittet som stokastisk variabel. Man kan

tænke på $\bar{X}$ som gennemsnittet af stikprøven **inden** den udtages. Det er klart at gennemsnittet af æblernes vægt, ikke er fastlagt før stikprøven udtages. Det afhænger jo af, hvilke æbler vi lige præcis får fat i. Men det er oplagt, at vi kan udtale os om sandsynligheden for at få et bestemt gennemsnit, og derfor er $\bar{X}$ en stokastisk variabel som har en sandsynlighedsfordeling.

Løsning 17.1.1

- a) H_0 : Der er uafhængighed mellem køn og yndlingsøl.
 H_1 : Der ikke uafhængighed mellem køn og yndlingsøl.

	Kvinde	Mand
b) Carlsberg	6,7586	7,2414
Tuborg	7,2414	7,7586

- c) Der er mere end 5 i hver af de forventede værdier så det kan vi godt (selvom det ikke er ideelt med så få data)
- d) $\chi^2 = 0,0322$
- e) Der er 1 frihedsgrad.
- f) $p = 0,8575$.
- g) Vi forkaster ikke.
- h) Vi kan ikke påvise nogen sammenhæng mellem køn og yndlingsøl.
- i) Det er ingen overraskelse. De observerede hyppigheder kunne ikke være mere lige fordelt!

Løsning 17.1.2

- a) $O_{21} = 14$
- b) $E_{32} = 4,8$
- c) $n = 55$

d)

$$\begin{aligned}O_{\bullet 2} &= \sum_i O_{i2} \\&= O_{12} + O_{22} + O_{32} \\&= 5 + 11 + 6 \\&= 22\end{aligned}$$

e) $E_{12} = \frac{O_{1\bullet} \cdot O_{\bullet 2}}{n} = \frac{18 \cdot 22}{55} = 7,2$

f)

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{ij} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \\&= \frac{(13 - 10,8)^2}{10,8} + \frac{(5 - 7,2)^2}{7,2} + \frac{(14 - 15)^2}{15} \\&\quad + \frac{(11 - 10)^2}{10} + \frac{(6 - 7,2)^2}{7,2} + \frac{(6 - 4,8)^2}{4,8} \\&= 1,79\end{aligned}$$

Løsning 17.2.1

- a) Andelen af personer i undersøgelsen, som fortrækker drømmekage er givet ved $\frac{18}{55}$. Hvis H_0 er rigtig (uafhængighed mellem køn og kage), må andelen af piger, som fortrækker drømmekage være den samme som andelen for de to køn tilsammen. Dvs. andelen af piger, som fortrækker drømmekage, må også være $\frac{18}{55}$. Da det er 22 piger vil vi forvente at antallet af piger i stikprøven, som fortrækker drømmekage, er:

$$\frac{18}{55} \cdot 22 = \frac{18 \cdot 22}{55} = \frac{\text{rækkesum} \cdot \text{søjlesum}}{\text{totalsum}}$$

Løsning 17.2.2

- a) Tælleren i brøken:

$$\frac{(\text{observeret hyppighed} - \text{forventet hyppighed})^2}{\text{forventet hyppighed}}$$

bliver stor, når forskellen mellem de observerede og de forventede værdier er stor. Nævneren afhænger ikke af denne forskel. Så en stor forskel på de observerede og de forventede værdier vil give en stor værdi af brøken.

Løsning 17.2.3

- a) Den er 10%
- b) Det står der ikke noget om i teksten, så det er måske et lidt unfair spørgsmål. Men tænker man sig om, så er det klart, at man ikke kan udtale sig om denne sandsynlighed. Det kommer jo an på, hvor forkert H_0 er. Tester man f.eks. uafhængighed mellem kromosomsammensætning hos mennesker ('XX' eller 'XY') og køn, så er der 0% sandsynlighed for begå en type 2 fejl.... Hmmm den er i hvert fald meget lille... jeg har ingen identitetspolitisk agenda. Peace herfra!

Løsning 17.2.4

- a) 11
- b) 6

Løsning 17.2.5

- a) Det er klart. Antallet af rækker der er tilbage er nemlig:

$$\text{antal rækker} - 1$$

og antallet af søjler der er tilbage er

$$\text{antal søjler} - 1$$

og når man gange de to får man selvfølgelig antallet af felter der er tilbage (felter med observationer kun – ikke medregnet totalerne)

Løsning 17.2.6

- a) Vi forkaster da $8 > 7,81$.

Løsning 17.2.7

- a) $\chi^2_{0,95} = 12,59$

Løsning 17.2.8

- a) Den betegnes $\chi^2_{0,93}$

Løsning 17.2.9

a) H_0 : Der er uafhængighed mellem årgang tilbøjelighed til at gå til en fritidsaktivitet.

H_1 : Der er ikke uafhængighed mellem årgang tilbøjelighed til at gå til en fritidsaktivitet.

b) Forventende værdier:

	Går til en noget	Går ikke til noget	Total
1. år	13,28	16,72	30
2. år	6,64	8,36	15
3. år	7,08	8,92	16
Total	27	34	61

c) $\chi^2 = 3,31$

d) Der er 2 frihedsgrader.

e) Den kritiske værdi er 5,99 så vi forkaster ikke H_0

f) Bidragene ser således ud:

	Går til en noget	Går ikke til noget
1. år	0,22	0,18
2. år	0,28	0,22
3. år	1,34	1,07

Bidragene er klart højest for 3. år. Sammenligner man observerede og forventede værdier, ser ud til at der er færre elever på 3. går til fritidsaktiviteter. Sammenhængen er dog ikke signifikant (jvf. spørgsmål e), så det kan ligeså godt være en tilfældighed.

g) Vi har undersøgt om der er nogen sammenhæng mellem årgang og tendens til at dyrke fritidsaktiviteter. På baggrund af de indsamlede data har vi ikke kunne konstatere nogen signifikant forskel på de 3 årgange.

Løsning 17.3.1

a) H_0 : Der er uafhængighed mellem alderskategori og navn.

H_1 : Der er ikke uafhængighed mellem alderskategori og navn.

b)

	Junior	Senior	Ungdom	Total
Beauty	11	19	16	46
Freja	19	11	22	52
Lady	17	10	14	41
Musse	36	12	12	60
Total	83	52	64	199

c)

	Junior	Senior	Ungdom
Beauty	19,19	12,02	14,79
Freja	21,69	13,59	16,72
Lady	17,10	10,71	13,19
Musse	25,03	15,68	19,30

d)

	Junior	Senior	Ungdom
Beauty	3,49	4,05	0,10
Freja	0,33	0,49	1,67
Lady	0,00	0,05	0,05
Musse	4,81	0,86	2,76

- e) $f = 6$, $\chi^2 = 18,67$, og $p = 0,48\%$
- f) Jepper, da $p < 5\%$
- g) Det er der. Vi forkastede jo H_0 og accepterede H_1 .
- h) Der var især holdningsforskelle til navnene Beauty og Musse. Juniorgruppen kunne ikke lide navnet Beauty, mens seniorerne var vilde med det. Musse var til gengæld mægtig populært blandt juniorerne.

Indeks

- $\ln(x)$, [223](#)
- $\log(x)$, [223](#)
- $\mathbb{R}$, [24](#)
- $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, [509](#)
- afdrag, [248](#)
- aftagende, [82](#)
- alternativ hypotese, [527](#)
- amortisationstabel, [247](#)
- andengradsligninger, [161](#)
- annuitetslån, [245](#)
- annuitetsopsparing, [242](#)
- begrænsede funktioner
 - GeoGebra, [391](#)
- begyndelsesværdi, [184](#)
- binomialfordeling, [456](#)
 - GeoGebra, [462](#)
- binomialkoefficient, [437](#)
- Brøker med tal, [11](#)
- centralmål, [412](#)
- chi i anden-test
 - fremgangsmåde, [519](#)
 - med GeoGebra og Excel, [537](#)
- definition, [92](#)
- definitionsområde, [67](#)
- differens, [20](#)
- differenskvotient, [332](#)
- differensmængde, [28](#)
- differentialkvotient
 - grafisk forståelse, [303](#)
 - overfladisk definition, [313](#)
 - tabel, [313](#)
 - tabel regneregler for opbyggede funktioner, [316](#)
 - teknisk definition, [339](#)
- differentialregning
 - GeoGebra, [325](#)
- differentiere, [314](#)
- disjunkte, [29](#)
- disjunkte hændelser, [443](#)
- diskontinuert, [347](#)
- diskriminant, [153](#)
- dobbeltuligheder, [40](#)
- effektiv rente, [255](#)
- eksponent, [20](#)
- eksponentiel funktion, [184](#)
- eksponentiel regression, [194](#), [199](#)
- Ekstrema med differentialregning, [373](#)
- ekstremum, [77](#)
 - GeoGebra, [388](#)
- endepunkter
 - GeoGebra, [391](#)
- faktorer, [20](#)
- faktorisere, [18](#), [166](#)
- fakultet, [435](#)
- fordelingsfunktioner, [490](#)
- fordoblingskonstant, [204](#)
- foreningsmængde, [28](#)
- Forskrift, [56](#)
- forskrift for en eksponentiel funktion der går gennem to punkter, [189](#)
- Forskrift for en lineær funktion gennem to punkter, [97](#)
- fortegnsundersøgelse

- polynomier, [167](#)
- fortegnsvariation, [73](#)
- forventede værdier, [527](#)
- fraktil, [407](#)
 - standardnormalfordeling, [509](#)
 - trappediagram, [406](#)
- fraktiler
 - grupperede observationer, [417](#)
- frekvens, [403](#)
- frekvenstabel, [402](#)
- frekvenstabel - grupperede observationer, [419](#)
- fremskrivningsfaktor, [184](#)
- fremskrivningsformlen, [240](#)
- fremtidsværdi
 - annuitetsopsparing, [242](#)
- frihedsgrader, [530](#)
- funktion, [55](#)
- funktionsundersøgelse, [367](#)
- Funktionsundersøgelse med Geogebra, [388](#)
- fællesmængde, [27](#)
- førstegradsligning, [161](#)
- gennemsnit, [410](#)
 - grupperede observationer, [420](#)
- gennemsnitlig rente, [257](#)
- Grafer, [59](#)
- grundmængde, [32](#)
- grundtal, [20](#), [184](#)
- Grænseværdier, [342](#)
- halveringskonstant, [205](#)
- halvåbent interval, [26](#)
- hovedstol, [245](#)
- hyppighed, [402](#)
- hældning, [92](#)
- hældningskoefficient, [92](#)
- hældningstal, [92](#)
- hændelse, [441](#)

- indekstal, [181](#)
- indre funktion, [319](#)
- interval, [25](#)
- invertibel funktion, [214](#)
- isolere, [161](#)
- kapitalfremskrivning, [239](#)
- komplementære hændelser, [444](#)
- komplementærmængde, [28](#)
- konfidensinterval
 - binomialfordeling, [497](#)
 - binomialfordeling, formel, [501](#)
 - normalfordeling, [505](#)
 - normalfordeling, formel, [512](#)
- konfidensniveau, [498](#)
- konstant, [79](#), [82](#)
- kontinuert funktion
 - definition, [348](#)
- kontinuerte fordeling, [470](#)
- Kontinuerte funktioner, [346](#)
- kriteriefunktion
 - lineær programmering, [272](#)
- kritiske værdier, [531](#)
- Krumningsforhold, [381](#)
- krumningsforhold
 - GeoGebra, [395](#)
- kvadratsætninger, [41](#)
- kvartilafstand, [409](#)
- kvartilsæt, [408](#)
- led, [20](#)
- ligninger, [30](#)
- lineær funktion, [92](#)
- lineær model, [112](#), [124](#)
- Lineær programmering
 - med hjørneinspektion, [271](#)
- lineær regression, [120](#)
- Lineær regression i WordMat, [109](#)
- logaritmefunktioner, [223](#)
- logaritmeregneregler, [228](#)
- lukket interval, [25](#)

løsningsmængde, 32
 maksimum
 GeoGebra, 388
 median, 408
 middelværdi
 normalfordeling, 479
 stokastisk variable, 452
 mindsteværdi
 statistik, 407
 minimum
 GeoGebra, 388
 monotoniforhold, 77
 Monotoniforhold med differentialregning, 369
 Mængder, 24
 naturlig eksponentialfunktion, 186
 niveaulinje, 280
 nominel rente, 255
 Normal-Plot, 489
 normalfordeling, 476
 GeoGebra, 484
 nulhypotese, 527
 nulpolynomiet, 146
 nulpunkt, 71
 nulpunkter
 andengradspolynomier, 156
 GeoGebra, 388
 nulreglen, 165
 Numerisk værdi, 11
 nutidsværdi
 annuitetslån, 245
 observation, 402
 observationssæt, 402
 omvendt funktion, 211
 omvendt funktion til lineær funktion, 220
 outlier, 404
 p-værdi
 chi i anden-test, 528
 parabel, 146
 pindediagram, 405
 pivottabel, 537
 polygonområde, 273
 polynomium, 140
 population, 497
 potens, 20
 primo restgæld, 248
 procentpoint, 182
 procentregning, 177
 produkt, 20
 reelle tal, 24
 rentefod, 239
 residualer, 116
 residualplot, 115
 restgæld
 formel, 251
 røringspunkt
 tangent, 328
 sammensat funktion, 318
 sandsynlighedsfelt, 439
 sandsynlighedsfordeling, 450
 sandsynlighedsfunktion, 439
 sandsynlighedstabel, 439
 sekant, 331
 signifikansniveau
 chi i anden-test, 528
 konfidensinterval, 508
 sildeben, 60
 skæring
 polynomier, 170
 spredning, 411
 spredningsmål, 412
 stamfunktioner
 tabel, 313
 standardafvigelse, 411
 normalfordeling, 479
 stikprøve, 505

stokastisk variable, [452](#)
 standardnormalfordelingen, [483](#)
 stikprøve, [497](#)
 stokastisk eksperiment, [438](#)
 stokastisk variabel, [449](#)
 Stykkevis lineære funktioner, [102](#)
 størsteværdi
 statistik, [407](#)
 støttepunkter, [61](#)
 sum, [20](#)
 sumkurve, [416](#)
 summationstegn, [428](#)
 summeret frekvens, [403](#)
 symmetrisk sandsynlighedsfelt, [447](#)
 sætning, [97](#)

 tangent, [305](#)
 tangentens ligning, [323](#), [356](#)
 GeoGebra, [326](#)
 termin, [239](#)
 teststørrelse, [528](#)
 bidrag, [534](#)
 tilbageskrivningsformlen, [241](#)
 To ligninger med to ubekendte, [33](#)
 Toppunksformel
 bevis, [397](#)
 toppunkt, [154](#)
 trappediagram, [405](#)
 type 1 og type 2 fejl, [529](#)
 typeinterval, [419](#)
 typetal, [407](#)
 tæthedsfunktion, [471](#)

 uafhængige hændelser, [445](#)
 udfald, [438](#)
 udfaldsrum, [438](#)
 uligheder, [37](#)
 ultimo restgæld, [248](#)
 universelle mængde, [27](#)

 varian
 stokastisk variable, [452](#)
 varians, [410](#)
 grupperede observationer, [420](#)
 variationsbredde, [407](#)
 vendepunkt, [386](#)
 vendetangent, [386](#)
 vendetangenter
 GeoGebra, [395](#)
 voksende, [82](#)
 værdimængde, [67](#)
 Værdimængde med differentialregning,
 [379](#)

 xy-plot, [120](#)
 xy-plot i WordMat, [110](#)

 ydelse, [242](#)
 ydre funktion, [319](#)

 åbent interval, [25](#)